

Con questa esercitazione si vuole analizzare il rapporto tra *centro di massa* (nel nostro caso, quello di masse omogenee, corrispondente al centro delle aree) e *centro delle rigidezze* analizzando dei telai Shear-type. In seconda battuta, ipotizzando la stratigrafia di un solaio e quindi i suoi pesi strutturali, portati e accidentali, se ne inizia a verificare la risposta alle spinte orizzontali (che siano del vento o sismiche).

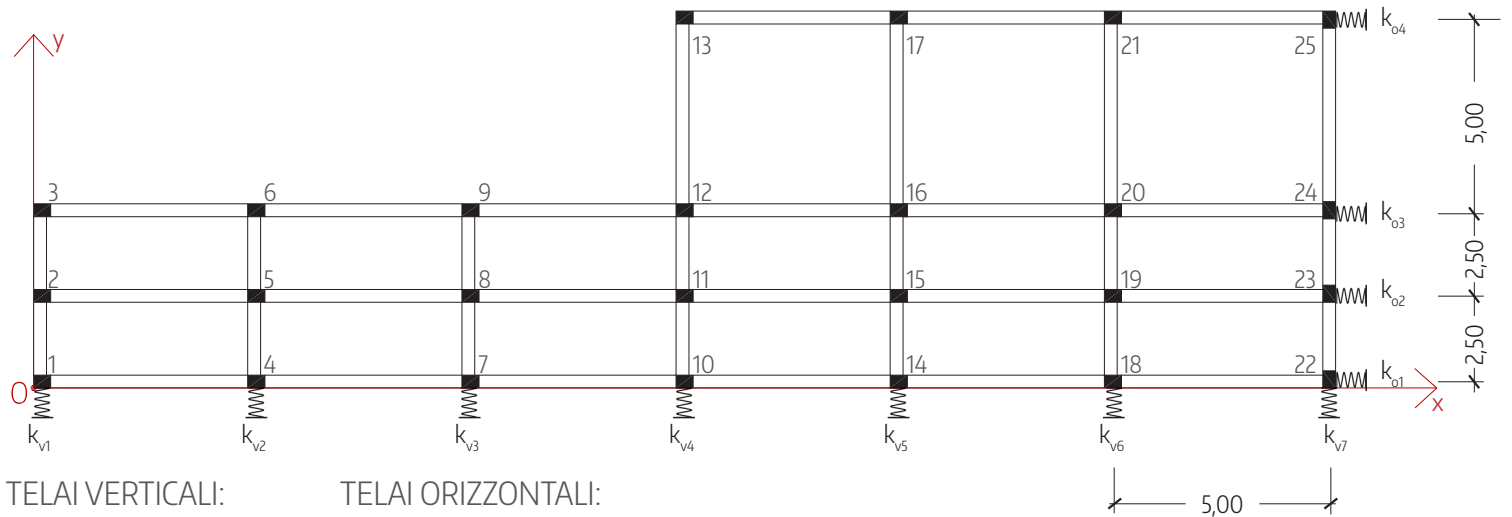
• **GEOMETRIA DELL'IMPALCATO**

L'impalcato analizzato è costituito da 12 moduli 2,5x5 m e 3 moduli 5x5 m a formare una pianta ad L. Si ottengono quindi 7 telai verticali e 4 telai orizzontali. Tutti i telai per semplificazione sono stati assimilati a dei telai Shear-type.

I controventi dei telai si immaginano approssimati con delle molle che rappresentano la rigidezza del telaio ( $k_{vi}$  per telai verticali e  $k_{oi}$  per telai orizzontali) [Fig. 1].

La struttura è immaginata in cemento armato e si è scelto di utilizzare due sezioni di pilastri: i pilastri 13-17-21-25 hanno una sezione rettangolare 30x50, mentre tutti gli altri pilastri hanno sezione 30x40. [Fig. 2]

Solo i pilastri 22-23-24-25, inoltre, sono orientati in modo da avere l'asse locale Y coincidente con l'asse globale del sistema y. Sono arrivata a queste due scelte dopo svariati tentativi di avvicinare la posizione del centro delle rigidezze a quello del centro di massa, infatti, non poteva esser cambiata poiché dipendente dalla geometria dell'impalcato che ipotizziamo di non voler modificare; ciò su cui si può lavorare è invece la posizione del centro delle rigidezze, dipendente in maniera direttamente proporzionale al momento di inerzia di ogni pilastro. Poiché sezioni rettangolari partecipano ai controventi con due rigidezze, e quindi momenti di inerzia, diverse, si è cercato di orientare i pilastri in modo da ottimizzarne o ridurne il contributo all'occorrenza.



TELAI VERTICALI:

- $T_{v1}$ : pilastri 1-2-3
- $T_{v2}$ : pilastri 4-5-6
- $T_{v3}$ : pilastri 7-8-9
- $T_{v4}$ : pilastri 10-11-12-13
- $T_{v5}$ : pilastri 14-15-16-17
- $T_{v6}$ : pilastri 18-19-20-21
- $T_{v7}$ : pilastri 22-23-24-25

TELAI ORIZZONTALI:

- $T_{o1}$ : pilastri 1-4-7-10-14-18-22
- $T_{o2}$ : pilastri 2-5-8-11-15-19-23
- $T_{o3}$ : pilastri 3-6-9-12-16-20-24
- $T_{o4}$ : pilastri 13-17-21-25

Fig. 1: geometria dell'impalcato.

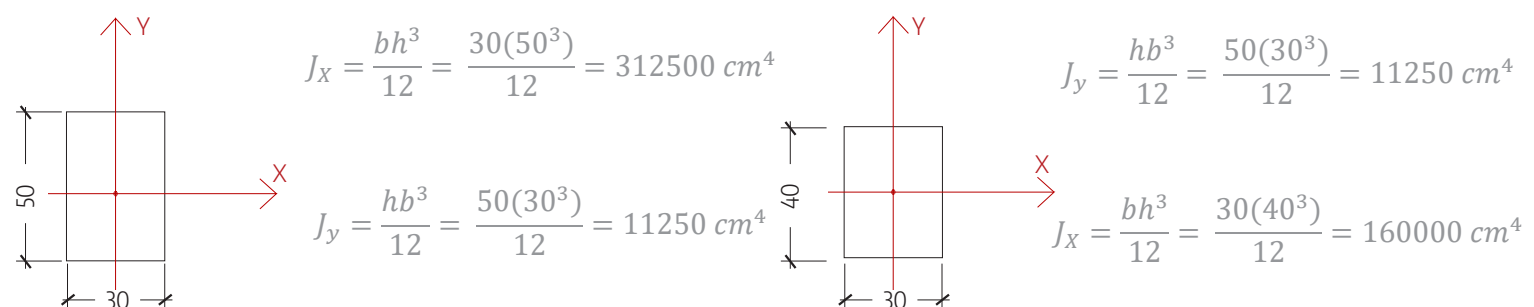


Fig. 2: sezioni dei pilastri utilizzati.

Per modellare il telaio Shear-type su **SAP 2000** ho prima di tutto assegnato sezioni diverse a pilastri e travi in modo da poter poi modificare le proprietà solamente delle travi. Tramite il **PROPERTY MODIFIERS** infatti ho aumentato il momento d'inerzia delle travi attorno all'asse 3 in modo da simulare una rigidezza flessionale infinita. [Fig. 3]

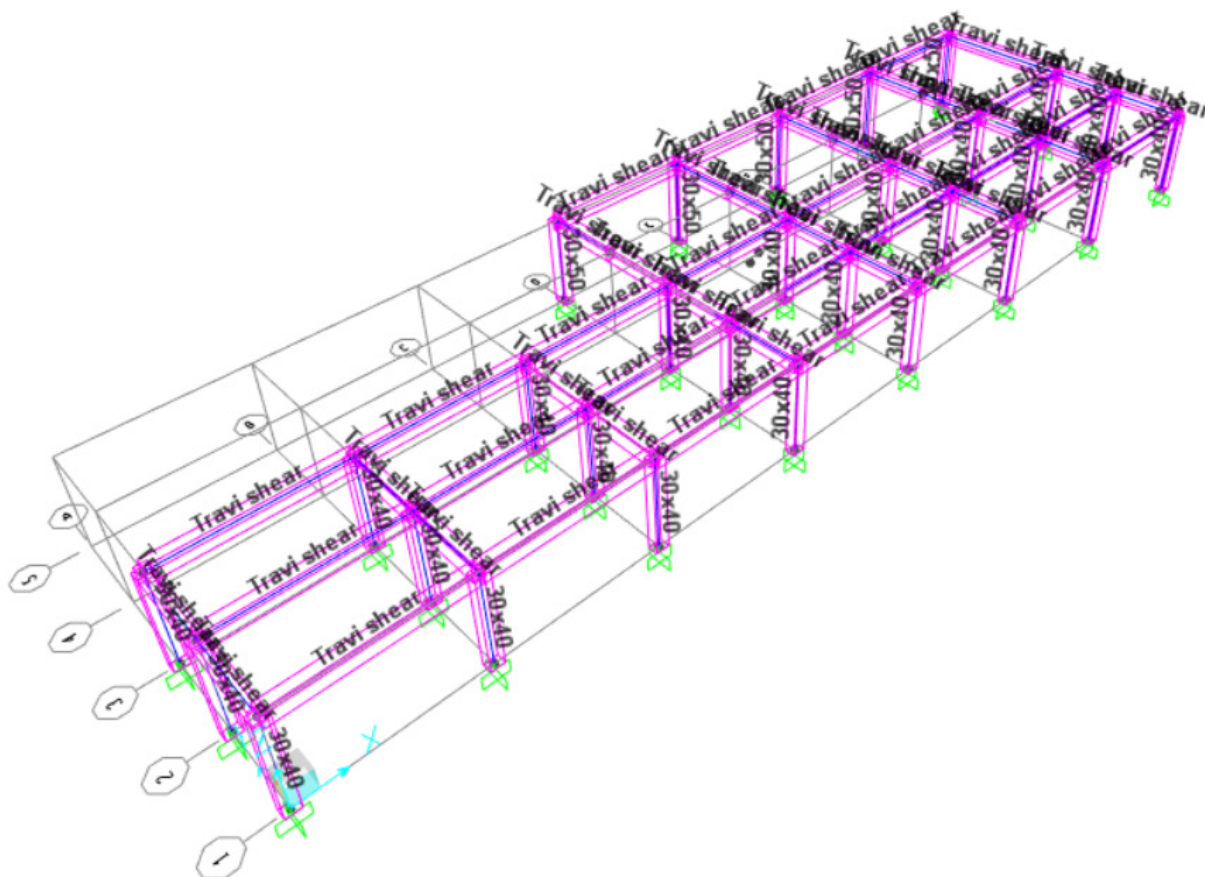


Fig. 3: modellazione dell'impalcato su SAP2000.

• **STEP 1: calcolo delle rigidezze traslanti dei controventi dell'edificio.** [Tab. 1a e Tab. 1b]

Inizialmente quindi è stata calcolata la rigidezza traslante di ogni telaio sia orizzontale che verticale, e trattandosi di telai Shear-type questa sarà direttamente proporzionale al modulo elastico del materiale e alla somma dei momenti di inerzia con cui i pilastri di quel telaio partecipano, mentre sarà inversamente proporzionale al cubo dell'altezza del telaio ( $k_i = 12EJ / h^3$ ). Da qui risulta evidente che per lavorare sulla rigidezza si può o intervenire sul materiale (E), o sulla sezione e orientamento dei pilastri (J), o ancor meglio, se possibile è conveniente modificare l'altezza dei pilastri, poiché essendo un valore al cubo farà decrescere/aumentare molto velocemente il valore della rigidezza.

Telaio 1v	1-2-3	pilastri che individuano il telaio
E (N/mm <sup>2</sup> )	25000,00	modulo di Young
H (m)	3,00	altezza dei pilastri
Iy_1 (cm <sup>4</sup> )	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 1
Iy_2	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 2
Iy_3	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 3
<b>K_T_v1 (KN/m)</b>	<b>30000,00</b>	<b>rigidezza traslante telaio 1v</b>

Telaio 2v	4-5-6	pilastri che individuano il telaio
E	25000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
Iy_4	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 4
Iy_5	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 5
Iy_6	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 6
<b>K_T_v2</b>	<b>30000,00</b>	<b>rigidezza traslante telaio 2v</b>

Telaio 3v	7-8-9	pilastri che individuano il telaio
E	25000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
Iy_7	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 7
Iy_8	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 8
Iy_9	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 9
<b>K_T_v3</b>	<b>30000,00</b>	<b>rigidezza traslante telaio 3v</b>

Telaio 4v	10-11-12-13	pilastri che individuano il telaio
E	25000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
Iy_10	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 10
Iy_11	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 11
Iy_12	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 12
Iy_13	112500,00	momento d'inerzia y pilastro 13
<b>K_T_v4</b>	<b>42500,00</b>	<b>rigidezza traslante telaio 4v</b>

Telaio 5v	14-15-16-17	pilastri che individuano il telaio
E	25000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
Iy_14	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 14
Iy_15	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 15
Iy_16	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 16
Iy_17	112500,00	momento d'inerzia y pilastro 17
<b>K_T_v5</b>	<b>42500,00</b>	<b>rigidezza traslante telaio 5v</b>

Telaio 6v	18-19-20-21	pilastri che individuano il telaio
E	25000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
Iy_18	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 18
Iy_19	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 19
Iy_20	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 20
Iy_21	112500,00	momento d'inerzia y pilastro 21
<b>K_T_v6</b>	<b>42500,00</b>	<b>rigidezza traslante telaio 6v</b>

Telaio 7v	22-23-24-25	pilastri che individuano il telaio
E	25000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
Ix_22	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 22
Ix_23	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 23
Ix_24	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 24
Ix_25	312500,00	momento d'inerzia x pilastro 25
<b>K_T_v7</b>	<b>88055,56</b>	<b>rigidezza traslante telaio 7v</b>

Tab. 1a: rigidezza traslante telai verticali.

Telaio 1o	1-4-7-10-14-18-22	pilastri che individuano il telaio
E	25000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
lx_1	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 1
lx_4	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 4
lx_7	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 7
lx_10	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 10
lx_14	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 14
lx_18	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 18
ly_22	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 22
K_T_o1	116666,67	rigidezza traslante telaio 1o

Telaio 2o	2-5-8-11-15-19-23	pilastri che individuano il telaio
E	25000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
lx_2	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 2
lx_5	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 5
lx_8	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 8
lx_11	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 11
lx_15	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 15
lx_19	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 19
ly_23	90000,00	momento d'inerzia y pilastro 23
K_T_o2	116666,67	rigidezza traslante telaio 2o

Telaio 3o	3-6-9-12-16-20-24	pilastri che individuano il telaio
E	25000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
lx_3	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 3
lx_6	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 6
lx_9	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 9
lx_12	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 12
lx_16	160000,00	momento d'inerzia x pilastro 16

Tab. 1b: rigidezza traslante telai orizzontali .

• **STEP 2: tabella sinottica controventi e distanze.** [Tab. 2]

In questa tabella sono stati riassunti i risultati ottenuti dalla precedente e introdotti dei nuovi valori  $d_{vi}$  e  $d_{oi}$  che rappresentano la distanza di ogni telaio dall'origine del sistema. (Per evitare di ottenere valori negativi l'origine O del sistema è stato posto nel punto più in basso a sinistra).

Questa tabella tornerà utile nel calcolo del *centro delle rigidezze*, infatti essendo questo il centro di vettori paralleli le sue coordinate saranno direttamente proporzionale alla somma dei momenti statici delle molle (quindi a una rigidezza per una distanza) e inversamente proporzionale alla rigidezza traslante totale dei telai [Formula 1].

$$X_C = \frac{\sum S_{kvi}}{k_{vtot}} \quad Y_C = \frac{\sum S_{koi}}{k_{otot}}$$

Formula 1.: coordinate del centro delle rigidezze.

K_T_v1(KN/m)	30000,00	rigidezza traslante contr.vert.1
K_T_v2	30000,00	rigidezza traslante contr.vert.2
K_T_v3	30000,00	rigidezza traslante contr.vert.3
K_T_v4	42500,00	rigidezza traslante contr.vert.4
K_T_v5	42500,00	rigidezza traslante contr.vert.5
K_T_v6	42500,00	rigidezza traslante contr.vert.6
K_T_v7	88055,56	rigidezza traslante contr.vert.7
dv2 (m)	5,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv3	10,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv4	15,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv5	20,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv6	25,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv7	30,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
Ko1(KN/m)	116666,67	rigidezza traslante contr.orizz.1
K_T_o2	116666,67	rigidezza traslante contr.orizz.2
K_T_o3	116666,67	rigidezza traslante contr.orizz.3
K_T_o4	12500,00	rigidezza traslante contr.orizz.4
do2	2,50	distanza verticale controvento punto O
do3	5,00	distanza verticale controvento punto O
do4	10,00	distanza verticale controvento punto O

Tab. 2: riassunto delle rigidezze traslanti dei telai e distanze rispetto all'origine del sistema.

• **STEP 3: calcolo del centro di massa.** [Tab. 3]

Per determinare analiticamente il centro delle aree (G) si ragiona come nel caso precedente: devo trovare il *centro di vettori paralleli*, quindi so che sarà direttamente proporzionale alla somma del prodotto di un'area per una distanza, e inversamente proporzionale alla somma delle aree [Formola 2]. Le aree in questione sono quelle dei due rettangoli in cui posso dividere il mio solaio (A<sub>1</sub> e A<sub>2</sub>), mentre le distanze considerate rappresentano la distanza tra il centro geometrico di ciascuna area e l'origine del sistema, una volta per le ordinate e l'altra per le ascisse [Fig. 4].

$$X_G = \frac{\sum A_i X_{G_i}}{A_{tot}} \quad Y_G = \frac{\sum A_i Y_{G_i}}{A_{tot}}$$

Formola 2: coordinate del centro di massa.

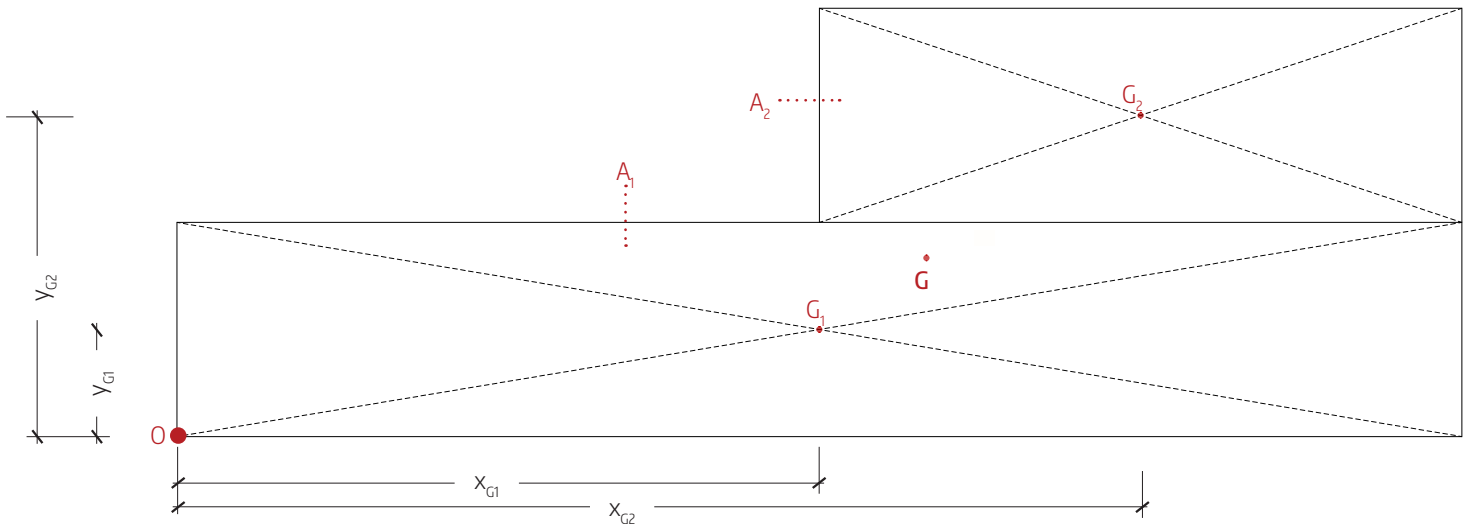


Fig. 4: determinazione del centro di massa G.

area_1 (mq)	150,00	misura dell'area superficie area 1 (misura)
x_G1 (m)	15,00	coordinata X centro area 1
y_G1	2,50	coordinata Y centro area 1
area_2	75,00	misura dell'area superficie 2
x_G2	22,50	coordinata X centro area 2
y_G2	7,50	coordinata Y centro area 2
Area tot (mq)	225,00	Area totale impalcato
<b>X_G</b>	17,50	coordinata X centro d'area impalcato (centro massa)
<b>Y_G</b>	4,17	coordinata Y centro d'area impalcato (centro massa)

Tab. 2: coordinate del centro di massa.

• **STEP 4: calcolo del centro di rigidezze e delle rigidezze globali.** [Tab. 4]

A questo punto riprendendo la tabella 2 è possibile ottenere le coordinate del centro delle rigidezze C.

Poiché il centro delle rigezze e il centro d'area seppur vicini non coincidono perfettamente, se sottoposto a una forza orizzontale l'impalcato tenderà a ruotare poiché la forza agente sul centro di massa avrà un braccio rispetto al centro di rigidezze che genererà un momento.

Per questo si parla di *rotazione rigida di impalcato* nel cui calcolo interviene la *rigidezze torsionale*, ovvero la somma dei singoli momenti d'inerzia delle rigidezze, direttamente proporzionale alla rigidezze e al quadrato della distanza del controvento dal centro delle rigidezze. [Formola 2]

$$k_\varphi = \sum k_i d_{C_i}^2$$

k<sub>i</sub>: rigidezze traslante dell'i-esimo telaio

d<sub>Ci</sub>: distanza dell'i-esimo telaio dal centro di rigidezze

Formola 3: rigidezze torsionale totale.

E' possibile ora posizionare il centro di massa e il centro delle rigidezze, facendo agire la forza nel centro di massa G, ai fini dell'esercitazione.

Per impostare la condizione di impalcato rigido su **SAP2000** è necessario applicare un vincolo interno, il DIAPHRAM, che serve ad imporre una rotazione uguale attorno ad un asse (nel nostro caso l'asse verticale 3). [Fig. 5]

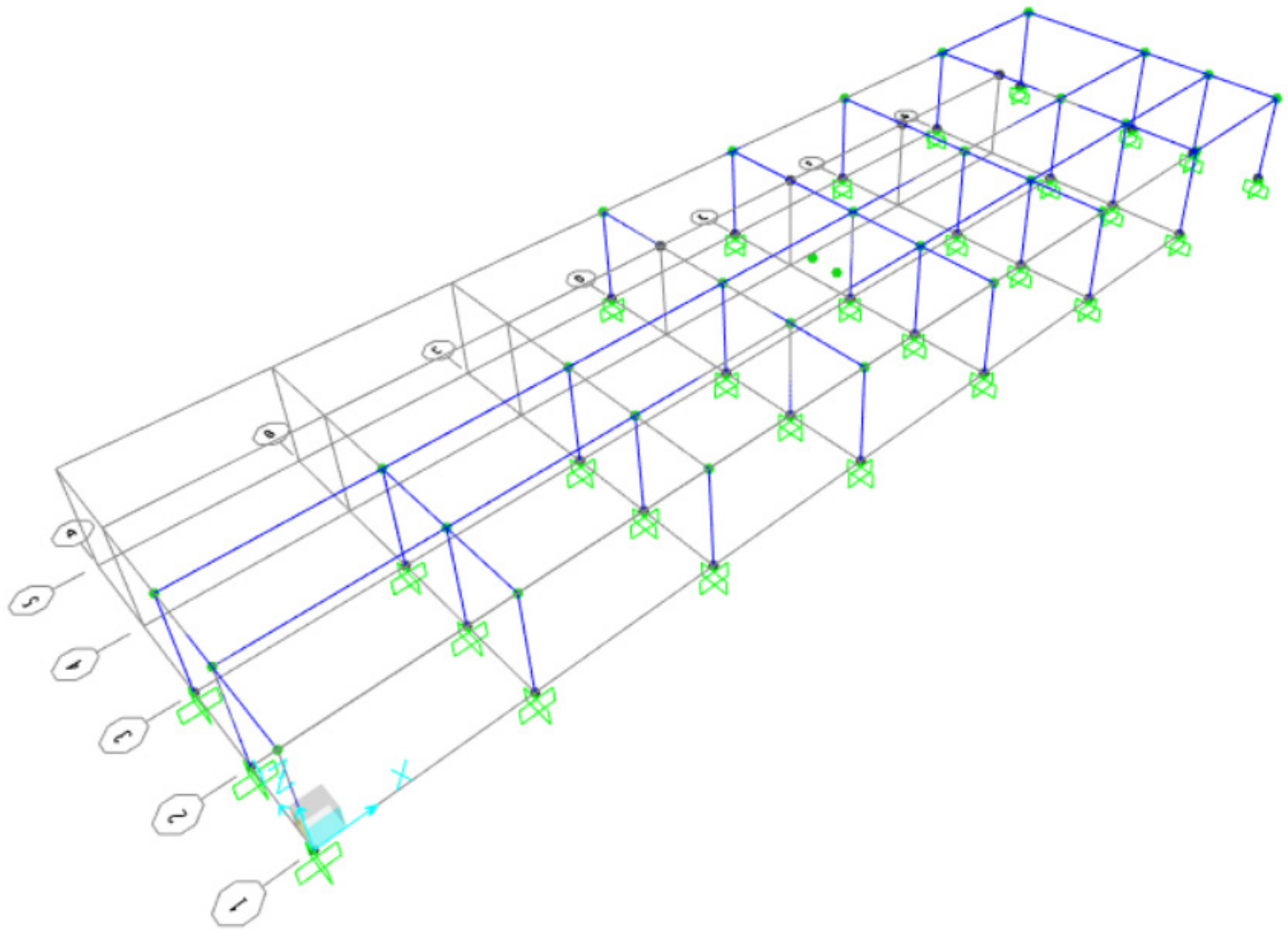


Fig. 5: SAP2000: attribuzione del Diaphragm a tutti i punti dei telai (compresi centro di massa e centro di rigidezze).

Ko_tot	362500,00	rigidezza totale orizzontale
Kv_tot	312222,2400	rigidezza totale verticale
X_C (m)	18,07	coordinata X centro rigidezze
Y_C	2,76	coordinata Y centro rigidezze

dd_v1	-18,07	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v2	-13,07	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v3	-8,07	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v4	-3,07	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v5	1,93	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v6	6,93	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v7	11,93	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o1	-2,76	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o2	-0,26	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o3	2,24	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o4	7,24	distanze controvento dal centro rigidezze
K_φ (KN*m)	34144022,42	rigidezza torsionale totale

Tab. 4: determinazione delle coordinate del centro di rigidezze e della rigidezza torsionale totale.

• **STEP 5: analisi dei carichi sismici.** [Tab. 5]

E' possibile abbozzare una stima approssimata della forza sismica agente sull'impalcato. Per far ciò è stata ipotizzata la stratigrafia di un solaio in laterocemento [Fig. 6] del quale sono stati calcolati i carichi permanenti strutturali e il sovraccarico permanente per ottenere il *carico totale permanente G*, mentre, ipotizzando una destinazione d'uso abitativa, dalla normativa NTC2008 ("Norme tecniche per le costruzioni" D.M. 14 Gennaio 2008) è stato ottenuto un sovraccarico accidentale di 2 kN/mq che moltiplicato per l'area dell'impalcato ha dato il *carico totale accidentale Q*. [Formola 4] La somma dei due valori dà il valore del *peso sismico W*, tenendo conto di un coefficiente di contemporaneità che riduce del 20% il carico accidentale che probabilmente non sarà mai presente in maniera omogenea su tutta l'area al momento del sisma. [Formola 5]

La *forza sismica W* sarà proprio pari al valore del peso sismico ridotta di un coefficiente *c* a seconda della zona sismica in cui ci troviamo. [Formola 6]

$$G = (q_p + q_s)A_{tot} \quad Q = q_a A_{tot}$$

$$W = G + (Q\psi)$$

$$F = Wc$$

Formola 4: carico totale permanente strutturale G e accidentale Q.

Formola 5: peso sismico W.

Formola 6: forza sismica F.

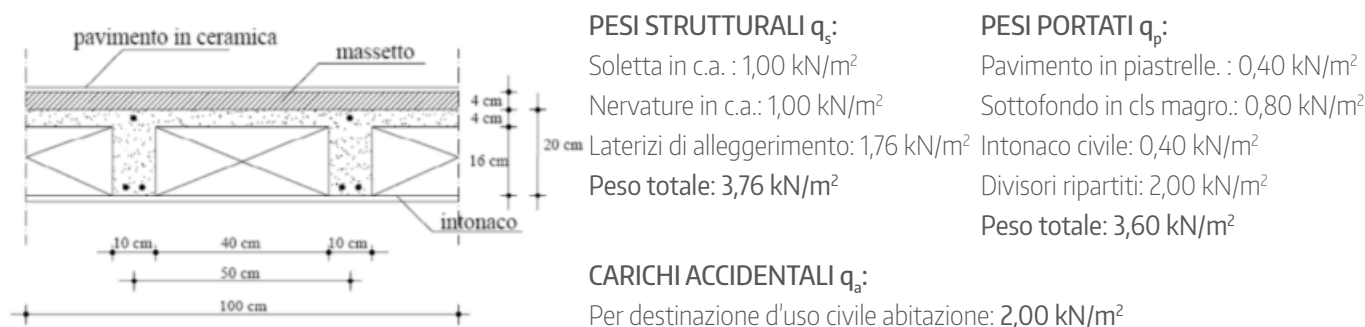


Fig. 6: stratigrafia e pesi del solaio tipo utilizzato per i calcoli.

$q_s$ (KN/mq)	3,76	carico permanente di natura strutturale
$q_p$	3,60	sovraccarico permanente
$q_a$	2,00	sovraccarico accidentale
G (KN)	1656,00	carico totale permanente
Q (KN)	450,00	carico totale accidentale
$\psi$	0,80	coefficiente di contemporaneità
W (KN)	2016,00	Pesi sismici
c	0,10	coefficiente di intensità sismica
F (KN)	201,60	Forza sismica orizzontale

Tab. 5: determinazione dell'ipotetica forza sismica orizzontale agente sull'impalcato.

• **STEP 6 e 7: ripartizione forza sismica lungo x e y.** [Tab. 6 e 7]

Non potendo prevedere con certezza la direzione della forza sismica, è bene studiare il comportamento dell'impalcato supponendo prima che questa forza arrivi in direzione orizzontale e verificando come reagirebbero i controventi in questa ipotesi, e poi fare lo stesso per la direzione verticale.

Poiché in questo caso il centro di massa e quello delle rigidzze non coincidono la struttura subirà sia una traslazione (direttamente proporzionale alla forza sismica e inversamente proporzionale alla somma delle rigidzze totali orizzontali/verticali) che una rotazione (direttamente proporzionale al momento torcente M e inversamente proporzionale alla rigidzza torsionale).

Lanciando l'analisi su **SAP2000** e tenendo conto solo della forza sismica applicata nel centro di massa (prima lungo x e poi, rilanciando l'analisi, lungo y [Fig. 7 e 8]) è evidente come la struttura reagirà meglio rispetto alla forza orizzontale; in questo caso, infatti, la rotazione è infinitesimale e l'impalcato è soggetto quasi a traslazione pura, questo poiché l'ordinata del centro delle rigidzze è molto vicina a quella del centro di massa, e quindi il braccio che si crea tra i due è piuttosto piccolo. In questo caso, quindi, la forza si ripartisce soprattutto tra i controventi orizzontali, mentre i verticali, come emerge dalla tabella precedente, contribuiscono molto poco.

M (KN*m)	283,86	momento torcente (positivo se antiorario)
u_o (m)	0,001	traslazione orizzontale
$\phi$	0,00001	rotazione impalcato (positiva se antioraria)
Fv1 (KN)	-4,51	Forza sul controvento verticale 1
Fv2	-3,26	Forza sul controvento verticale 2
Fv3	-2,01	Forza sul controvento verticale 3
Fv4	-1,08	Forza sul controvento verticale 4
Fv5	0,682142746	Forza sul controvento verticale 5
Fv6	2,44879721	Forza sul controvento verticale 6
Fv7	8,733975039	Forza sul controvento verticale 7
Fo1	62,21	Forza sul controvento orizzontale 1
Fo2	64,63	Forza sul controvento orizzontale 2
Fo3	67,06	Forza sul controvento orizzontale 3
Fo4	7,704254437	Forza sul controvento orizzontale 4

202,60

64,88
64,88
64,88
6,95

201,60

Tab. 6: Ripartizione forza sismica lungo x

M (KN*M)	114,79	momento torcente
v_o (KN)	0,001	traslazione verticale
$\phi$	0,00000	rotazione impalcato
Fv1 (KN)	17,55	Forza sul controvento verticale 1
Fv2	18,05	Forza sul controvento verticale 2
Fv3	18,56	Forza sul controvento verticale 3
Fv4	27,00	Forza sul controvento verticale 4
Fv5	27,72	Forza sul controvento verticale 5
Fv6	28,43225047	Forza sul controvento verticale 6
Fv7	60,38883293	Forza sul controvento verticale 7
Fo1	-1,08	Forza sul controvento orizzontale 1
Fo2	-0,10	Forza sul controvento orizzontale 2
Fo3	0,88	Forza sul controvento orizzontale 3
Fo4	0,30	Forza sul controvento orizzontale 4

197,70

19,37
19,37
19,37
27,44
27,44
27,44
56,86

197,30

Tab. 7: Ripartizione forza sismica lungo y

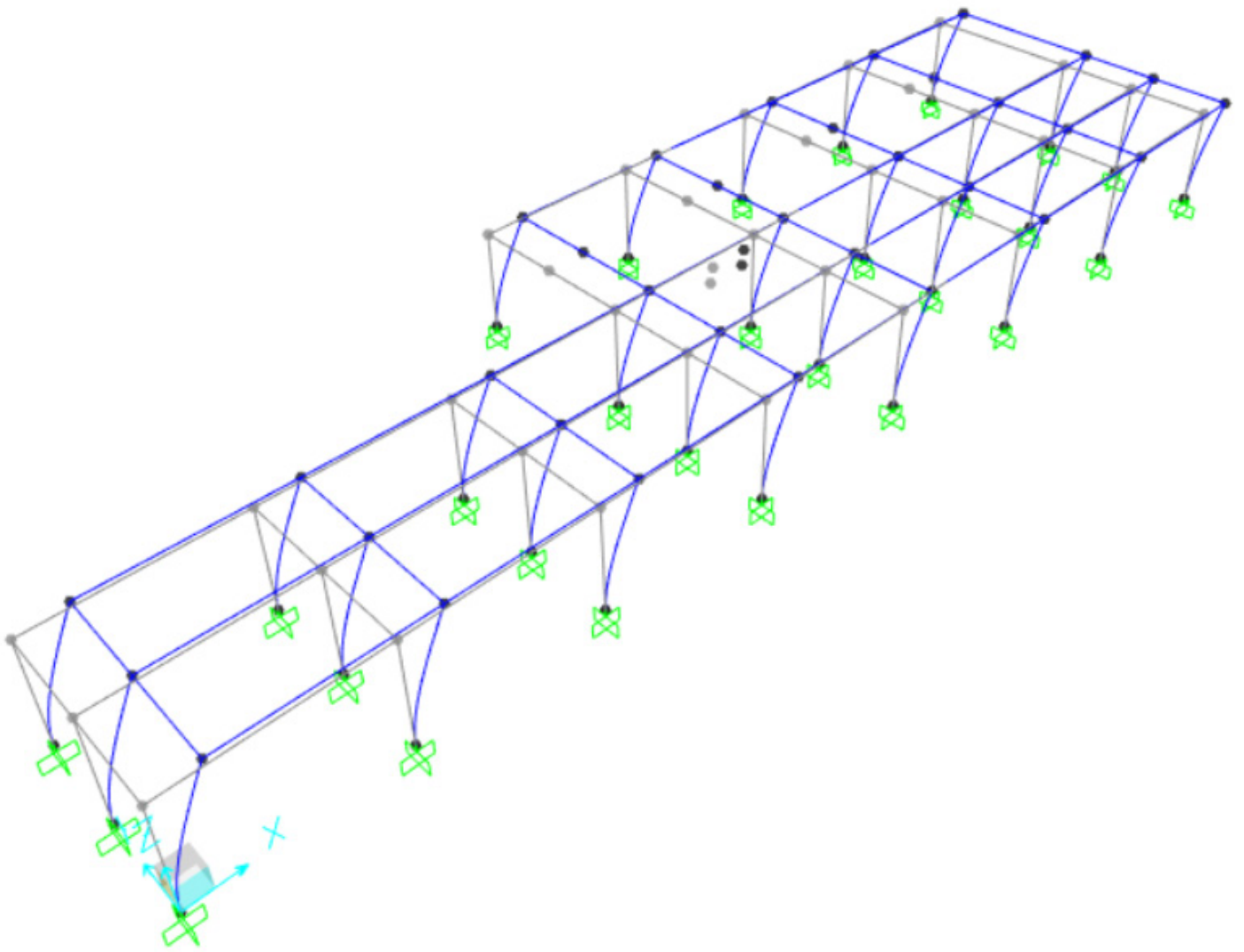
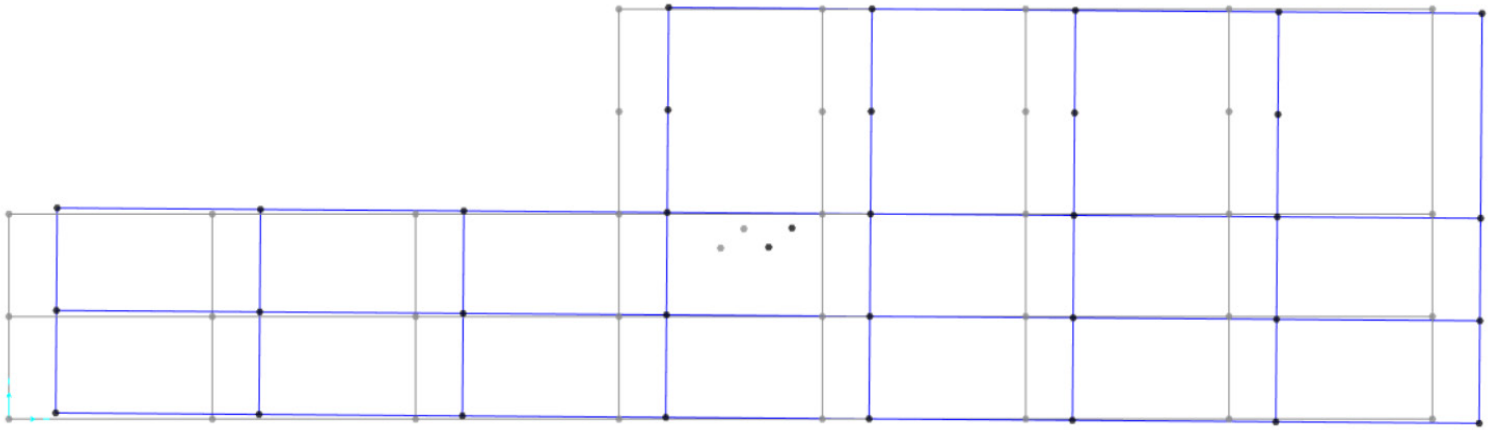


Fig. 7: deformazioni della struttura sottoposta a forza orizzontale agente nel centro di massa.



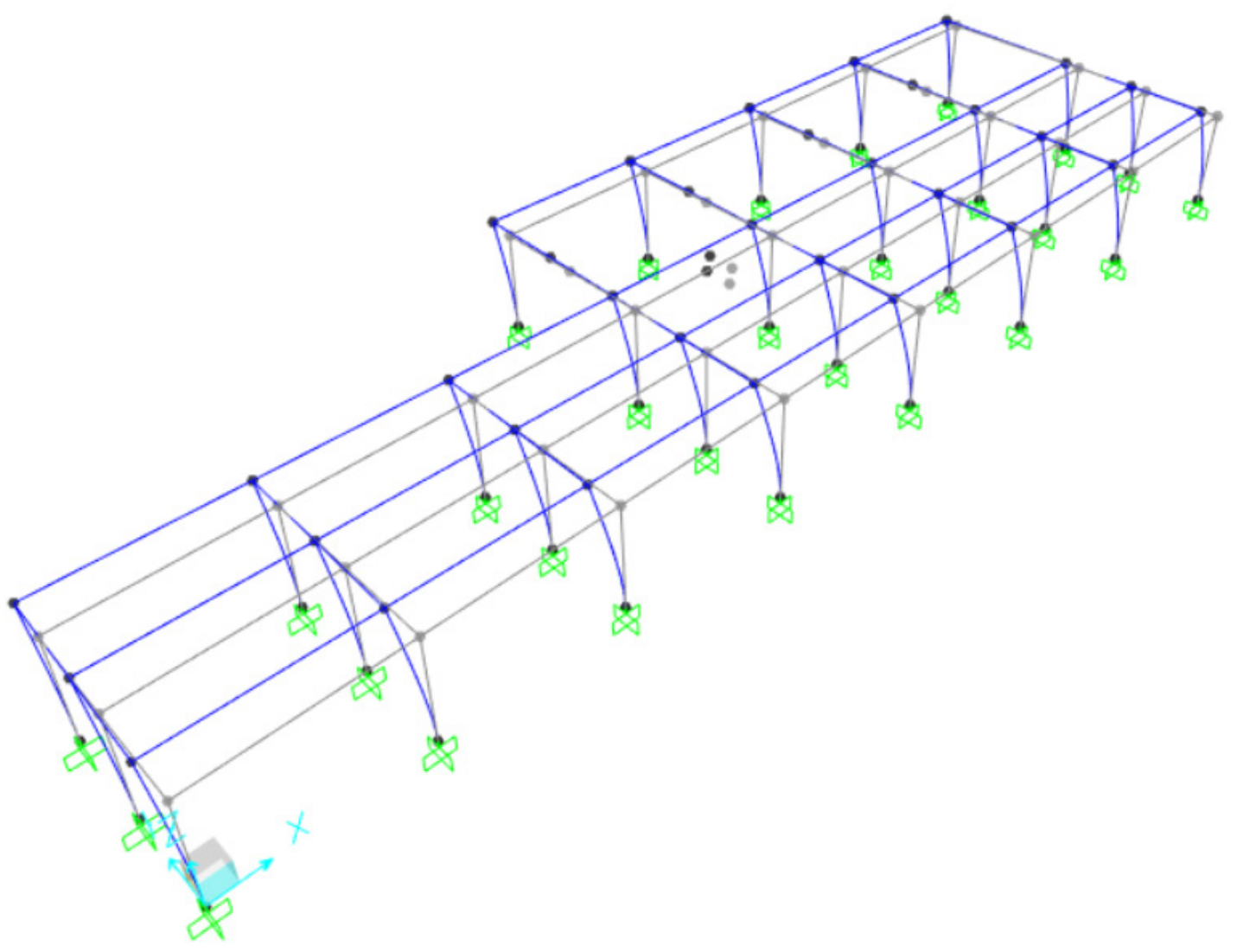
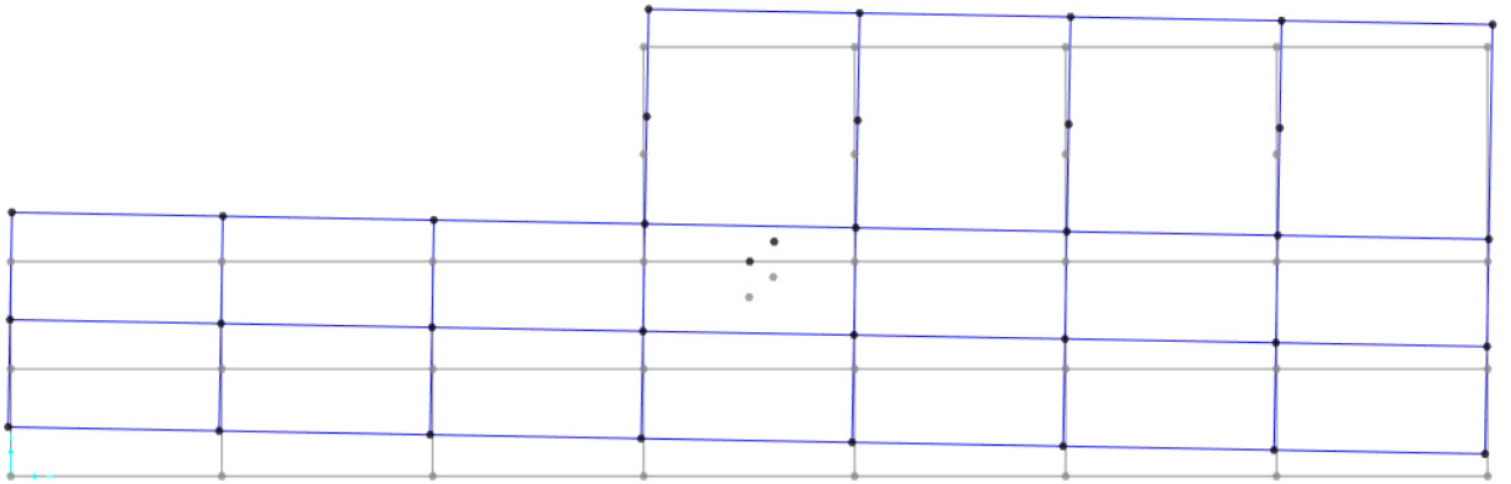


Fig. 8: deformazioni della struttura sottoposta a forza verticale agente nel centro di massa.