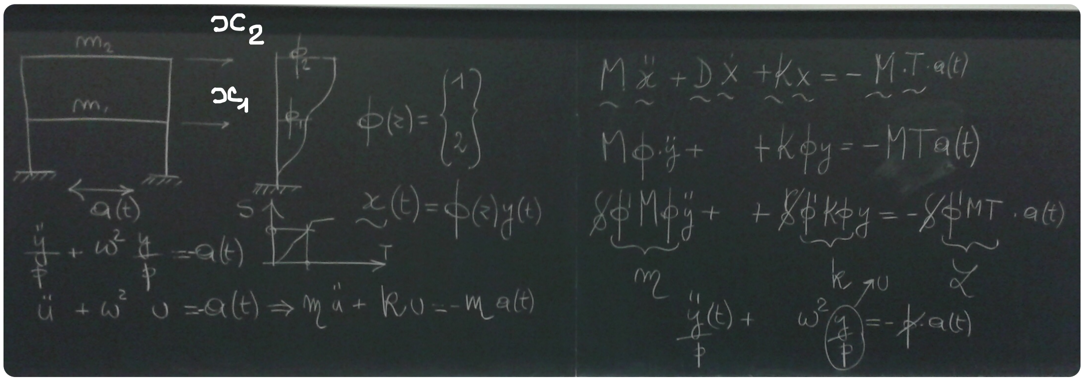
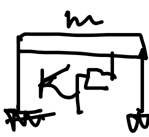
COORDINATE GENERALIZZATE

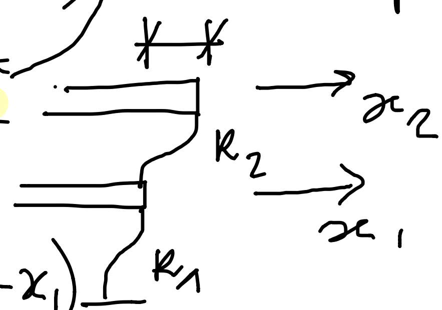


$$m\left(a(t) + \ddot x(t)\right) + d\dot x + Kx = 0$$ → osc_sempli.



$$m\ddot x + d\dot x + k x = -m \cdot a(t)$$

eq. delle masse m_1 ed m_2



$$\begin{cases} m_2\left(a(t) + \ddot x_2\right) + k_2(x_2 - x_1) = 0 \\ m_1\left(a(t) + \ddot x_1\right) + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) \end{cases}$$

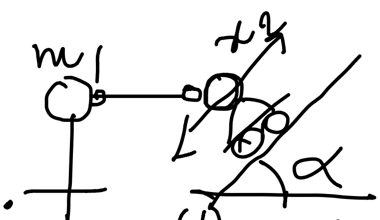
$$\begin{cases} m_1 \ddot x_1 + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) = -m_1 a(t) \\ m_2 \ddot x_2 + k_2(x_2 - x_1) = -m_2 a(t) \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad M = \begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} \quad K = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot x_1 \\ \ddot x_2 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} a(t) \\ a(t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} a(t)$$



$$\ddot{x}_2 + a(t)\cos\alpha$$

$$\begin{matrix} k_{11} x_1 + k_{12} x_2 \\ k_{21} x_1 + k_{22} x_2 \end{matrix} = \begin{cases} k_1 x_1 + k_2 x_1 - k_2 x_2 \\ -k_2 x_1 + k_2 x_2 \end{cases}$$

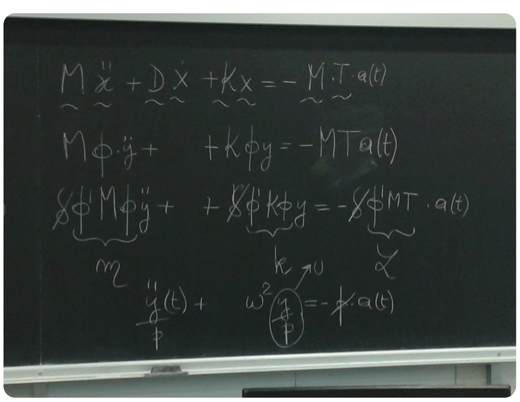
$$k_{11} = k_1 + k_2 \qquad k_{12} = -k_2$$

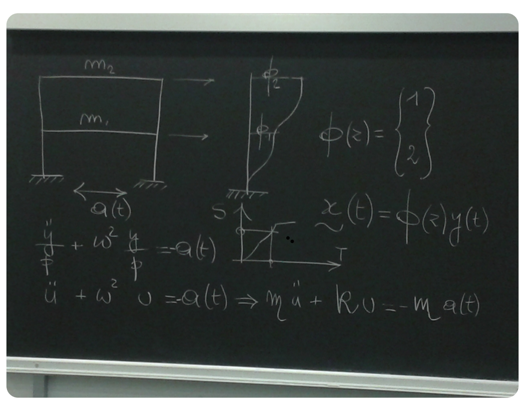
$$k_{21} = -k_1 \qquad k_{22} = k_2$$

$$K = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\ddot{x}} + \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{x} = - \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{T} a(t)$$

$$x = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} y(t) \qquad \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} y(t) \qquad \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{Bmatrix} y_1$$





$\delta_y \phi^T (\qquad) =$

$M\phi\ddot{y} + K\phi y = -MTa(t)$ $\quad \begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix} \delta_y = \phi\,\delta_y$

$\cancel{\delta_y}\underbrace{\phi^T M \phi}_{m}\ddot{y} + \cancel{\delta_y}\underbrace{\phi^T K \phi}_{k}\, y = -\cancel{\delta_y}\underbrace{\phi^T M T}_{\mathcal{L}}\, a(t)$

$\phi^T M \phi$

$1\times 2 \quad \underbrace{2\times 2 \quad 2\times 1}_{2\times 1} = m$

$m\,\ddot{y}/\cancel{\alpha} + k\,y/\cancel{\alpha} = a(t)$

$m\ddot{y} + ky = \mathcal{L}\, a(t)$

$m = \phi^T M \phi$

$k = \phi^T K \phi$

$\mathcal{L} = \phi^T M T$

$m\ddot{x} + kx = m\, a(t)$ osc. Semplice

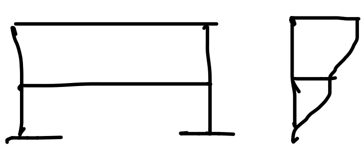
$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{\mathcal{L}}{m} a(t) \qquad \frac{\mathcal{L}}{m} = p$

$\frac{\ddot{y}}{p} + \frac{k}{m}\frac{y}{p} = a(t)$ ← pseudo osc semplice

$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = a(t)$ osc. Semplice

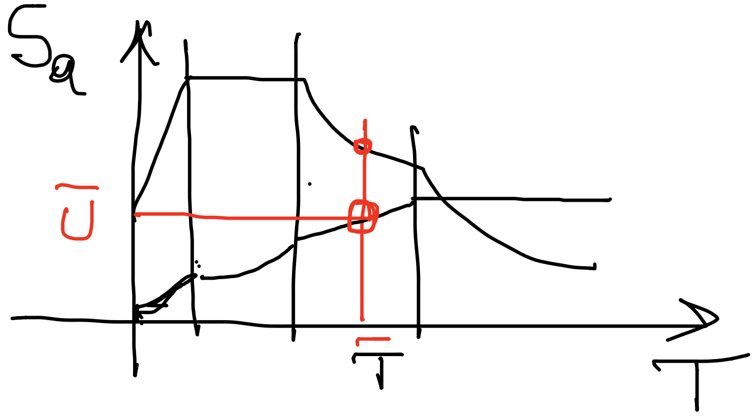
$y/p = U$

$\ddot{U} + \frac{k}{m} U = a(t)\, ; \quad \frac{k}{m} = \omega^2$



$x = \phi y \qquad u(t=0) = U_0$

Se assoggetto la struttura ad un accelerogramma che ha lo spettro di risp.



noti m e $k \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \bar{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2}}$

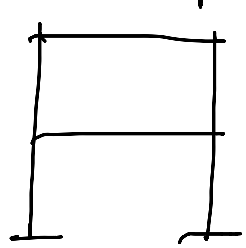
$\bar{U} = U(\bar{T}) \Longrightarrow \quad y = U \cdot \phi \Rightarrow \bar{y} = \bar{U} \cdot \phi$

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\phi} \cdot \bar{y} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \bar{U} \phi$$

Come scegliere ϕ?

$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{x}$

$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{K}^{-1} \underset{\sim}{F}$



$m_2\, acc_2 \quad \xrightarrow{F_2}$

$m_1\, acc_1 \quad \xrightarrow{F_1}$

$$k = \phi^T K \phi$$

$\phi^T \times \underset{\sim}{F}$ = Lavoro di $\underset{\sim}{F}$ = zig. gen.

$\phi^T M \phi = m$ massa gen

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$\mathcal{L} = \phi^T M T$ $\quad \mathcal{L}/m = p$ → coefficiente di partecipazione

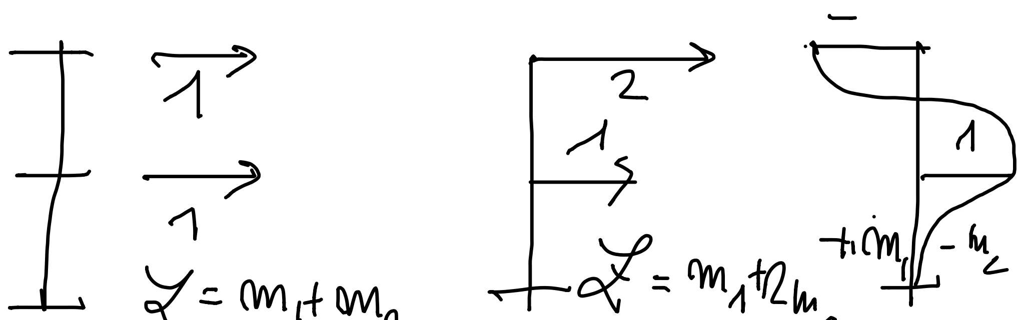
$$\ddot{u} + \omega^2 u = a(t)$$

$u(T) \Rightarrow y = \phi \cdot u(T)$

$$\mathcal{L} = \phi^T M \cdot T$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_1 \\ m \end{vmatrix} = \phi_1 m_1 + \phi_2 m_2$$



$\mathcal{L} = m_1 + m_2$ $\qquad$ $\mathcal{L} = m_1 + 2m_2$

Cosa succede se uso ϕ oppure 2ϕ

$$m_1 = \phi^T M \phi \qquad m_2 = 2\phi^T M \, 2\phi = 2^2 m_1$$

$$k_1 = \phi^T K \phi \qquad k_2 = 2\phi^T K \, 2\phi = 2^2 k_1$$

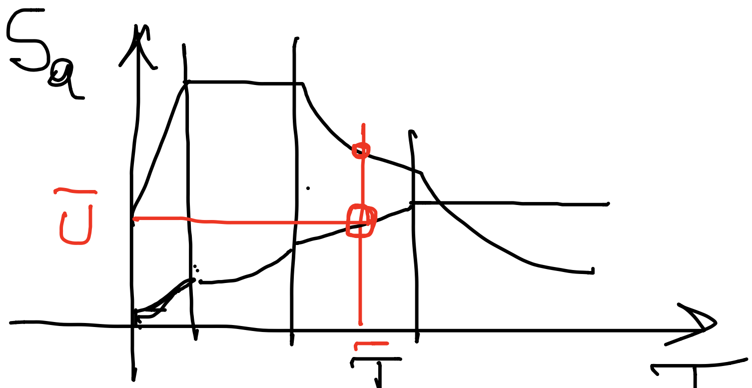
$$\mathcal{L}_1 = \phi^T M T \qquad 2\phi^T M T = 2\mathcal{L}_1$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y} + k_1 y = \mathcal{L}_1 a(t) \\ 2^2 m_1 \ddot{y} + 2^2 k_1 y = 2\mathcal{L}_1 a(t) \end{cases}$$

$$\ddot{y} + \frac{k_1}{m_1} y = \boxed{\frac{\mathcal{L}_1}{m_1}}^{p_1} a(t)$$

$$\ddot{y} + \frac{\cancel{2^2} k_1}{\cancel{2^2} m_1} y = \boxed{\frac{2\mathcal{L}_1}{2^2 m_1}}^{p_2} a(t)$$

$$\ddot{y} + \frac{k_1}{m_1} y = \frac{1}{2} p_1 \, a(t)$$



$u(\bar T) = \bar U$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \underline{x} = \Phi \cdot \bar U p_1 \\ 2)\ \underline{x} = 2\Phi \bar U \frac{p_1}{2} \end{array}\right\} \Phi S_a(T) p_1$$

Coord Generalizzate

Dimostrazione della formula $T=2\ (d)^{0.5}$

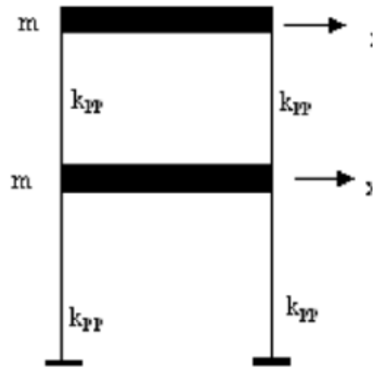
Camillo Nuti

Prog Strutturale 2M 2015-16

2016-17

Dimostrazione della formula T=2 (d)$^{0.5}$

Se si ricava lo stato di deformazione applicando quali forze orizzontale il peso dei piani:



$\phi = K^{-1} F$

Le grandezze generalizzate divengono:

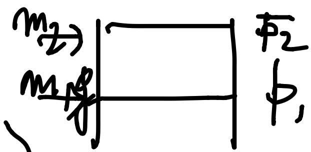
Massa generalizzata: $m = \phi^T M \phi$

Rigidezza generalizzata: $k = \phi^T K \phi = \phi^T F$

$T = 2\pi (m/k)^{0.5}$

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi \end{bmatrix}} = \phi_1 \quad \phi_2 \begin{bmatrix} m_1 \phi_1 \\ m_2 \phi_2 \end{bmatrix} =$$

$$\phi_1 \; \phi \qquad [K]\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix} = [\phi_1 \;\; \phi_2]\begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \end{bmatrix} \rightarrow \phi_1 m_1 g + \phi_2 m_2 g$$



Sviluppando le espressioni di m e k come sommatorie si ha:

Ho raccolto lo spost. dell'ultimo pianoΦ_n

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sum_1^{n-1}\phi_i^2 m_i + \phi_n^2 m_n}{\sum_1^{n-1}\phi_i m_i g + \phi_n m_n g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\phi_n \sum_1^{n-1}\left(\frac{\phi_i^2}{\phi_n} m_i^2 + \phi_n m_n^2\right)}{g\sum_1^{n-1}\phi_i m_i + \phi_n m_n}} = 2\pi\sqrt{\frac{\phi_n}{g}}\sqrt{\frac{\sum_1^{n-1}\left(\frac{\phi_i^2}{\phi_n} m_i^2 + \phi_n m_n^2\right)}{\sum_1^{n-1}\phi_i m_i + \phi_n m_n}} \sim 1$$

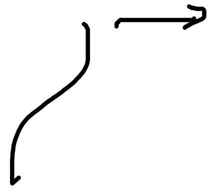
Il secondo termine sotto radice quadrata è in genere di poco inferiore ad 1, la sua radice quadrata è ancora più prossima ad 1.L'espressine può quindi scriversi:

(Ciò è dovuto al fatto che lo spostamento dell'ultimo piano è in genere maggiore di quelli inferiori)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\phi_n}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\phi_n} = 2\sqrt{\phi_n}$$

La radice di g è circa uguale a π

Esempio



$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{bmatrix}$$ matrice delle masse

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2k_p & -k_p \\ -k_p & k_p \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 3.6 \cdot 10^4 & -1.8 \cdot 10^4 \\ -1.8 \cdot 10^4 & 1.8 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$ matrice delle rigidezze

$$\phi := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(0.5 \quad 1)\begin{bmatrix}21 & 0\\ 0 & 21\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \qquad (0,5;\,1)\begin{bmatrix}21 & 0\\ 0 & 21\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5\\ 1\end{bmatrix}$$

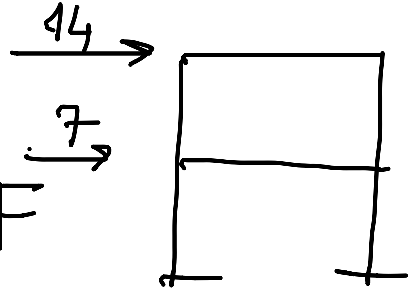
$$\sum\left(21\cdot 0.5^2 + 21\cdot 1^2\right)$$

Massa generalizzata: m	=	$\phi^T M\phi$	=	26.25
Rigidezza generalizzata: k	=	$\phi^T K\phi$	=	$9 * 10^3$
L =		$\phi^T MT$	=	31.5
Fattore di partecipazione: p=L/m	=	$\phi^T MT/(\phi M\phi)$	=	1.2
periodo prorio:T	=	$2\pi\,(m/k)^{0.5}$	=	0.339 s

$$R = 200\times 200\times 30 = 4\times 10^4\times 30 = 12\times 10^5$$
$$= 12\times 10^2\ \text{KN}$$

$$N_1 \cong 210\ \text{KN} \qquad n = 210/12\times 10^2 = \frac{2.10\times 10^2}{12\times 10^3} = 2\times 10^{-1}$$

Assegnando le forze esterne:



$$F = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{x} \longrightarrow x = K^{-1} F$$

Gli spostamenti corrispondenti valgono:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1.167 \times 10^{-3} \\ 1.944 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Grandezze generalizzate

$$\phi^T \underbrace{k\phi} = \underset{\sim}{F} = [1.16 \quad 1.94] \begin{Bmatrix} 7 \\ 14 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$[1.16 \quad 1.94] \underbrace{\begin{bmatrix} 2.1 & 0 \\ 0 & 2.1 \end{bmatrix}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} 10^{-3} = 65.1 \times 10^{-3}$$

Massa generalizzata: m	=	$\phi^T M\phi$	=	$1.08\ 10^{-4}$
Rigidezza generalizzata: k	=	$\phi^T F$	=	0,035
Fattore di partecipazione: p=L/m	=	$\phi^T MT/(\phi M\phi)$	=	606.04
periodo prorio:T	=	$2\pi\ (m/k)^{0.5}$	=	0.347 s

è interessante osservare che il calcolo appena eseguito non richiede la valutazione esplicita della matrice delle rigidezze, ma solo l'uso di un programma per l'analisi statica.

Formula approssimata

$T=2\ (d)^{0.5}$

ove d è lo spostamento di sommità ottenuto.

Utilizzando i valori riportati per il telaio a 2 piani di cui sopra si ha:

$F=(206;206)$ (KN)

Applicando queste forze si ottengono i seguenti spostamenti di piano:

$\Phi=(0.023;0.034)$ (m)

Nel caso in questione si ha pertanto:

$d=0.034$ m

$T=2\ (d)^{0.5}=2\ (0.034)^{0.5}=0.37$ s