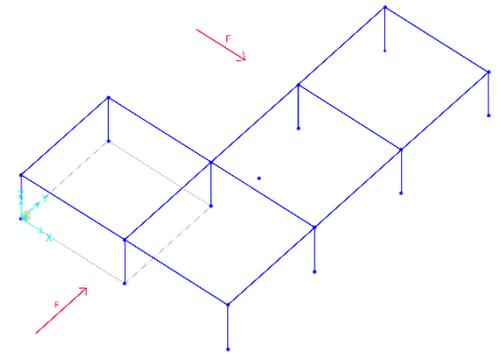


II ESERCITAZIONE: Centro delle rigidzze e ripartizione delle forze sismiche

Si è preso in esame un edificio di forma semplice ad L, di un solo piano a campate regolari.

L'edificio è costituito dal seguente impalcato e le seguenti sezioni per pilastri e travi (Figura 1).

Nella disposizione dei pilastri bisogna avere l'accortezza di ruotare la sezione del pilastro affinché rivolga il maggior momento d'inerzia nella stessa direzione da cui si presume arrivi la forza orizzontale.



Si è supposto che la struttura sia composta da **telai Shear Type**, che cioè possiedono travi alte supporte indeformabili (infinitamente rigide) e pilastri flessibili di rigidezza k .

Nell'impalcato individuiamo **sette telai piani**, tre paralleli all'asse Y e quattro paralleli all'asse X.

Questi hanno il compito, oltre che di portare il peso della costruzione (struttura, sovrastruttura, sovraccarico accidentale), anche di controventare la struttura intera, ossia di resistere a forze orizzontali (nel piano X-Y), comunque orientate.

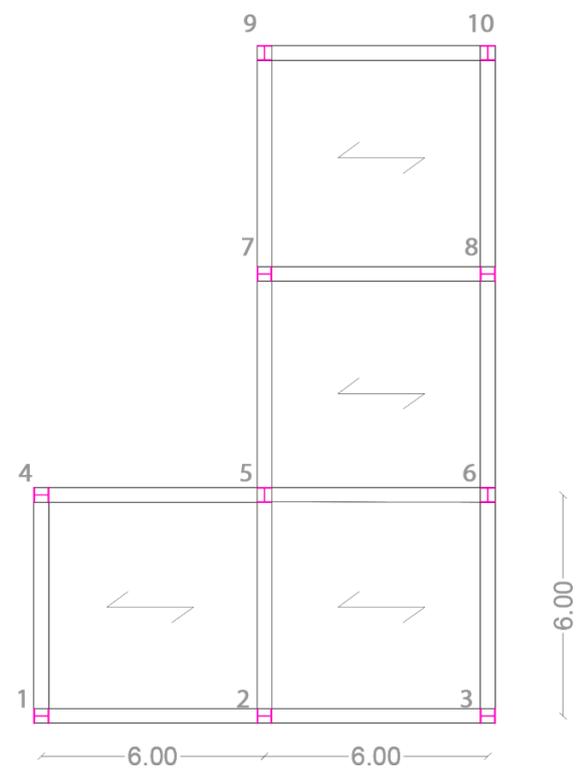


Figura1

Gli elementi distinguibili che compongono la struttura sono tutti piani, ma vivono in piani diversi (Figura 1b).

Telaio **1v** composto da: Pilastri 1 e 4

Telaio **2v** composto da: Pilastri 2,5,7 e 9

Telaio **3v** composto da: Pilastri 3,6,8 e 10

Telaio **1o** composto da: Pilastri 1, 2, e 3

Telaio **2o** composto da: Pilastri 4, 5 e 6

Telaio **3o** composto da: Pilastri 7 e 8

Telaio **4o** composto da: Pilastri 9 e 10

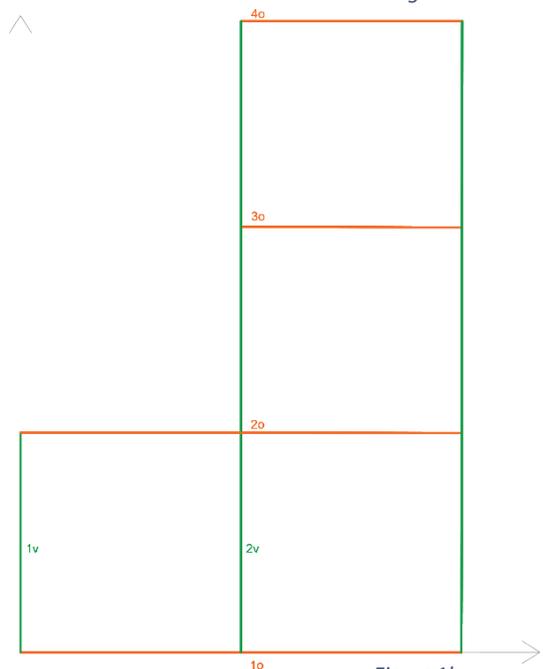


Figura1b

Il solaio è ipotizzabile rigido nel suo piano, mentre ai controventi viene riconosciuta un'elasticità.

A questo livello di semplificazione, i controventi che per il solaio rappresentano vincoli cedevoli elasticamente sono rappresentabili nel piano dell'impalcato come molle di adeguata rigidità (Figura 2).

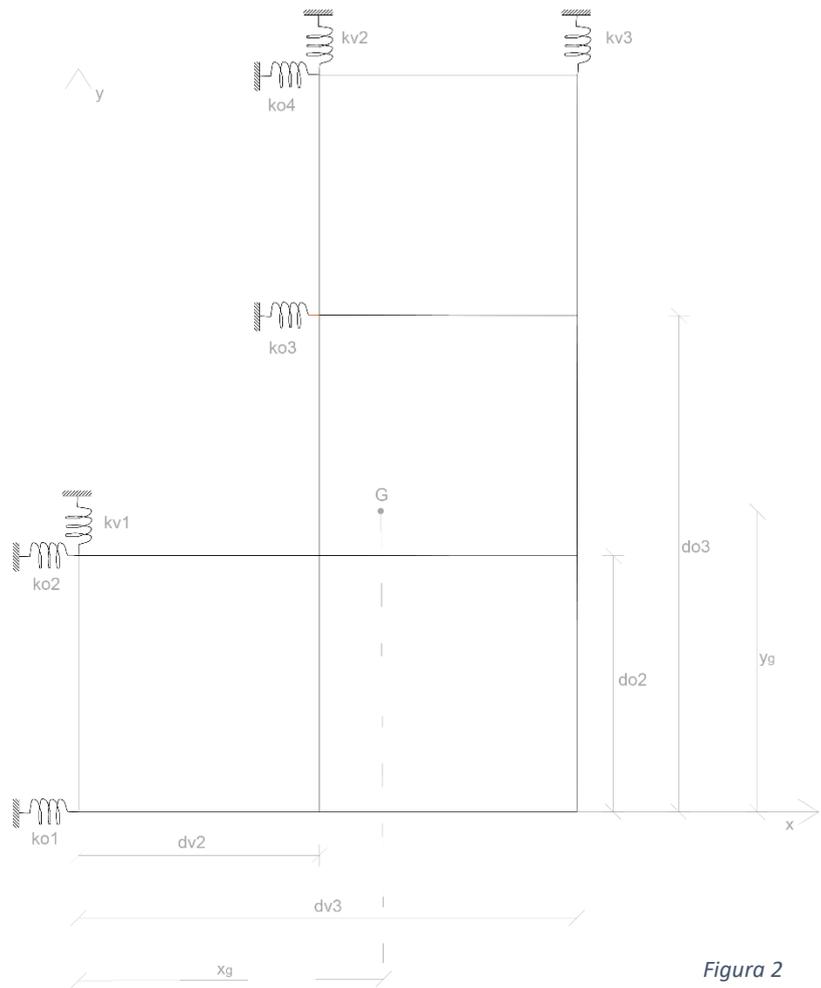


Figura 2

Ora come prima cosa calcoliamo la rigidità traslante associata a ciascun contrafforte (Figura 3):

Step 1: calcolo delle rigidità traslanti dei controventi dell'edificio		
Telaio 1v	1-4	pilastri che individuano il telaio
E (N/mm ²)	210000,00	modulo di Young
H (m)	3,00	altezza dei pilastri
I ₁ (cm ⁴)	11000,00	momento d'inerzia pilastro 1
I ₂	11000,00	momento d'inerzia pilastro 2
I ₃	-	momento d'inerzia pilastro 3
I ₄	-	momento d'inerzia pilastro 4
K_T (KN/m)	20533,33	rigidità traslante telaio 1
Telaio 2v	2-5-7-9	pilastri che individuano il telaio
E	210000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
I ₁	11000,00	momento d'inerzia pilastro 1
I ₂	58000,00	momento d'inerzia pilastro 2
I ₃	11000,00	momento d'inerzia pilastro 3
I ₄	58000,00	momento d'inerzia pilastro 4
K_T	221200,00	rigidità traslante telaio 2
Telaio 3v	3-6-8-10	pilastri che individuano il telaio
E	210000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
I ₁	11000,00	momento d'inerzia pilastro 1
I ₂	58000,00	momento d'inerzia pilastro 2
I ₃	11000,00	momento d'inerzia pilastro 3
I ₄	58000,00	momento d'inerzia pilastro 4
K_T	128800,00	rigidità traslante telaio 3
Telaio 1o	1-2-3	pilastri che individuano il telaio
E	210000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
I ₁	58000,00	momento d'inerzia pilastro 1
I ₂	58000,00	momento d'inerzia pilastro 2
I ₃	58000,00	momento d'inerzia pilastro 3
I ₄	-	momento d'inerzia pilastro 4
K_T	162400,00	rigidità traslante telaio 5
Telaio 2o	4-5-6	pilastri che individuano il telaio
E	210000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
I ₁	58000,00	momento d'inerzia pilastro 1
I ₂	11000,00	momento d'inerzia pilastro 2
I ₃	11000,00	momento d'inerzia pilastro 3
I ₄	-	momento d'inerzia pilastro 4
K_T	74666,67	rigidità traslante telaio 6
Telaio 3o	7-8	pilastri che individuano il telaio
E	210000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
I ₁	58000,00	momento d'inerzia pilastro 1
I ₂	58000,00	momento d'inerzia pilastro 2
I ₃	-	momento d'inerzia pilastro 3
I ₄	-	momento d'inerzia pilastro 4
K_T	108266,67	rigidità traslante telaio 7
Telaio 4o	9-10	pilastri che individuano il telaio
E	210000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
I ₁	11000,00	momento d'inerzia pilastro 1
I ₂	11000,00	momento d'inerzia pilastro 2
I ₃	-	momento d'inerzia pilastro 3
I ₄	-	momento d'inerzia pilastro 4
K_T	20533,33	rigidità traslante telaio 4

Figura 3

Poiché i telai sono modellati come telai Shear-Type calcoliamo la loro rigidezza come:

$$k = 12 \frac{E}{h^3} \sum_{i=1}^n I_i$$

Successivamente riordiniamo le rigidezze e riportiamo le distanze di ogni contrafforte dall'origine degli assi (Figura 4).

Step 2: tabella sinottica controventi e distanze		
Kv1(KN/m)	20533,33	rigidezza traslante contr.vert.1
Kv2	221200,00	rigidezza traslante contr.vert.2
Kv3	128800,00	rigidezza traslante contr.vert.3
Kv4	0,00	rigidezza traslante contr.vert.4
dv2 (m)	6,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv3	12,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv4	0,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
Ko1(KN/m)	162400,00	rigidezza traslante contr.orizz.1
Ko2	74666,67	rigidezza traslante contr.orizz.2
Ko3	108266,67	rigidezza traslante contr.orizz.3
Ko4	20533,33	rigidezza traslante contr.orizz.4
do2	6,00	distanza verticale controvento punto O
do3	12,00	distanza verticale controvento punto O
do4	18,00	distanza verticale controvento punto O

Figura 4

Ora procediamo a calcolare le coordinate del centro di massa, che in questo caso, avendo supposto le densità di massa degli elementi dell'impalcato costanti, coinciderà col baricentro della figura.

Per farlo, lo si può ricavare direttamente da AutoCad (o Rhinoceros) che trovano in maniera più immediata il centroide dell'area, o procedere nell'individuazione del medesimo tramite il calcolo analitico del baricentro dell'area, suddividendo prima la struttura in elementi regolari (in questo caso rettangoli) che rendano più o meno immediata l'individuazione del baricentro (Figura 5).

Step 3: calcolo del centro di massa		
area_1 (mq)	72,00	misura dell'area superficie 1 area 1 (misura)
x_G1 (m)	6,00	coordinata X centro area 1
y_G1	3,00	coordinata Y centro area 1
area_2	72,00	misura dell'area superficie 2
x_G2	9,00	coordinata X centro area 2
y_G2	12,00	coordinata Y centro area 2
Area tot (mq)	144,00	Area totale impalcato
X_G	7,50	coordinata X centro d'area impalcato (centro massa)
Y_G	7,50	coordinata Y centro d'area impalcato (centro massa)

Figura 6

$$X_G = \frac{A_1 \times x_{G1} + A_2 \times x_{G2}}{A_{tot}} \quad Y_G = \frac{A_1 \times y_{G1} + A_2 \times y_{G2}}{A_{tot}}$$

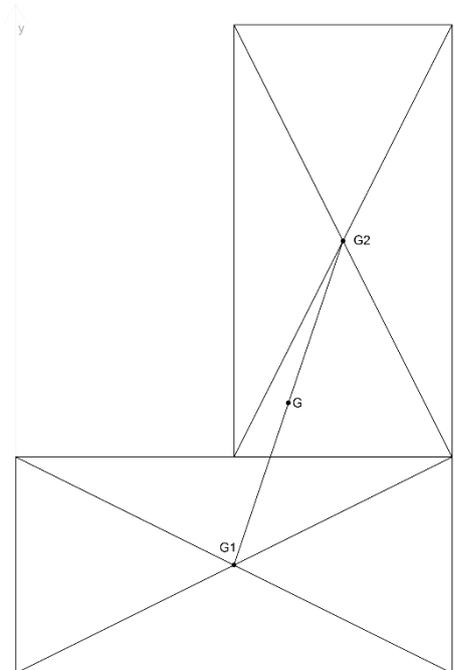


Figura 5

Ora rimane da calcolare la rigidezza totale orizzontale, la somma delle rigidezze dei singoli controventi orizzontali, la rigidezza totale verticale, somma delle rigidezze dei singoli controventi verticali, le coordinate del centro delle rigidezze dell'impalcato e la rigidezza torsionale totale (Figura 7).

$$X_C = \sum_{i=0}^n \frac{k_{vi} \times d_{vi}}{K_{v_tot}} \quad Y_C = \sum_{i=0}^n \frac{k_{oi} \times d_{oi}}{K_{o_tot}}$$

Step 4: calcolo del centro di rigidezze e delle rigidezze globali		
Ko_tot	365866,67	rigidezza totale orizzontale
Kv_tot	370533,33	rigidezza totale verticale
X_C (m)	7,75	coordinata X centro rigidezze
Y_C	5,79	coordinata Y centro rigidezze
dd_v1	-7,75	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v2	-1,75	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v3	4,25	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o1	-5,79	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o2	0,21	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o3	6,21	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o4	12,21	distanze controvento dal centro rigidezze
K_φ (KN*m)	13857811,80	rigidezza torsionale totale

Figura 7

Inoltre ricaviamo anche il valore della rigidezza torsionale (Figura 7), calcolando tutte le distanze dei diversi controventi da C ($ddv1, ddv2, \dots, ddo1, \dots$).

$$K_{\varphi} = \sum_{i=1}^n k_{vi} \times dd_{-vi} + \sum_{i=1}^n k_{oi} \times dd_{-oi}$$

Ora procediamo con l'analisi dei carichi sismici per ricavare la forza sismica che agisce nel centro di massa.

Calcoliamo il carico totale permanente G e il carico totale accidentale Q a partire dal valore dei carichi per unità di superficie (q_s, q_p, q_a).

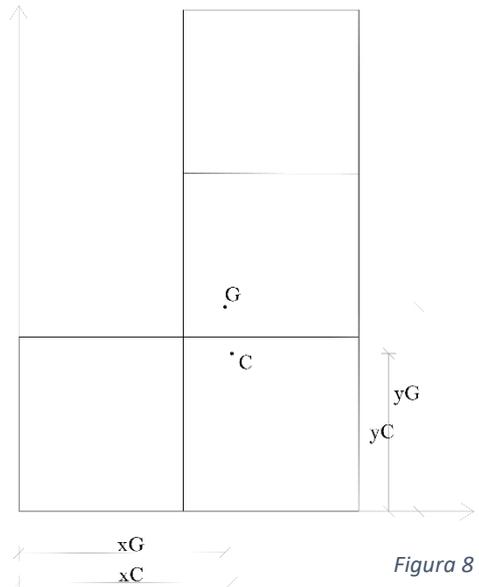


Figura 8

$$G = (q_s + q_p) \times A_{tot} \quad Q = q_a \times A_{tot} \quad [\text{kN}]$$

Calcoliamo i pesi sismici utilizzando la combinazione sismica (NTC):

$$W = G + \psi_{2j} \times Q \quad [\text{kN}]$$

Il peso sismico W , rappresenta la forza peso dell'edificio, data dal prodotto tra la massa dell'edificio e l'accelerazione di gravità.

L'accelerazione del sisma è mediamente più piccola dell'accelerazione di gravità, pertanto può essere introdotto un coefficiente di intensità sismica c , che tenga conto della sismicità del luogo di progettazione dell'edificio.

$$F = W \times c \quad [\text{kN}]$$

Infine ripartiamo la forza sismica sui controventi e ricaviamo gli effetti cinematici sull'impalcato in termini di traslazione orizzontale e verticale e rotazione rigida.

$$u = \frac{F}{K_{o_tot}}; \quad v = \frac{F}{K_{v_tot}}; \quad \varphi = \frac{M}{K_{\varphi}}$$

Step 5: analisi dei carichi sismici

q_s (KN/mq)	2,50	carico permanente di natura strutturale
q_p	2,50	sovraccarico permanente
q_a	5,00	sovraccarico accidentale
G (KN)	720,00	carico totale permanente
Q (KN)	720,00	carico totale accidentale
ψ	0,80	coefficiente di contemporaneità
W (KN)	1296,00	Pesi sismici
c	0,10	coefficiente di intensità sismica
F (KN)	129,60	Forza sismica orizzontale

Figura 9

Step 6: ripartizione forza sismica lungo X

M (KN*m)	-222,17	momento torcente (positivo se antiorario)
u_o (m)	0,0004	traslazione orizzontale
φ	-0,00002	rotazione impalcato (positiva se antioraria)
Fv1 (KN)	2,55	Forza sul controvento verticale 1
Fv2	6,22	Forza sul controvento verticale 2
Fv3	-8,77	Forza sul controvento verticale 3
Fo1	72,59	Forza sul controvento orizzontale 1
Fo2	26,19	Forza sul controvento orizzontale 2
Fo3	27,56	Forza sul controvento orizzontale 3
Fo4	3,25	Forza sul controvento orizzontale 3
	129,60	

57,53
26,45
38,35
7,27

129,60

Step 7: ripartizione forza sismica lungo Y

M (KN*M)	-32,81	momento torcente
v_o (KN)	0,0003	traslazione verticale
φ	-0,000002	rotazione impalcato
Fv1 (KN)	7,56	Forza sul controvento verticale 1
Fv2	78,29	Forza sul controvento verticale 2
Fv3	43,75	Forza sul controvento verticale 3
Fo1	2,22	Forza sul controvento orizzontale 1
Fo2	-0,04	Forza sul controvento orizzontale 2
Fo3	-1,59	Forza sul controvento orizzontale 3
Fo4	-0,59	Forza sul controvento orizzontale 3
	129,60	

7,18
77,37
45,05

129,60

Figura 10

Ora possiamo ricavare la forza sui singoli controventi nei due casi di carico.

Quando la forza è **parallela all'asse x**, la reazione elastica dei controventi orizzontali sarà:

$$F_{o_n} = k_{o_n}(u + \varphi \times dd_{o_n})$$

E la reazione elastica dei controventi verticali sarà:

$$F_{v_n} = k_{v_n}(u + \varphi \times dd_{v_n})$$

Quando la forza è **parallela all'asse y**, la reazione elastica dei controventi orizzontali sarà:

$$F_{o_n} = k_{o_n} \times \varphi \times dd_{o_n}$$

E la reazione elastica dei controventi verticali sarà:

$$F_{v_n} = k_{v_n} \times \varphi \times dd_{v_n}.$$