

---

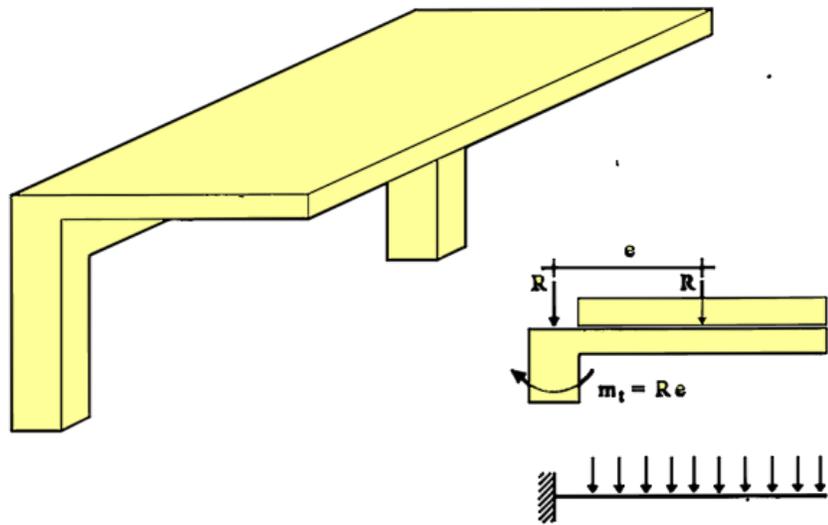
Progettazione Strutturale 2mB

# *Torsione in elementi in ca*

davide.lavorato@uniroma3.it

# Sollecitazione di Torsione primaria e secondaria

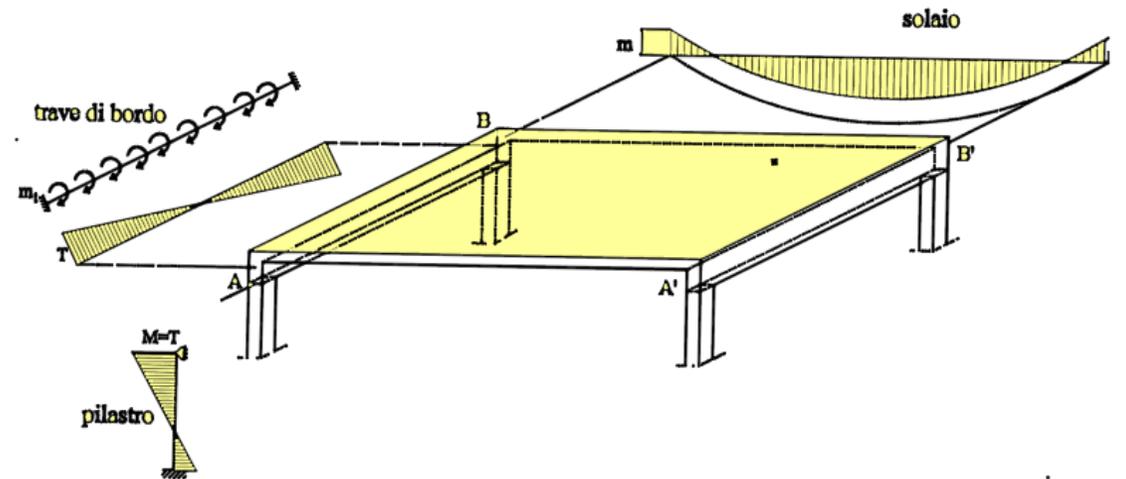
Es: Trave a ginocchio  
o oggetto da trave secondaria



Torsione primaria (di equilibrio)  
Necessarie Verifiche agli SLU e SLE.

*L'equilibrio di una struttura dipende dalla resistenza torsionale degli elementi che la compongono*

Es: Trave primaria di bordo



Torsione secondaria (di congruenza)  
No Verifiche agli SLU e SLE ma armatura minima per la fessurazione e per garantire duttilità

# ***Norma Italiana NTC: stato limite ultimo di torsione***

## ***4.1.2.1.4 Resistenza nei confronti di sollecitazioni torcenti***

Qualora l'equilibrio statico di una struttura dipenda dalla resistenza torsionale degli elementi che la compongono, è necessario condurre la verifica di resistenza nei riguardi delle sollecitazioni torcenti. Qualora, invece, in strutture iperstatiche, la torsione insorga solo per esigenze di congruenza e la sicurezza della struttura non dipenda dalla resistenza torsionale, non sarà generalmente necessario condurre le verifiche.

La verifica di resistenza (SLU) consiste nel controllare che

$$T_{Rd} \geq T_{Ed} \quad (4.1.26)$$

dove  $T_{Ed}$  è il valore di calcolo del momento torcente agente.

Per elementi prismatici sottoposti a torsione semplice o combinata con altre sollecitazioni, che abbiano sezione piena o cava, lo schema resistente è costituito da un traliccio periferico in cui gli sforzi di trazione sono affidati alle armature longitudinali e trasversali ivi contenute e gli sforzi di compressione sono affidati alle bielle di calcestruzzo.

# ***Norma Italiana NTC: stato limite ultimo di torsione***

Con riferimento al calcestruzzo la resistenza si calcola con

$$T_{Rcd} = 2 \cdot A \cdot t \cdot f'_{cd} \cdot \text{ctg}\theta / (1 + \text{ctg}^2\theta) \quad (4.1.27)$$

dove  $t$  è lo spessore della sezione cava; per sezioni piene  $t = A_c/u$  dove  $A_c$  è l'area della sezione ed  $u$  è il suo perimetro;  $t$  deve essere assunta comunque  $\geq 2$  volte la distanza fra il bordo e il centro dell'armatura longitudinale.

Le armature longitudinali e trasversali del traliccio resistente devono essere poste entro lo spessore  $t$  del profilo periferico. Le barre longitudinali possono essere distribuite lungo detto profilo, ma comunque una barra deve essere presente su tutti i suoi spigoli.

Con riferimento alle staffe trasversali la resistenza si calcola con

# ***Norma Italiana NTC: stato limite ultimo di torsione***

Con riferimento alle staffe trasversali la resistenza si calcola con

$$T_{Rsd} = 2 \cdot A \cdot \frac{A_s}{s} \cdot f_{yd} \cdot \operatorname{ctg}\theta \quad (4.1.28)$$

Con riferimento all'armatura longitudinale la resistenza si calcola con

$$T_{Rld} = 2 \cdot A \cdot \frac{\sum A_l}{u_m} \cdot f_{yd} / \operatorname{ctg}\theta \quad (4.1.29)$$

dove si è posto

$A$  area racchiusa dalla fibra media del profilo periferico;

$A_s$  area delle staffe;

$u_m$  perimetro medio del nucleo resistente

$s$  passo delle staffe;

$\sum A_l$  area complessiva delle barre longitudinali.

L'inclinazione  $\theta$  delle bielle compresse di calcestruzzo rispetto all'asse della trave deve rispettare i

# ***Norma Italiana NTC: stato limite ultimo di torsione***

L'inclinazione  $\theta$  delle bielle compresse di calcestruzzo rispetto all'asse della trave deve rispettare i limiti seguenti

$$0,4 \leq \operatorname{ctg} \theta \leq 2,5 \quad (4.1.30)$$

Entro questi limiti, nel caso di torsione pura, può porsi  $\operatorname{ctg} \theta = (a_1/a_s)^{1/2}$

con:  $a_1 = \sum A_1 / u_m$

$$a_s = A_s / s$$

La resistenza alla torsione della trave è la minore delle tre sopra definite:

$$T_{Rd} = \min (T_{Rcd}, T_{Rsd}, T_{Rld}) \quad (4.1.31)$$

Nel caso di elementi per i quali lo schema resistente di traliccio periferico non sia applicabile, quali gli elementi a pareti sottili a sezione aperta, dovranno utilizzarsi metodi di calcolo fondati su ipotesi teoriche e risultati sperimentali chiaramente comprovati.

# CONTRIBUTI RESISTENTI A TORSIONE:

I simboli definiti dalla normativa sono indicati nelle dispense con minime variazioni come segue:

**Norma NTC:**  $f_{ywd}=f_{yd}$

**Dispense:**

**Staffe**

$$T_{Rsd} = 2 \cdot A \cdot \frac{A_s}{s} \cdot f_{yd} \cdot \operatorname{ctg}\theta$$

$$T_{Rd,s} = 2A_k \frac{A_{sw}}{s} f_{ywd} \cot\theta$$

**Barre longitudinali**

$$T_{Rld} = 2 \cdot A \cdot \frac{\sum A_l}{u_m} \cdot f_{yd} / \operatorname{ctg}\theta$$

$$T_{Rd,l} = 2A_k \frac{A_l}{u_k} f_{yd} \tan\theta$$

**Bielle compresse in ca**

$$T_{Rcd} = 2 \cdot A \cdot t \cdot f'_{cd} \cdot \operatorname{ctg}\theta / (1 + \operatorname{ctg}^2\theta)$$

$$T_{Rd,c} = 2A_k t v f_{cd} \sin\theta \cos\theta$$

dove  $t$  è lo spessore della sezione cava; per sezioni piene  $t = A_c/u$  dove  $A_c$  è l'area della sezione ed  $u$  è il suo perimetro;  $t$  deve essere assunta comunque  $\geq 2$  volte la distanza fra il bordo e il centro dell'armatura longitudinale.

$A$  area racchiusa dalla fibra media del profilo periferico;

$A_s$  area delle staffe;

$u_m$  perimetro medio del nucleo resistente

$s$  passo delle staffe;

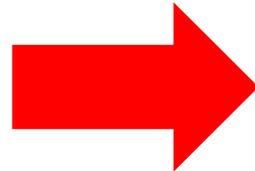
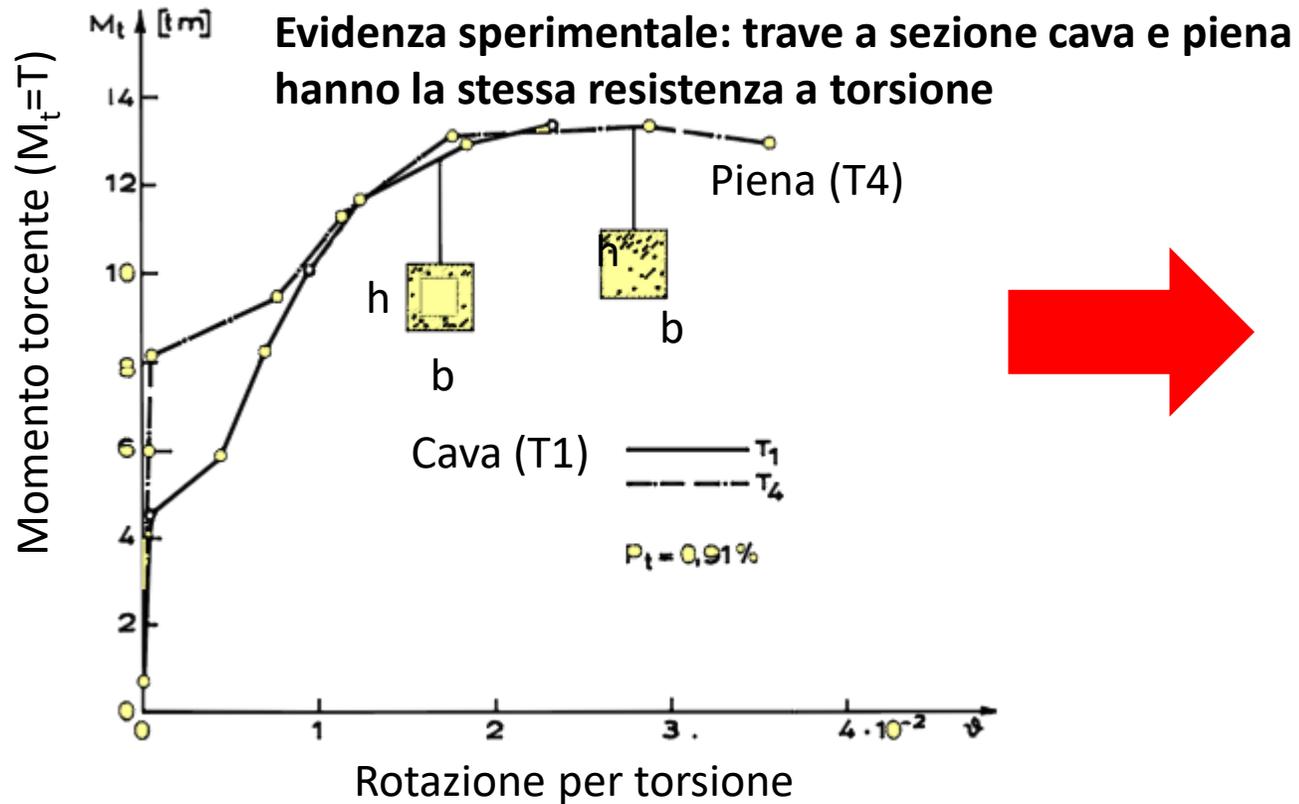
$\sum A_l$  area complessiva delle barre longitudinali.

L'inclinazione  $\theta$  delle bielle compresse di calcestruzzo rispetto all'asse della trave

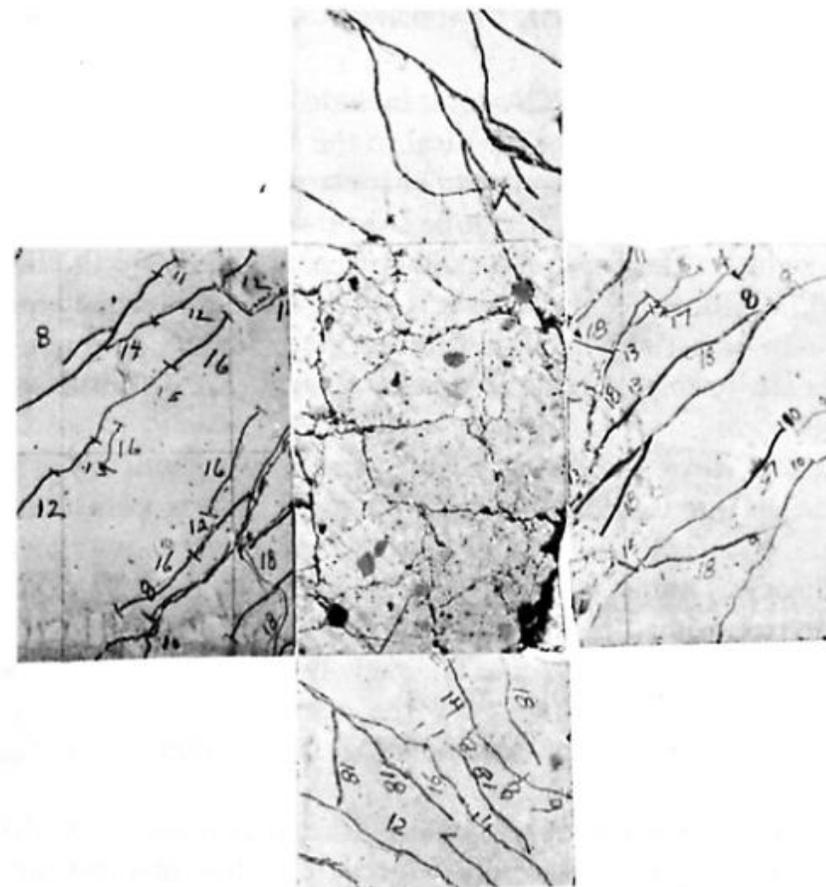
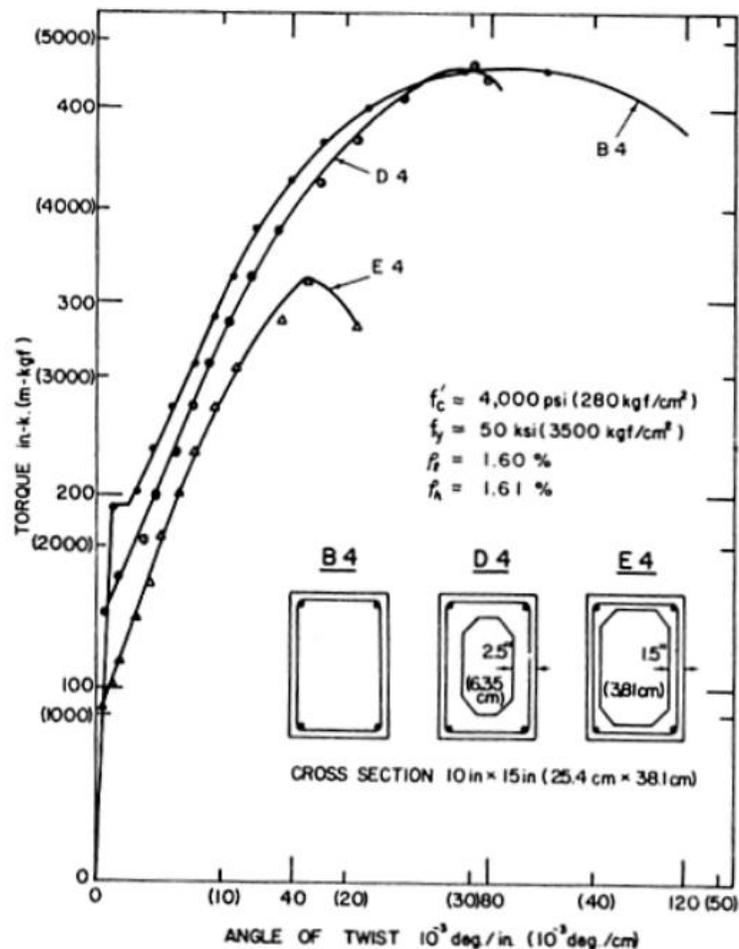
$f'_{cd}$  resistenza a compressione ridotta del calcestruzzo d'anima ( $f'_{cd} = 0,5 \cdot f_{cd}$ );

$f_{yd}$  tensione di snervamento di progetto definita da norma italiana NTC

# Resistenza a Torsione: sezione cava VS sezione piena in ca con eguali dimensioni esterne $h$ e $b$



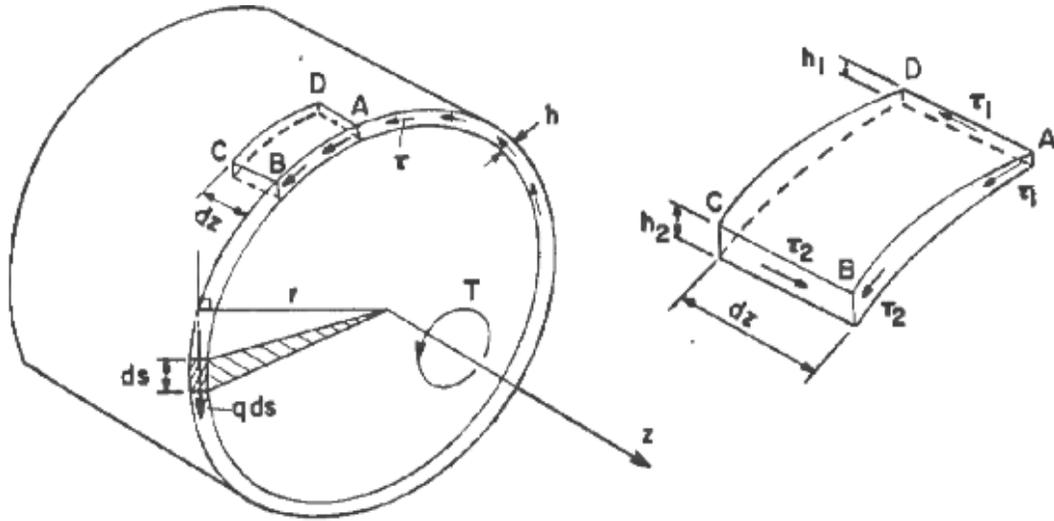
# Resistenza a Torsione:



Confronto sperimentale tra travi piene e travi cave: sezione compatta e sezioni cave aventi diverso spessore delle pareti (Hsu1984)

Quadro fessurativo di una trave con sezione rettangolare (Hsu 1984)

# Tensioni in caso di Torsione: sezione sottile chiusa formula di BREDT (1896)

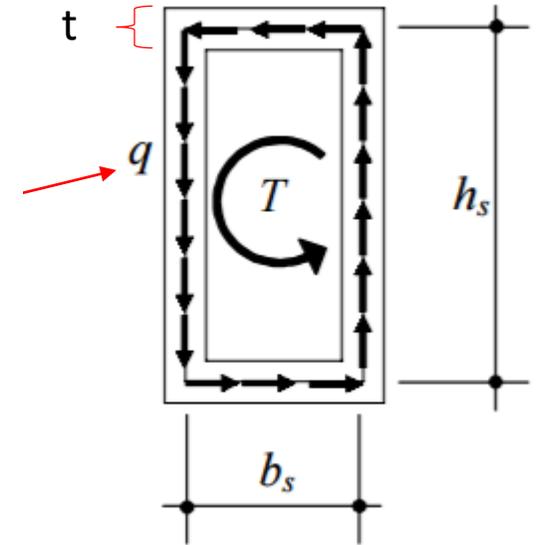


Per equilibrio alla traslazione lungo l'asse  $z$  si ha:

$$\tau_1 h_1 = \tau_2 h_2 \Rightarrow \text{il flusso } q = \tau t \text{ è costante lungo tutto il perimetro } u$$

Pertanto l'equilibrio alla rotazione rispetto all'asse  $z$  fornisce:

$$T = \oint q r ds = q \oint r ds = 2qA \Rightarrow q = \frac{T}{2A} \quad \text{dove } A \text{ è l'area racchiusa dalla linea media del tubo.}$$



# Meccanismo Resistente a Torsione: un traliccio spaziale

Contributi resistenti:

- Staffe

$$T_{Rd,s} = 2A_k \frac{A_{sw}}{s} f_{ywd} \cot \theta$$

- Barre longitudinali

$$T_{Rd,l} = 2A_k \frac{A_l}{u_k} f_{yd} \tan \theta$$

- Bielle compresse in ca

$$T_{Rd,c} = 2A_k t v f_{cd} \sin \theta \cos \theta$$

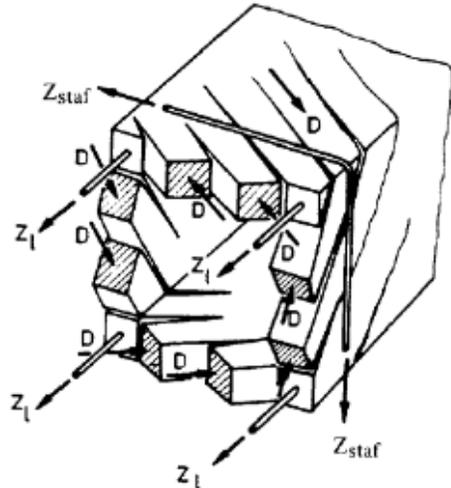
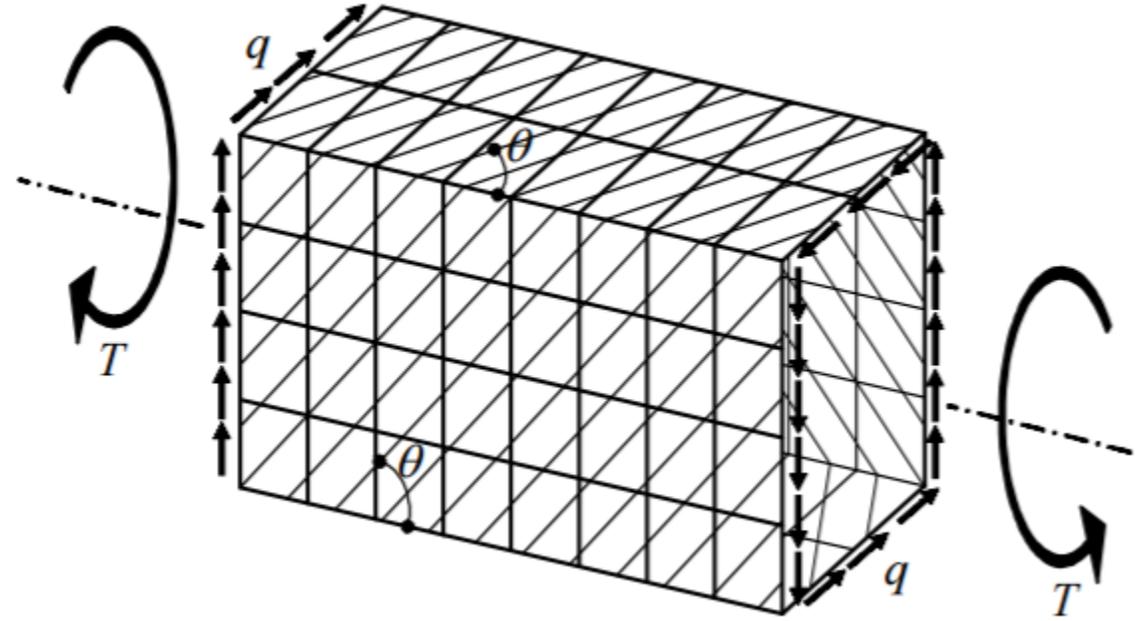
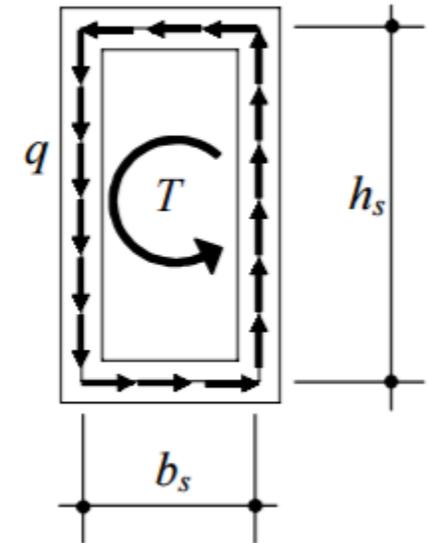


Fig. 9.17 Modello di sezione trasversale piena fessurata sollecitata a torsione semplice, secondo W. Fuchssteiner [151]

$$q = \frac{T}{2A_k}$$

$$A_k = b_s h_s$$



# Meccanismo Resistente a Torsione: un traliccio spaziale

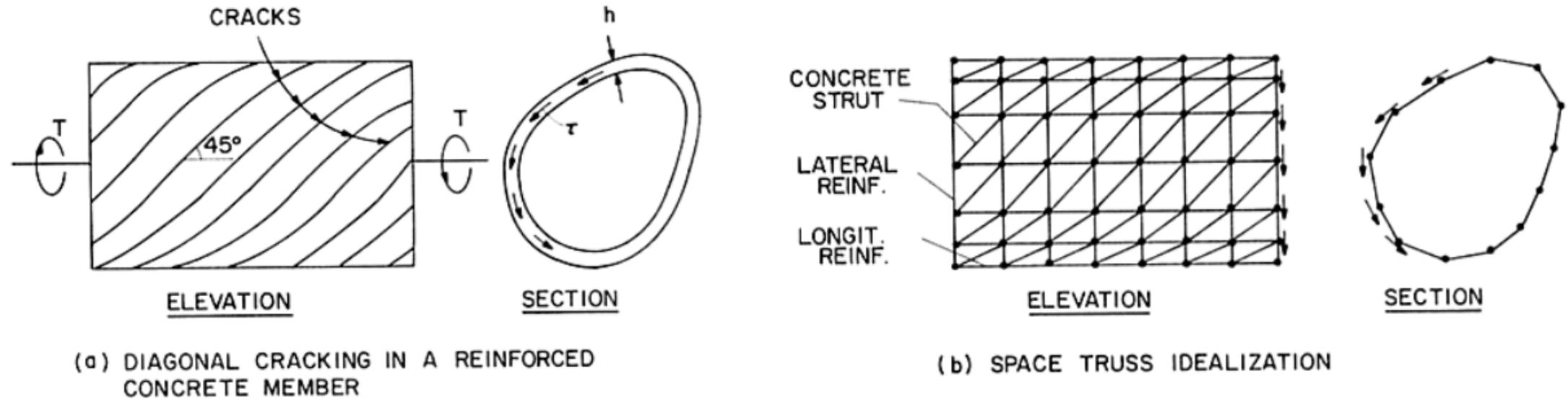
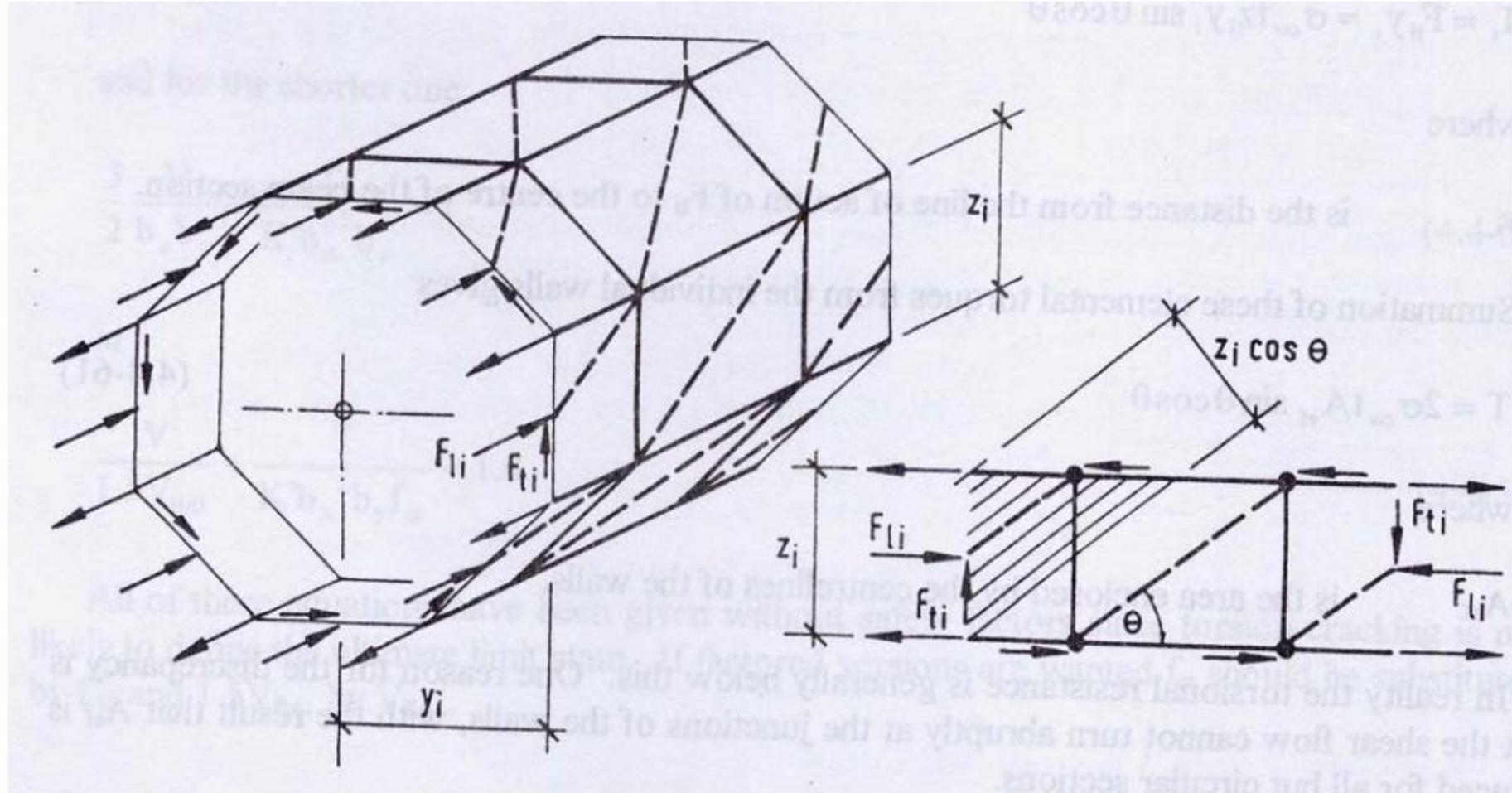


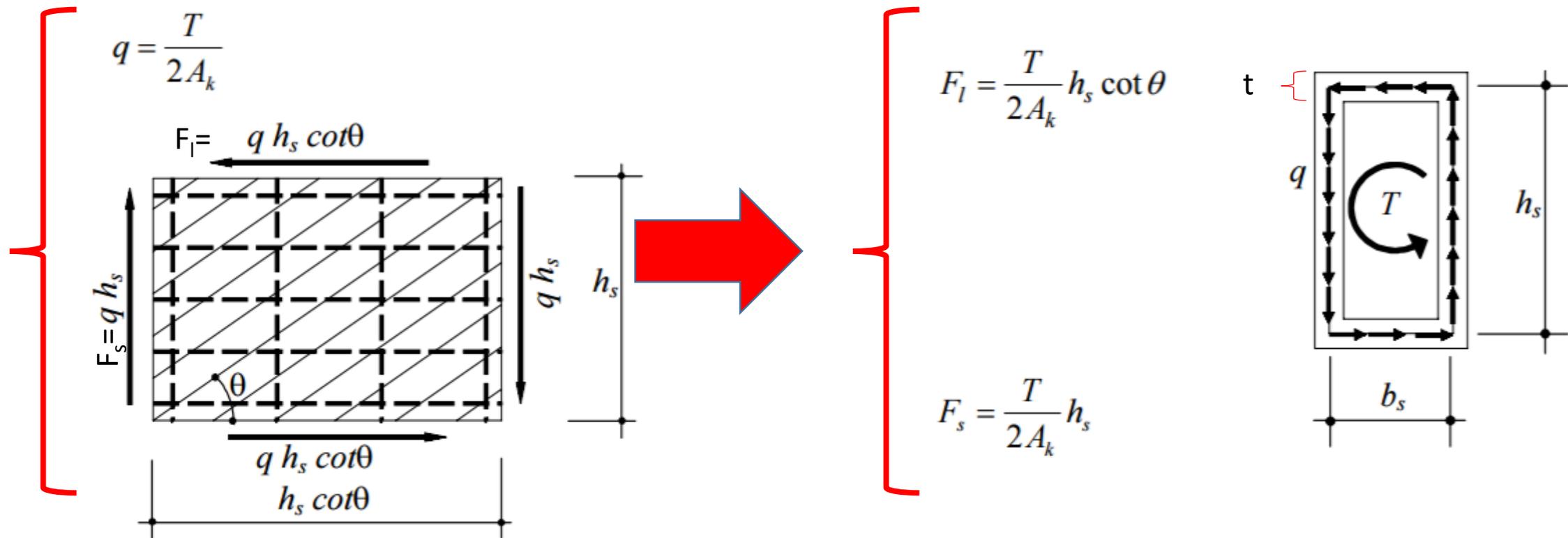
Fig. 6 – Traliccio spaziale resistente (da Hsu, 1984)

# Meccanismo Resistente a Torsione: un traliccio spaziale



# Traliccio Resistente a Torsione:

azioni sulle armature longitudinali e trasversali  
(a lato del traliccio)

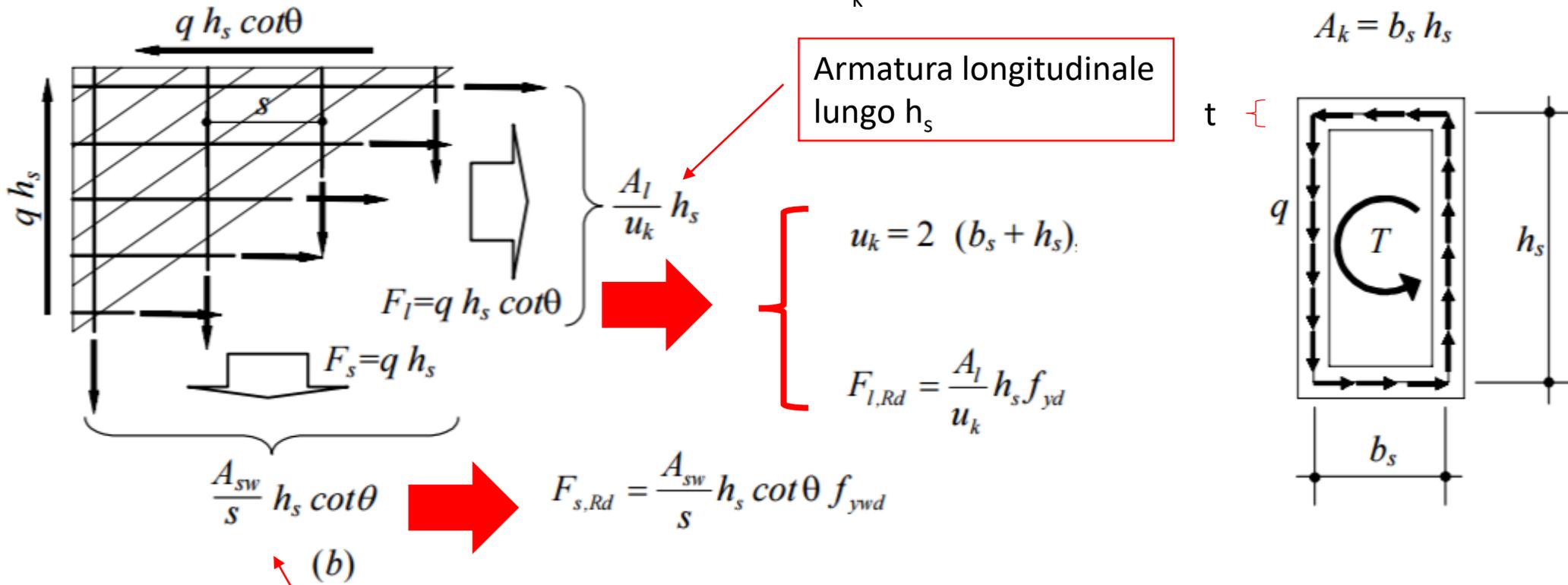


(a)

# Traliccio Resistente a Torsione:

Resistenze armature longitudinali e trasversali  
(a lato del traliccio)

$A_l$  è tutta l'armatura longitudinale (long.) resistente a torsione;  
 $A_l/u_k$  armatura long. per unità di lunghezza (totale, diviso perimetro dell'area  $A_k$ )



Armatura longitudinale lungo  $h_s$

Armatura trasversale lungo  $h_s \cot\theta$

$$u_k = 2 (b_s + h_s)$$

$$F_{l,Rd} = \frac{A_l}{u_k} h_s f_{yd}$$

$A_{sw}/s$  l'armatura trasversale sul passo delle staffe  
 $A_{sw}$  è l'area della sezione di un braccio di una staffa

# Traliccio Resistente a Torsione:

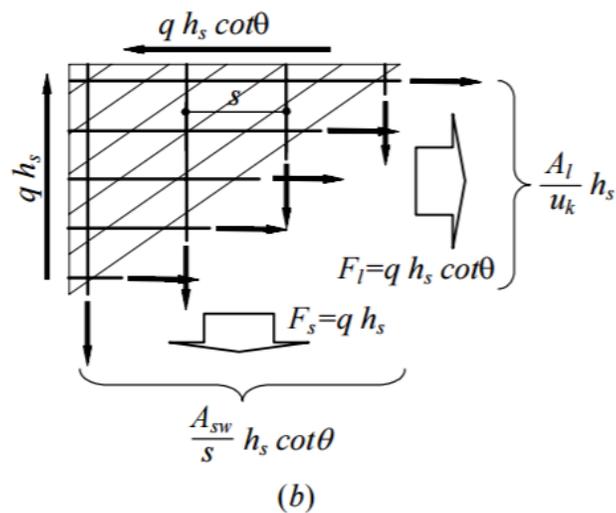
equilibrio tra Resistenze e Azioni armature longitudinali e trasversali

|   |  |   |                                       |
|---|--|---|---------------------------------------|
| } | <b>Resistenze</b>                                    | = | <b>Azioni</b>                         |
|   | $F_{s,Rd} = \frac{A_{sw}}{s} h_s \cot\theta f_{ywd}$ |   | $F_s = \frac{T}{2A_k} h_s$            |
|   | $F_{l,Rd} = \frac{A_l}{u_k} h_s f_{yd}$              | = | $F_l = \frac{T}{2A_k} h_s \cot\theta$ |

➔

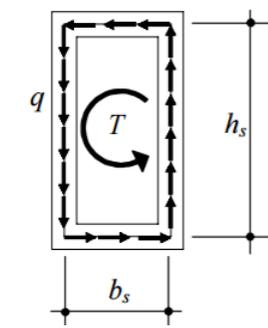
**Normativa Italiana:  
Resistenza a torsione SLU**

$$T_{Rd,s} = 2A_k \frac{A_{sw}}{s} f_{ywd} \cot\theta$$
$$T_{Rd,l} = 2A_k \frac{A_l}{u_k} f_{yd} \tan\theta$$



# Traliccio Resistente a Torsione: equilibrio tra Resistenza e Azione puntone calcestruzzo compresso

$$q = \frac{T}{2A_k}$$



Equilibrio forze

$$F_c^2 = (q \cdot h_s \cdot \cot\theta)^2 + (q \cdot h_s)^2$$

$$\cot\theta = \cos\theta / \sin\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

trigonometria

$$F_c = q \cdot h_s / \sin\theta$$

$$q = \frac{T}{2A_k}$$

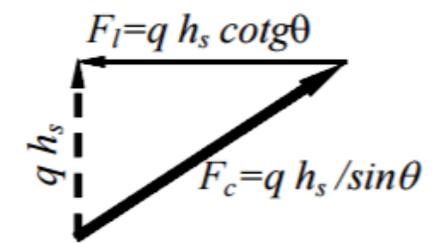
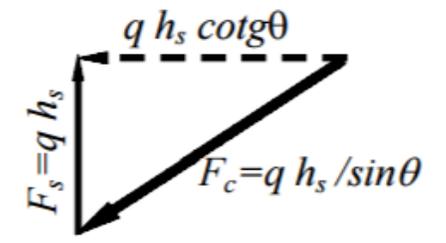
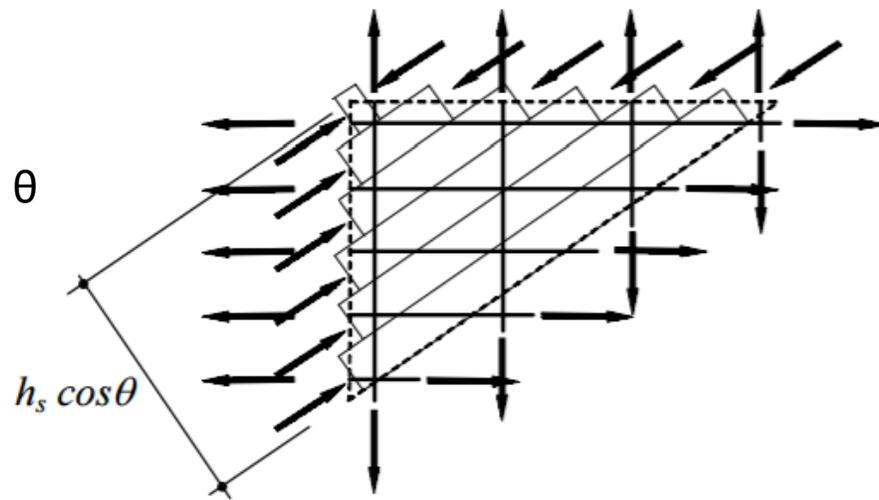


Fig. 9 – Forze di compressione agenti sugli elementi di calcestruzzo

Azione

$$F_c = \frac{T h_s}{2A_k \sin\theta}$$

=

Resistenza

$$F_{c,Rd} = t h_s \cos\theta v f_{cd}$$

$$f'_{cd} = v f_{cd}$$

Normativa Italiana:  
Resistenza a torsione SLU

$$T_{Rd,c} = 2A_k t v f_{cd} \sin\theta \cos\theta$$

# Traliccio Resistente a Torsione:

## Eurocodice EC2:

Lo spessore efficace della sezione tubolare viene assunto arbitrariamente in modo che sia soddisfatta la condizione

$$2c \leq t \leq \frac{A}{u} \quad (14)$$

dove  $A$  ed  $u$  sono l'area ed il perimetro della sezione reale e  $c$  è il ricoprimento delle armature longitudinali. La linea d'asse viene fissata a distanza  $t/2$  dal bordo della sezione e le quantità  $A_k$  e  $u_k$  sono determinate di conseguenza. Nel caso di sezioni scatolari, si può assumere lo spessore effettivo delle pareti purché sia ancora soddisfatta la (14).

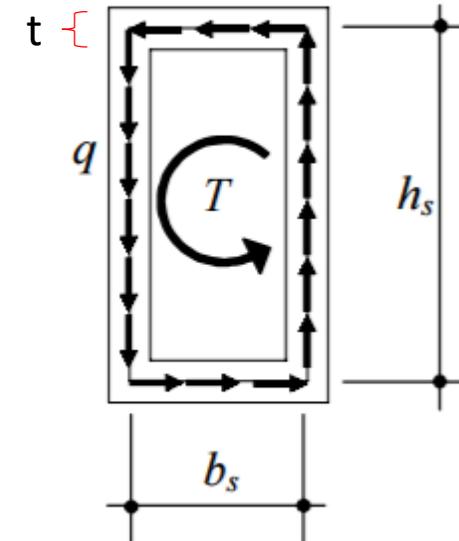
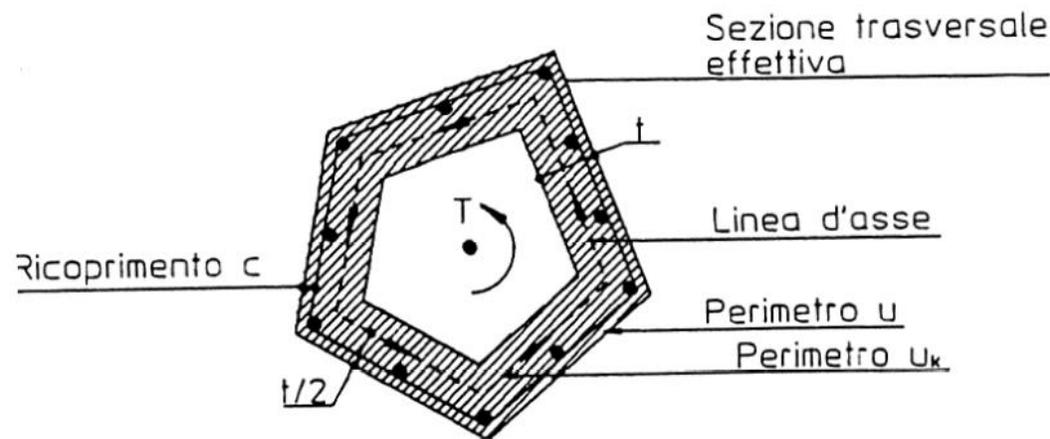


Fig. 11 – Definizione della sezione tubolare resistente secondo l'EC2

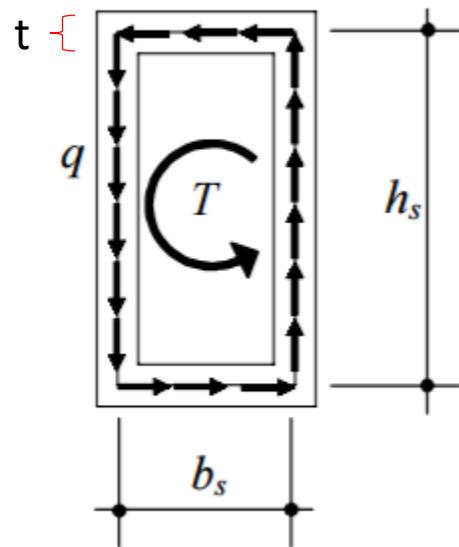
# Traliccio Resistente a Torsione:

## Normativa Italiana NTC

dove  $t$  è lo spessore della sezione cava; per sezioni piene  $t = A_c/u$  dove  $A_c$  è l'area della sezione ed  $u$  è il suo perimetro;  $t$  deve essere assunta comunque  $\geq 2$  volte la distanza fra il bordo e il centro dell'armatura longitudinale.



$c$  = ricoprimento armature + metà diametro barre longitudinali



# Traliccio Resistente a Torsione: angolo bielle

L'inclinazione  $\theta$  delle bielle compresse di calcestruzzo rispetto all'asse della trave deve rispettare i limiti seguenti

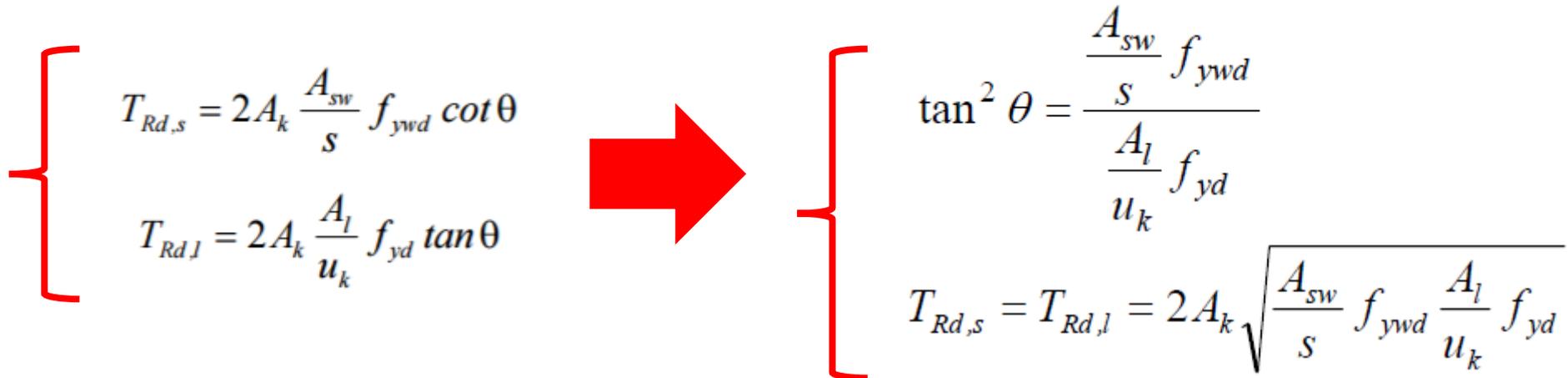
$$0,4 \leq \operatorname{ctg} \theta \leq 2,5 \quad (4.1.30)$$

Entro questi limiti, nel caso di torsione pura, può porsi  $\operatorname{ctg} \theta = (a_l/a_s)^{1/2}$

con:  $a_l = \sum A_l / u_m$

$$a_s = A_s / s$$

***Si può trovare l' Angolo delle bielle di calcestruzzo  $\vartheta$  assumendo:  
contributi resistenti a torsione armature longitudinali e trasversali uguali***


$$\left\{ \begin{array}{l} T_{Rd,s} = 2A_k \frac{A_{sw}}{s} f_{ywd} \operatorname{ctg} \theta \\ T_{Rd,l} = 2A_k \frac{A_l}{u_k} f_{yd} \tan \theta \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tan^2 \theta = \frac{\frac{A_{sw}}{s} f_{ywd}}{\frac{A_l}{u_k} f_{yd}} \\ T_{Rd,s} = T_{Rd,l} = 2A_k \sqrt{\frac{A_{sw}}{s} f_{ywd} \frac{A_l}{u_k} f_{yd}} \end{array} \right.$$

## RIFERIMENTI

Eurocodice 2: *Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings*, ENV 1992-1-1, 1992

Hsu, T.T.C., *Torsion of reinforced concrete*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1984

Migliacci, A., Mola, F., *Progetto agli stati limite delle strutture in c.a.*, Masson, Milano, 1990

Park, R., Paulay, T., *Reinforced concrete structures*, John Wiley & Sons, New York, 1975

Radogna, E.F., *Tecnica delle costruzioni - vol.2*, Zanichelli, Bologna 1998

Dispensa Graziano Leoni

Dispensa Prof. Nerio Tulli