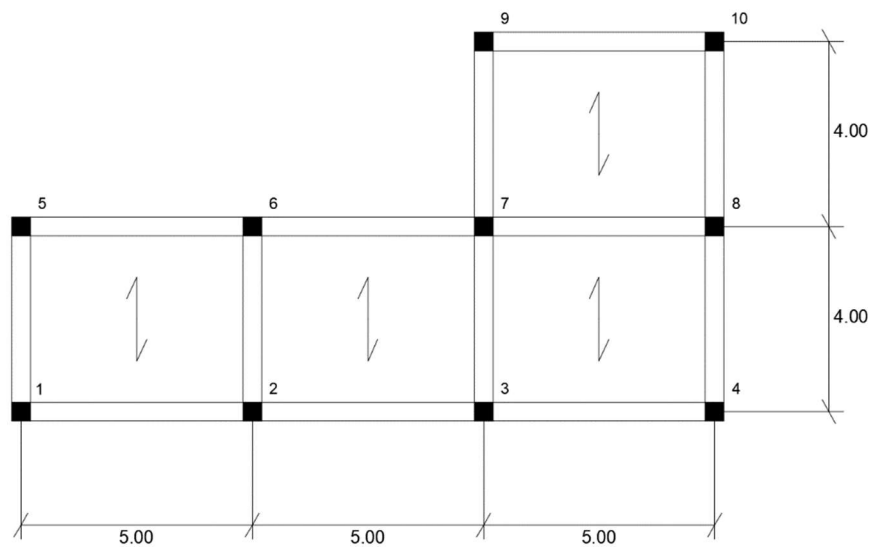


Esercitazione 2: Centro delle rigidzze e ripartizione delle forze sismiche

Nella seconda esercitazione studiamo, utilizzando il metodo delle rigidzze, come una forza orizzontale generica, ad esempio il vento o un sisma, si distribuisce sui telai costitutivi di una struttura.

Prendiamo in considerazione un edificio di un piano con struttura in cemento armato, avente telai di tipo *Shear-Type*, ovvero telai costituiti da travi con rigidità assiale infinita.

I pilastri hanno una sezione di 40x40 [cm] e un'altezza di 3,5 metri.



La struttura è composta da 7 telai (verticali e orizzontali)

Telaio 1v: pilastri 1-5

Telaio 2v: pilastri 2-6

Telaio 3v: pilastri 3-7-9

Telaio 4v: pilastri 4-8-10

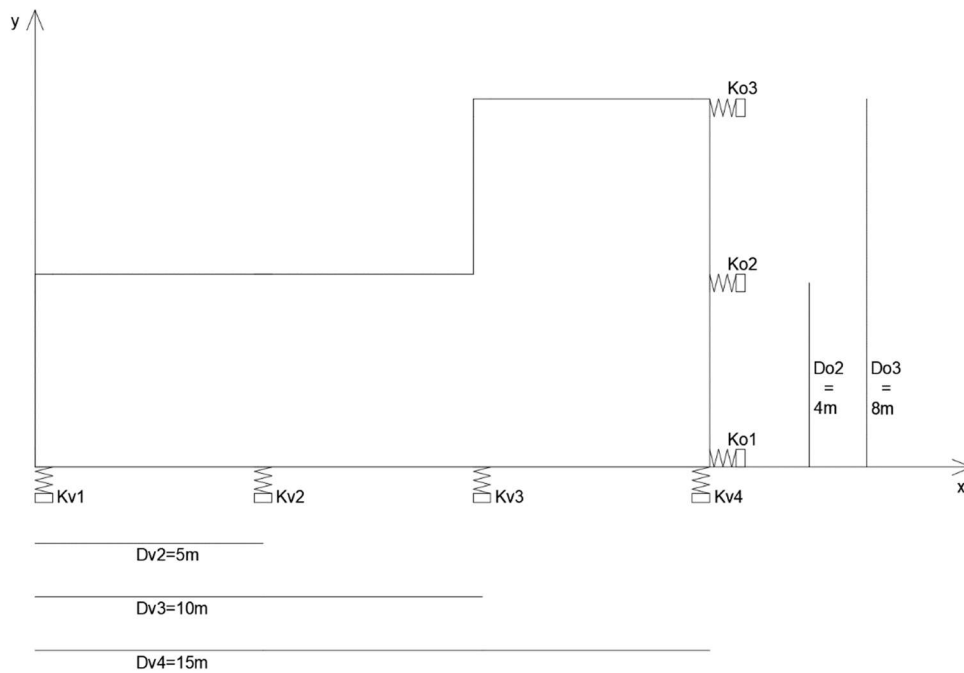
Telaio 1o: pilastri 1-2-3-4

Telaio 2o: pilastri 5-6-7-8

Telaio 3o: pilastri 9-10

I pilastri hanno sezione quadrata, quindi l'inerzia sui due assi è la stessa:

$$I_x = I_y = (bh^3)/12 = (40 \cdot 40^3)/12 = 213333,33 \text{ cm}^4$$



I controventi, nel piano dell'impalcato, sono assimilabili a delle molle. Conoscendo l'altezza dei pilastri, la loro inerzia e il modulo elastico del calcestruzzo (21000 Mpa) possiamo calcolare, utilizzando un foglio di calcolo, le **rigidezze traslanti K_T** proprie dei vari controventi dell'edificio:

Telaio 1v	1-5	pilastri che individuano il telaio	Telaio 1o	1-2-3-4	pilastri che individuano il telaio
E (N/mmq)	21000,00	modulo di Young	E	21000,00	modulo di Young
H (m)	3,50	altezza dei pilastri	H	3,50	altezza dei pilastri
I ₁ (cm ⁴)	213333,33	momento d'inerzia pilastro 1	I ₁	213333,33	momento d'inerzia pilastro 1
I ₂	213333,33	momento d'inerzia pilastro 2	I ₂	213333,33	momento d'inerzia pilastro 2
I ₃	0,00	momento d'inerzia pilastro 3	I ₃	213333,33	momento d'inerzia pilastro 3
I ₄	0,00	momento d'inerzia pilastro 4	I ₄	213333,33	momento d'inerzia pilastro 4
K_T (KN/m)	25077,55	rigidezza traslante telaio 1	K_T	50155,10	rigidezza traslante telaio 5
Telaio 2v	2-6	pilastri che individuano il telaio	Telaio 2o	5-6-7-8	pilastri che individuano il telaio
E	21000,00	modulo di Young	E	21000,00	modulo di Young
H	3,50	altezza dei pilastri	H	3,50	altezza dei pilastri
I ₁	213333,33	momento d'inerzia pilastro 1	I ₁	213333,33	momento d'inerzia pilastro 1
I ₂	213333,33	momento d'inerzia pilastro 2	I ₂	213333,33	momento d'inerzia pilastro 2
I ₃	0,00	momento d'inerzia pilastro 3	I ₃	213333,33	momento d'inerzia pilastro 3
I ₄	0,00	momento d'inerzia pilastro 4	I ₄	213333,33	momento d'inerzia pilastro 4
K_T	25077,55	rigidezza traslante telaio 2	K_T	50155,10	rigidezza traslante telaio 6
Telaio 3v	3-7-9	pilastri che individuano il telaio	Telaio 3o	9-10	pilastri che individuano il telaio
E	21000,00	modulo di Young	E	21000,00	modulo di Young
H	3,50	altezza dei pilastri	H	3,50	altezza dei pilastri
I ₁	213333,33	momento d'inerzia pilastro 1	I ₁	213333,33	momento d'inerzia pilastro 1
I ₂	213333,33	momento d'inerzia pilastro 2	I ₂	213333,33	momento d'inerzia pilastro 2
I ₃	213333,33	momento d'inerzia pilastro 3	I ₃	0,00	momento d'inerzia pilastro 3
I ₄	0,00	momento d'inerzia pilastro 4	I ₄	0,00	momento d'inerzia pilastro 4
K_T	37616,33	rigidezza traslante telaio 3	K_T	25077,55	rigidezza traslante telaio 7
Telaio 4v	4-8-10	pilastri che individuano il telaio			
E	21000,00	modulo di Young			
H	3,50	altezza dei pilastri			
I ₁	213333,33	momento d'inerzia pilastro 1			
I ₂	213333,33	momento d'inerzia pilastro 2			
I ₃	213333,33	momento d'inerzia pilastro 3			
I ₄	0,00	momento d'inerzia pilastro 4			
K_T	37616,33	rigidezza traslante telaio 4			

La **rigidezza traslante** di un controvento si calcola tramite la seguente formula:

$$k = \frac{12E}{h^3} \sum_{i=1}^n I_i$$

Step 2: tabella sinottica controventi e distanze

Kv1(KN/m)	25077,55	rigidezza traslante contr.vert.1
Kv2	25077,55	rigidezza traslante contr.vert.2
Kv3	37616,33	rigidezza traslante contr.vert.3
Kv4	37616,33	rigidezza traslante contr.vert.4
dv2 (m)	5,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv3	10,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv4	15,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
Ko1(KN/m)	50155,10	rigidezza traslante contr.orizz.1
Ko2	50155,10	rigidezza traslante contr.orizz.2
Ko3	25077,55	rigidezza traslante contr.orizz.3
do2	4,00	distanza verticale controvento punto O
do3	8,00	distanza verticale controvento punto O

Questa tabella riassume le rigidezze di tutti i controventi e le distanze di questi dall'origine del sistema di riferimento xy, necessarie per trovare successivamente il centro delle rigidezze.

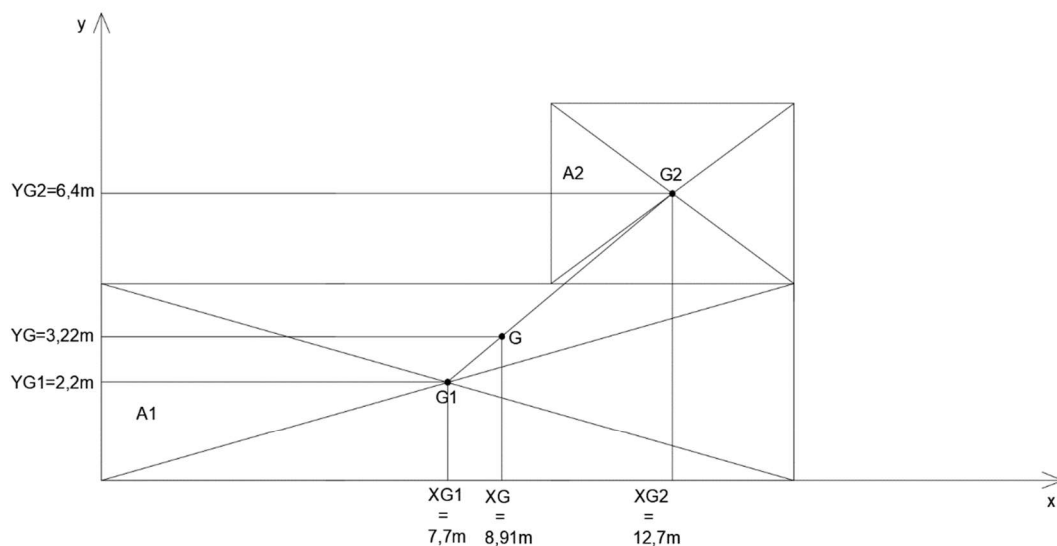
Dividiamo l'impalcato in due aree (A1 e A2) per procedere con il calcolo del **centro di massa** tramite un foglio excel. Le coordinate di quest'ultimo sono :

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot X_{Gi}}{A_{tot}}$$

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot Y_{Gi}}{A_{tot}}$$

Step 3: calcolo del centro di massa

area_1 (mq)	67,76	misura dell'area superficie 1 area 1 (misura)
x_G1 (m)	7,70	coordinata X centro area 1
y_G1	2,20	coordinata Y centro area 1
area_2	21,60	misura dell'area superficie 2
x_G2	12,70	coordinata X centro area 2
y_G2	6,40	coordinata Y centro area 2
Area tot (mq)	89,36	Area totale impalcato
X_G	8,91	coordinata X centro d'area impalcato (centro massa)
Y_G	3,22	coordinata Y centro d'area impalcato (centro massa)



Ora possiamo procedere con il calcolo del **centro di rigidezze**:

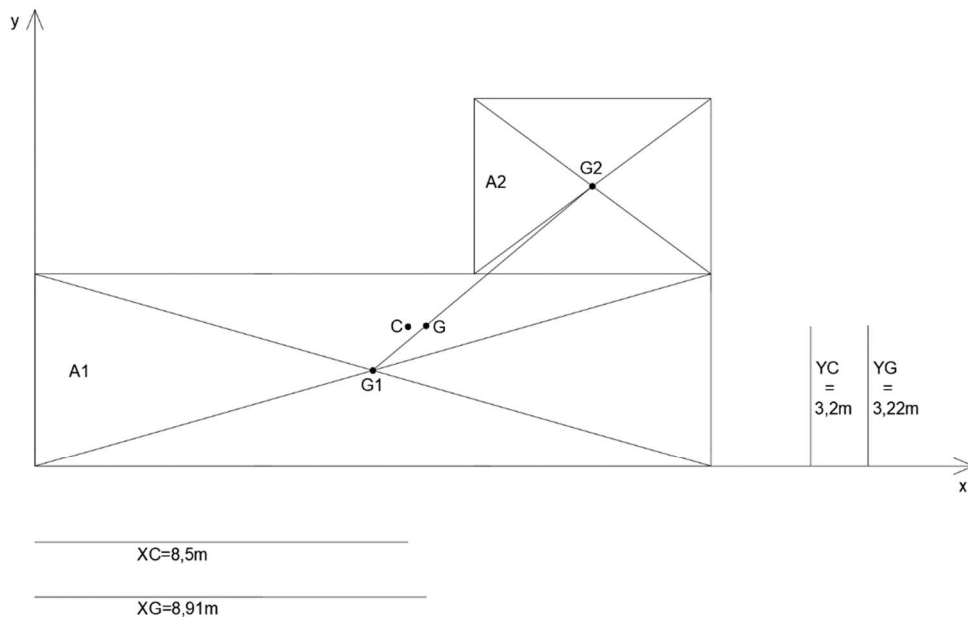
Le coordinate (Xc;Yc) del CdR si quantificano come la sommatoria del prodotto delle rigidezze dei singoli controventi per le rispettive distanze dal sistema di riferimento, diviso la rigidezze totale.

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n k_{vi} \cdot d_{vi}}{k_{v_tot}}$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n k_{oi} \cdot d_{oi}}{k_{o_tot}}$$

Step 4: calcolo del centro di rigidezze e delle rigidezze globali

Ko_tot	125387,75	rigidezze totale orizzontale
Kv_tot	125387,75	rigidezze totale verticale
X_C (m)	8,50	coordinata X centro rigidezze
Y_C	3,20	coordinata Y centro rigidezze
dd_v1	-8,50	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v2	-3,50	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v3	1,50	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v4	6,50	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o1	-3,20	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o2	0,80	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o3	4,80	distanze controvento dal centro rigidezze
K_φ (KN*m)	4916453,80	rigidezze torsionale totale



La struttura ruota intorno al centro delle rigidezze e la forza orizzontale si applica al centro di massa, quindi è evidente che questi devono essere abbastanza vicini in modo tale che si crei meno braccio possibile tra loro, al fine di evitare rotazioni molto grandi. Nell'edificio preso in esame il CdR e il CdM sono abbastanza vicini. Nel caso in cui i due centri fossero stati troppo lontani l'uno dall'altro avremmo dovuto irrigidire specificamente la struttura, per esempio con l'aggiunta di un setto, in modo tale da farli avvicinare.

Il prossimo passo consiste nell'effettuare l'**analisi dei carichi sismici** per stabilire l'entità della forza sismica orizzontale. Analizziamo i carichi sul solaio:

- Carico permanente strutturale $q_s = 2,5 \text{ KN/mq}$
- Carico permanente portato $q_p = 2,5 \text{ KN/mq}$
- Carico accidentale $q_a = 5 \text{ KN/mq}$

Quantifichiamo con un foglio di calcolo il carico totale permanente **G** e il carico totale accidentale **Q** :

- $\mathbf{G} = (q_s + q_p) A_{tot}$
- $\mathbf{Q} = (q_a) A_{tot}$

Utilizziamo le N.T.C. 2008 e applichiamo la combinazione sismica per calcolare i pesi sismici (**W**):

- $\mathbf{W} = \mathbf{G} + \psi * \mathbf{Q}$ con ψ = coefficiente di contemporaneità indicato dalla normativa

Per ottenere la Forza sismica orizzontale (**F**), agente sul centro di massa, dobbiamo moltiplicare il peso sismico (**W**) per un coefficiente di intensità sismica (*c*), normato dalle N.T.C. 2008, che varia a seconda della sismicità del luogo in cui si trova l'edificio preso in esame.

- $\mathbf{F} = \mathbf{W} * c$

Step 5: analisi dei carichi sismici

q_s (KN/mq)	2,50	carico permanente di natura strutturale
q_p	2,50	sovraccarico permanente
q_a	5,00	sovraccarico accidentale
G (KN)	446,80	carico totale permanente
Q (KN)	446,80	carico totale accidentale
ψ	0,80	coefficiente di contemporaneità
W (KN)	804,24	Pesi sismici
c	0,10	coefficiente di intensità sismica
F (KN)	80,42	Forza sismica orizzontale

Come ultimo passaggio si studia la ripartizione della forza sismica lungo i due assi del sistema di riferimento XY, al fine di quantificare le forze sui singoli controventi e conoscere gli effetti cinematici sull'impalcato, ovvero traslazione (verticale ed orizzontale) e rotazione. I valori di queste grandezze cinematiche si calcolano con le seguenti espressioni:

$$u = \frac{F}{k_{o_tot}} \quad v = \frac{F}{k_{v_tot}} \quad \varphi = \frac{M}{k_{\varphi}}$$

Step 6: ripartizione forza sismica lungo X

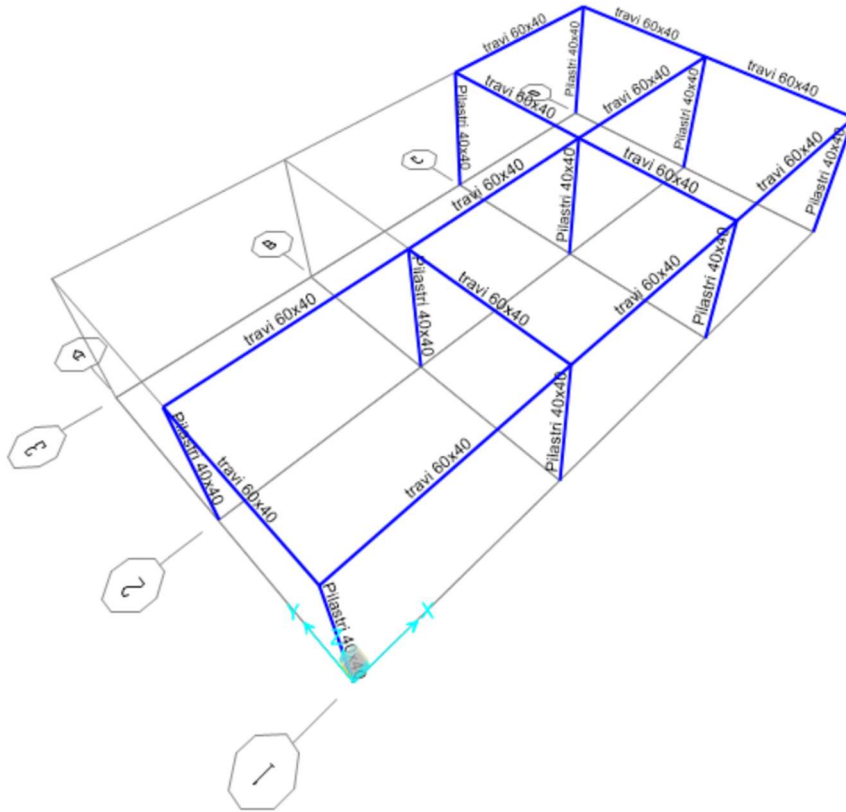
M (KN*m)	-1,22	momento torcente (positivo se antiorario)
u_o (m)	0,001	traslazione orizzontale
φ	0,00000	rotazione impalcato (positiva se antioraria)
Fv1 (KN)	0,05	Forza sul controvento verticale 1
Fv2	0,02	Forza sul controvento verticale 2
Fv3	-0,01	Forza sul controvento verticale 3
Fv4	-0,06	Forza sul controvento verticale 4
Fo1	32,21	Forza sul controvento orizzontale 1
Fo2	32,16	Forza sul controvento orizzontale 2
Fo3	16,05	Forza sul controvento orizzontale 3
	80,42	
		32,17
		32,17
		16,08
		80,42

Step 7: ripartizione forza sismica lungo Y

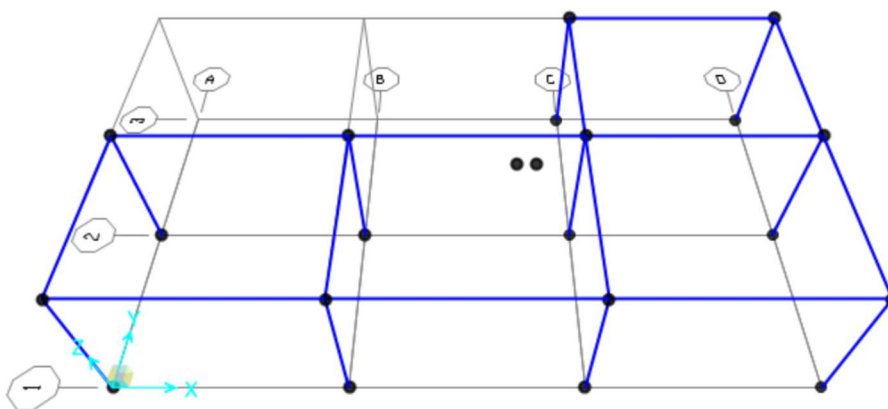
M (KN*M)	32,86	momento torcente
v_o (KN)	0,001	traslazione verticale
φ	0,00001	rotazione impalcato
Fv1 (KN)	14,66	Forza sul controvento verticale 1
Fv2	15,50	Forza sul controvento verticale 2
Fv3	24,50	Forza sul controvento verticale 3
Fv4	25,76	Forza sul controvento verticale 4
Fo1	-1,07	Forza sul controvento orizzontale 1
Fo2	0,27	Forza sul controvento orizzontale 2
Fo3	0,80	Forza sul controvento orizzontale 3
	80,42	
		16,08
		16,08
		24,13
		24,13
		80,42

Ora passiamo alla **modellazione in Sap2000**:

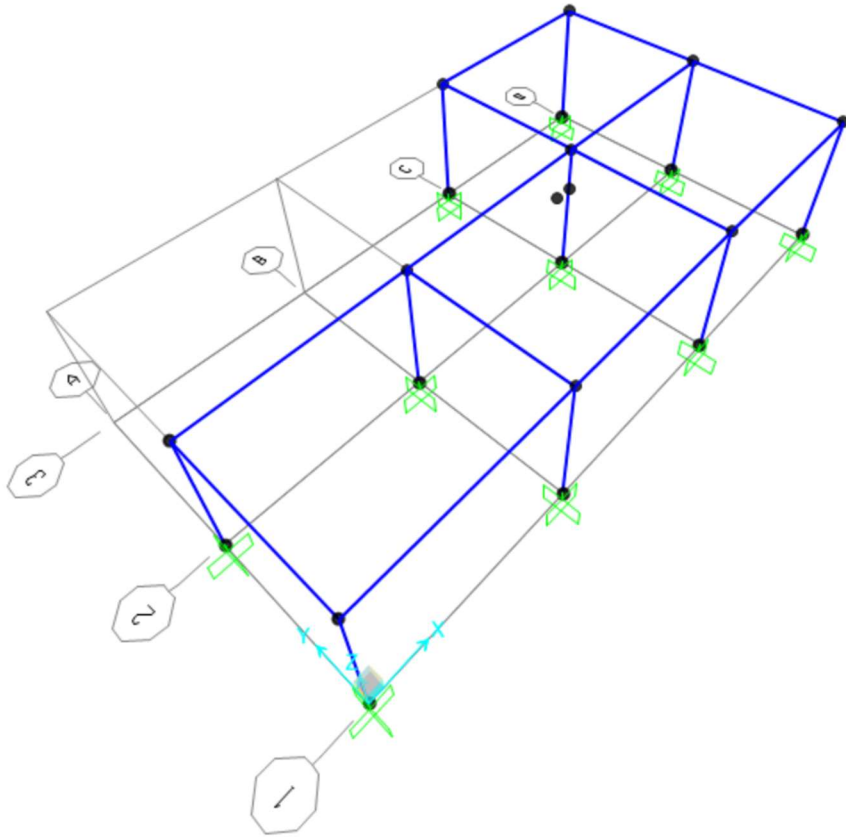
Dopo aver costruito una griglia disegniamo la struttura, assegnando ai pilastri una sezione 40x40 cm e alle travi una sezione 60x40 cm.



Disegniamo il centro delle rigidità e il centro di massa



Assegniamo i vincoli di incastro alla base dei pilastri. Inoltre, trattandosi di telaio *Shear-Type*, aumentiamo significativamente il momento di inerzia (su entrambi gli assi) alle travi, dato che nel modello di telaio scelto queste hanno rigidità infinita.

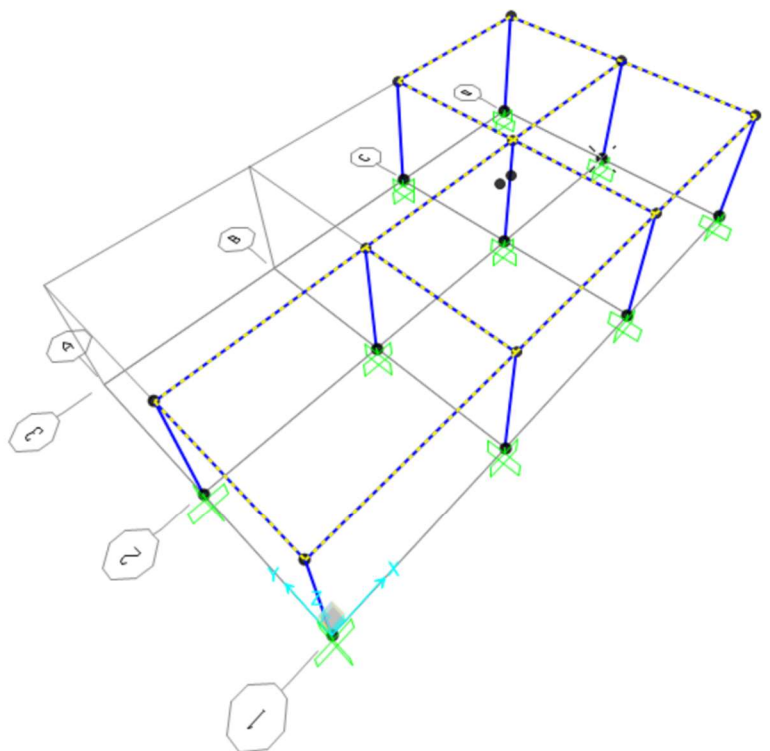


Frame Property/Stiffness Modification Factors

Property/Stiffness Modifiers for Analysis

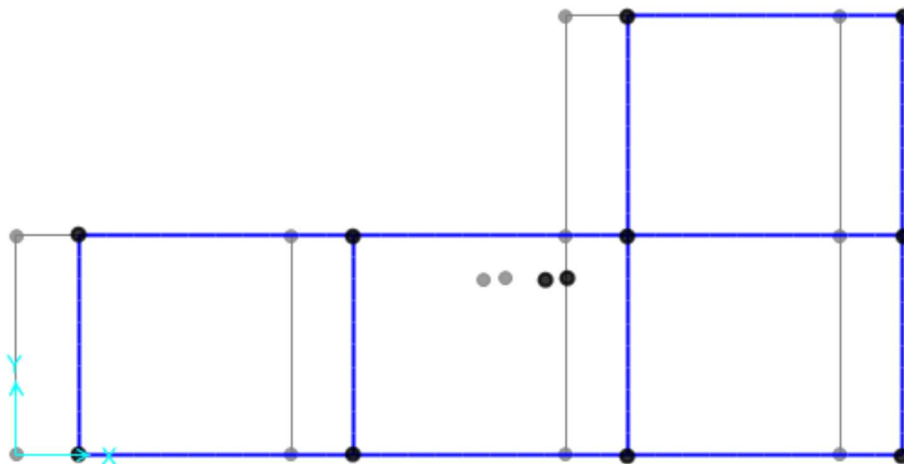
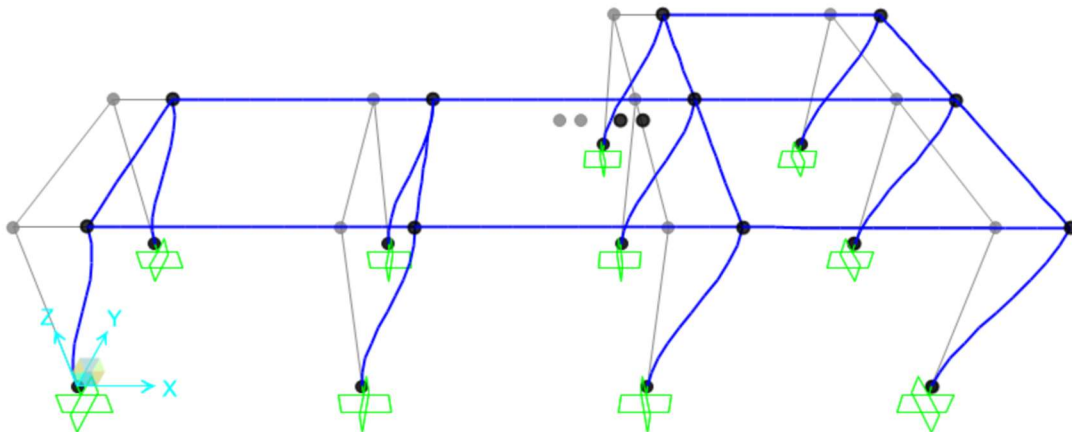
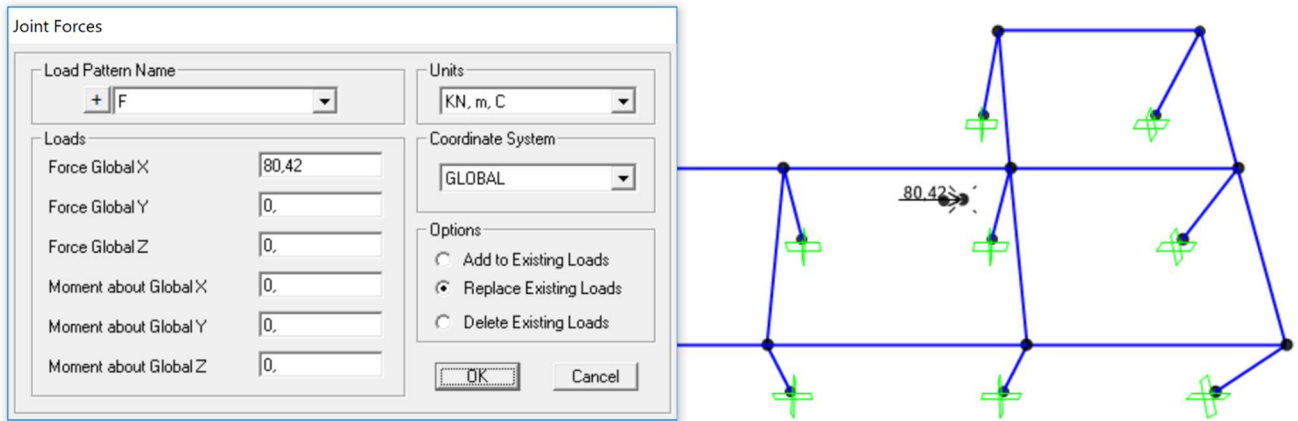
Cross-section (axial) Area	1
Shear Area in 2 direction	1
Shear Area in 3 direction	1
Torsional Constant	1
Moment of Inertia about 2 axis	1000000000
Moment of Inertia about 3 axis	1000000000
Mass	1
Weight	1

OK Cancel



Dopo aver assegnato a tutti i nodi della struttura un diaphragm constraint, applichiamo al centro di massa le forze sismiche su entrambi gli assi separatamente. Successivamente eseguiamo un'analisi per visualizzare le deformate.

- Forza sismica applicata lungo l'asse x:



- Forza sismica applicata l'ungo l'asse y:

