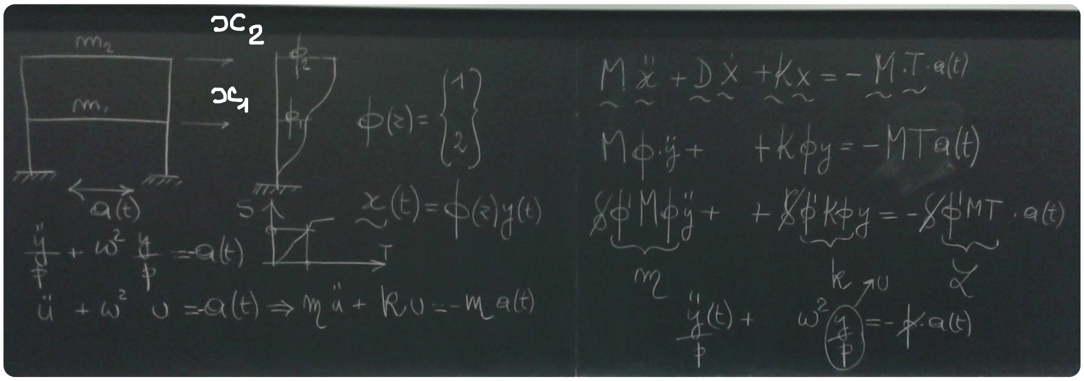
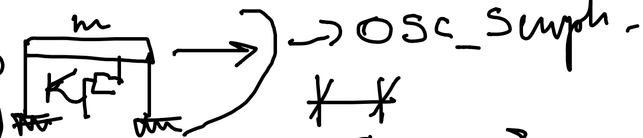
COORDINATE GENERALIZZATE

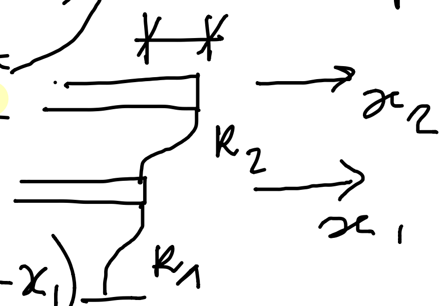


$m\left(a(t) + \ddot{x}(t)\right) + d\dot{x} + Kx = 0$

$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = -m \cdot a(t)$



eq. delle masse m_1 ed m_2



$$\begin{cases} m_2\left(a(t) + \ddot{x}_2\right) + k_2(x_2 - x_1) = 0 \\ m_1\left(a(t) + \ddot{x}_1\right) + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) \end{cases}$$

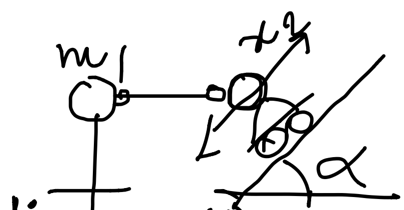
$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + \boxed{k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1)} = -m_1 a(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + \boxed{k_2(x_2 - x_1)} = -m_2 a(t) \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad M = \begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} \qquad K = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} a(t) \\ a(t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} a(t)$$



$$\ddot{x}_2 + a(t)\cos\alpha$$

$$\begin{matrix} k_{11} x_1 + k_{12} x_2 \\ k_{21} x_1 + k_{22} x_2 \end{matrix} = \begin{cases} k_1 x_1 + k_2 x_1 - k_2 x_2 \\ -k_2 x_1 + k_2 x_2 \end{cases}$$

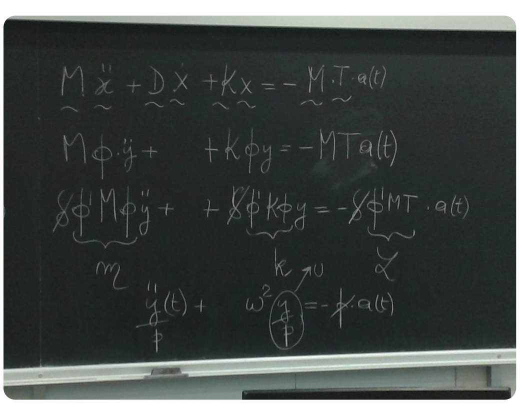
$$k_{11} = k_1 + k_2 \qquad K_{12} = -k_2$$

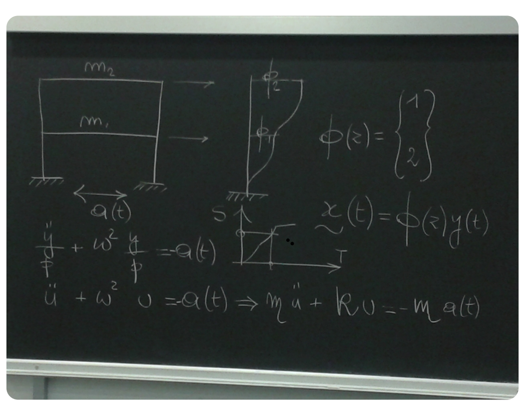
$$k_{21} = -k_1 \qquad k_{22} = k_2$$

$$K = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\ddot{x}} + \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{x} = -\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{T}\,a(t)$$

$$x = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} y(t) \qquad \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} y(t) \qquad \begin{Bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{Bmatrix} y_1$$





$$\delta_y \phi^T(\qquad\qquad) =$$

$$M\phi\ddot{y} + K\phi y = -MTa(t) \qquad \begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}\delta_y = \phi\delta_y$$

$$\cancel{\delta_y}\underbrace{\phi^T M\phi}_{m}\ddot{y} + \cancel{\delta_y}\underbrace{\phi^T K\phi}_{k} y = -\cancel{\delta_y}\underbrace{\phi^T MT}_{\mathcal{L}} a(t)$$

$$\phi^T M \phi$$

$$1\times2\ \underbrace{2\times2\ \ 2\times1}_{2\times1} = m$$

$$m\,\ddot{y}/\cancel{x} + k\,y/\cancel{x} = a(t)$$

$$m\ddot{y} + ky = \mathcal{L}\,a(t)$$

$$m\ddot{x} + kx = m\,a(t) \quad \text{osc.}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{\mathcal{L}}{m}a(t) \qquad \frac{\mathcal{L}}{m} = p$$

$$\frac{\ddot{y}}{p} + \frac{k}{m}\frac{y}{p} = a(t) \leftarrow \text{pseudo}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = a(t) \qquad \text{osc. semplice}$$

Coord Generalizzate

Dimostrazione della formula $T=2\,(d)^{0.5}$

Camillo Nuti

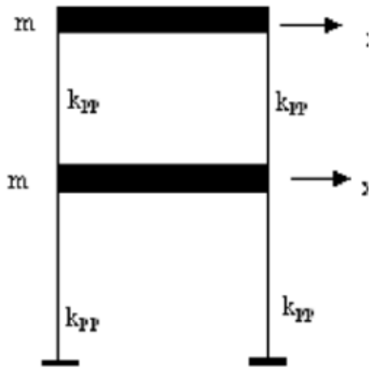
Prog Strutturale 2M 2015-16

2016-17

Dimostrazione della formula T=2 $(d)^{0.5}$

Se si ricava lo stato di deformazione applicando quali forze orizzontale il peso dei piani:

$\phi = K^{-1}\, F$



Le grandezze generalizzate divengono:

Massa generalizzata: $m = \phi^T M \phi$

Rigidezza generalizzata: $k = \phi^T K \phi = \phi^T F$

$T = 2\pi\, (m/k)^{0.5}$

Sviluppando le espressioni di m e k come sommatorie si ha:

Ho raccolto lo spost. dell'ultimo pianoΦ_n

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sum_1^{n-1}\phi_i^2 m_i + \phi_n^2 m_n}{\sum_1^{n-1}\phi_i m_i g + \phi_n m_n g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\phi_n \sum_1^{n-1}\left(\phi_i^2/\phi_n \; m_i^2 + \phi_n m_n^2\right)}{g\sum_1^{n-1}\phi_i m_i + \phi_n m_n}} = 2\pi\sqrt{\frac{\phi_n}{g}}\sqrt{\frac{\sum_1^{n-1}\left(\phi_i^2/\phi_n \; m_i^2 + \phi_n m_n^2\right)}{\sum_1^{n-1}\phi_i m_i + \phi_n m_n}}$$

Il secondo termine sotto radice quadrata è in genere di poco inferiore ad 1, la sua radice quadrata è ancora più prossima ad 1.L'espressine può quindi scriversi:

(Ciò è dovuto al fatto che lo spostamento dell'ultimo piano è in genere maggiore di quelli inferiori)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\phi_n}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\phi_n} = 2\sqrt{\phi_n}$$

La radice di g è circa uguale a π

Esempio

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{bmatrix}$$

matrice delle masse

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2k_p & -k_p \\ -k_p & k_p \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 3.6 \cdot 10^4 & -1.8 \cdot 10^4 \\ -1.8 \cdot 10^4 & 1.8 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

matrice delle rigidezze

$$\phi := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Massa generalizzata: m	=	$\phi^T M \phi$	=	26.25
Rigidezza generalizzata: k	=	$\phi^T K \phi$	=	$9 * 10^3$
L =		$\phi^T M T$	=	31.5
Fattore di partecipazione: p=L/m	=	$\phi^T M T / (\phi M \phi)$	=	1.2
periodo prorio:T	=	$2\pi\ (m/k)^{0.5}$	=	0.339 s

Assegnando le forze esterne:

$$F = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Gli spostamenti corrispondenti valgono:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1.167 \times 10^{-3} \\ 1.944 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Grandezze generalizzate

Massa generalizzata: m	=	$\phi^T M \phi$	=	$1.08\ 10^{-4}$
Rigidezza generalizzata: k	=	$\phi^T F$	=	0,035
Fattore di partecipazione: p=L/m	=	$\phi^T MT/(\phi M \phi)$	=	606.04
periodo prorio:T	=	$2\pi\ (m/k)^{0.5}$	=	0.347 s

è interessante osservare che il calcolo appena eseguito non richiede la valutazione esplicita della matrice delle rigidezze, ma solo l'uso di un programma per l'analisi statica.

Formula approssimata

$T=2\ (d)^{0.5}$

ove d è lo spostamento di sommità ottenuto.

Utilizzando i valori riportati per il telaio a 2 piani di cui sopra si ha:

$F=(206;206)$ (KN)

Applicando queste forze si ottengono i seguenti spostamenti di piano:

$\Phi=(0.023;0.034)$ (m)

Nel caso in questione si ha pertanto:

$d=0.034$ m

$T=2\ (d)^{0.5}=2\ (0.034)^{0.5}=0.37$ s