3. Torsione semplice: altre sezioni

Ci si propone di determinare l'andamento e il valore massimo delle tensioni torsionali nelle sezioni:

- chiusa di spessore sottile;
- rettangolare;
- aperta di spessore sottile e profilati metallici.

UNITÀ G3

Sezioni chiuse di spessore sottile

Le sezioni *tubolari* di qualsiasi forma si prestano anch'esse a una trattazione abbastanza rigorosa, purché lo spessore sia *sottile* rispetto alle altre dimensioni. Solo in questo caso, infatti, si può ritenere che le τ siano costanti nello spessore della sezione.

Si consideri (▶FIGURA 1) una qualsiasi sezione tubolare di piccolo spessore s, sottoposta al momento torcente M_t. Ogni elemento di superficie

$$\mathrm{d}A = s \cdot \mathrm{d}c$$

è soggetto alla forza risultante

$$\tau \cdot \mathrm{d}A = \tau \cdot s \cdot \mathrm{d}c$$

La somma dei momenti di tutte queste forze infinitamente piccole rispetto a un qualsiasi punto O del piano deve fare equilibrio al momento torcente M_t. Si ha:

$$\int_c r \cdot \tau \cdot s \cdot \mathrm{d}c = M_t$$

Il prodotto $\tau \cdot s$, costante, può essere *portato fuori* dal segno di integrazione. Si ha:

$$\tau \cdot s \int_c r \cdot \mathrm{d}c = M_t$$

Poiché $\int_c r \cdot \mathrm{d}c$ è il doppio dell'area Ω racchiusa dal contorno medio della sezione (▶1), si ottiene la **formula di Bredt** per le sezioni chiuse di spessore sottile:

$$\boxed{\tau = \frac{M_t}{2\Omega s}} \qquad (4)$$

▶1 Si pensi alla sezione tubolare circolare, dove si ha:

$$\Omega = 2\pi r \cdot r = 2\pi r^2$$

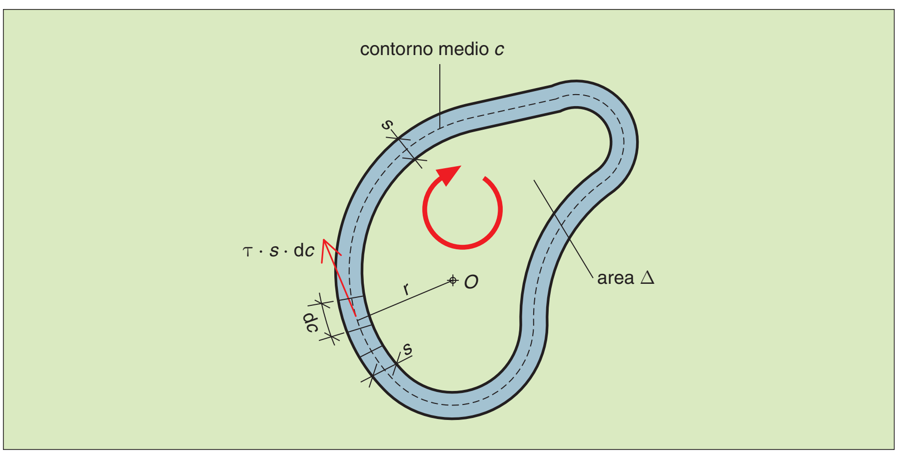

FIGURA 8 Sezione tubolare di spessore sottile.

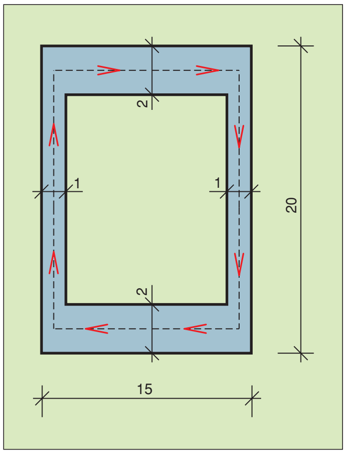

FIGURA 2 Sezione tubolare di spessore sottile non uniforme.

dove:

- Ω è l'area racchiusa dal contorno medio della sezione;
- s è lo spessore.

APPLICAZIONI

1 *Determinare la tensione dovuta al momento $M_t = 24$ kN · m nella sezione circolare cava avente diametro interno di 28 cm e diametro esterno di 32 cm, supponendola di spessore sottile.*

Si ha:

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega s} = \frac{24 \cdot 10^6}{2 \cdot \pi 150^2 \cdot 20} = 8{,}5 \text{ N/mm}^2$$

Si noti come il risultato sia leggermente diverso da quello, più rigoroso, ricavato nel paragrafo 2 con la formula delle sezioni circolari. Questo perché, non essendo lo spessore veramente sottile rispetto al diametro, le tensioni non sono costanti nello spessore dell'anello. In questo caso la formula di Bredt fornisce, invece della τ_{max}, il valore della τ sul contorno medio della sezione. Vista la differenza modesta, non si commette comunque grave errore applicando una formula invece dell'altra.

2 *Determinare la tensione massima nella sezione sottile di* ▶FIGURA 2*, sottoposta alla torsione di* 50 kN · m*. Le dimensioni sono in centimetri.*

La formula di Bredt vale anche quando lo spessore della sezione non è uniforme.

In questo caso la formula calcola le massime tensioni tangenziali, che si riscontrano in corrispondenza del più piccolo spessore s_{min} (in questo caso, 1 cm). Essendo:

$$\Omega = 14 \cdot 18 = 252 \text{ cm}^2$$

si ha:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2\Omega s_{min}} = \frac{50 \cdot 10^6}{2 \cdot 25\,200 \cdot 10} = 99 \text{ N/mm}^2$$

Sezioni rettangolari

Poiché le sezioni rettangolari, per effetto della torsione, non si mantengono piane, si ricorre a espressioni semiempiriche.

Le linee di uguale tensione della sezione rettangolare, simmetriche rispetto alle due mediane, sono rappresentate nella ▶FIGURA 3. Lungo le diagonali la τ cresce fino a un certo punto, poi decresce fino ad annullarsi nei vertici per il principio di reciprocità. I diagrammi delle tensioni lungo le due mediane, invece, mostrano che la τ cresce più che linearmente dal baricentro, dove è nulla, verso i lembi della sezione.

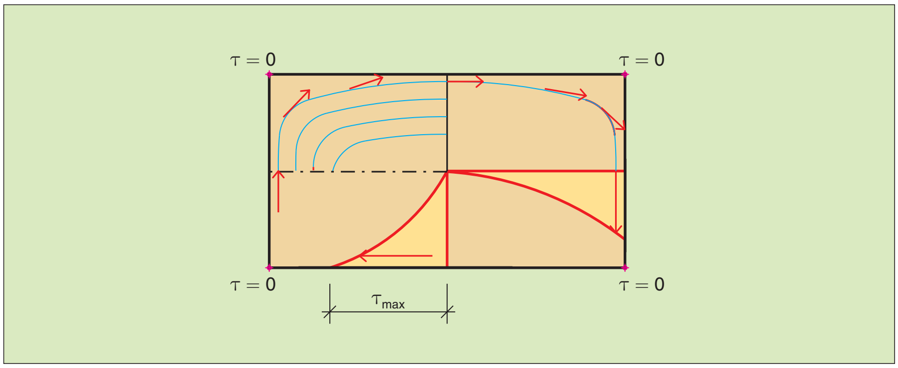

FIGURA 3 Sezione rettangolare: linee di uguale tensione e diagrammi delle tensioni lungo le mediane.

La τ assume il valore massimo nei punti medi dei lati più lunghi.

Il valore della τ_{max} può essere calcolato con la formula semiempirica:

$$\tau_{max} = \frac{\alpha M_t}{ab^2} \qquad (1)$$

dove:

- M_t è il momento torcente che sollecita la sezione;
- a e b sono i lati del rettangolo (attenzione: a è il lato maggiore);
- α è un coefficiente che dipende dal rapporto a/b tra i lati e può essere determinato mediante la ▶TABELLA 1, dovuta a Saint-Venant, oppure con espressioni semiempiriche, del tipo

  $$\alpha = 3 + 1{,}8\,\frac{b}{a}$$

  dovute allo stesso Saint-Venant.

TABELLA 1 Coefficienti α per il calcolo della massima tensione torsionale nelle sezioni rettangolari

a/b	1	1,5	1,75	2	3	4	5	6	10	20	$\to \infty$
α	4,80	4,33	4,18	4,07	3,74	3,55	3,43	3,35	3,20	3,10	3,00

APPLICAZIONE

Determinare la massima tensione torsionale su una sezione rettangolare di lati 15 cm × 30 cm*, soggetta alla torsione di* 0,8 kN · m.

Si ha:

$$\tau_{max} = \frac{\alpha M_t}{a\,b^2}$$

dove:

$M_t = 0{,}8\ \text{kN} \cdot \text{m} = 0{,}8 \cdot 10^6\ \text{N} \cdot \text{mm}$

$a = 300$ mm

$b = 150$ mm

$\frac{a}{b} = \frac{300}{150} = 2 \ \to$ (tab. 1) $\to \alpha = 4{,}07$

Sostituendo risulta:

$$\tau_{max} = \frac{4{,}07 \cdot 0{,}8 \cdot 10^6}{300 \cdot 150^2} = 0{,}48\ \text{N/mm}^2$$

Sezioni aperte di spessore sottile e profilati

La (1) può essere utilizzata anche per le sezioni aperte con parete sottile, perché l'esperienza dimostra che le tensioni torsionali in una sezione rettangolare di larghezza a e piccolo spessore s ($\alpha = 3$) non cambiano di molto se la sezione viene comunque *ripiegata* (▶FIGURA 4). Si ha quindi:

$$\tau = \frac{3\,M_t}{as^2} \qquad (2)$$

dove:

- a è la *lunghezza media sviluppata* della sezione;
- s è lo spessore della sezione.

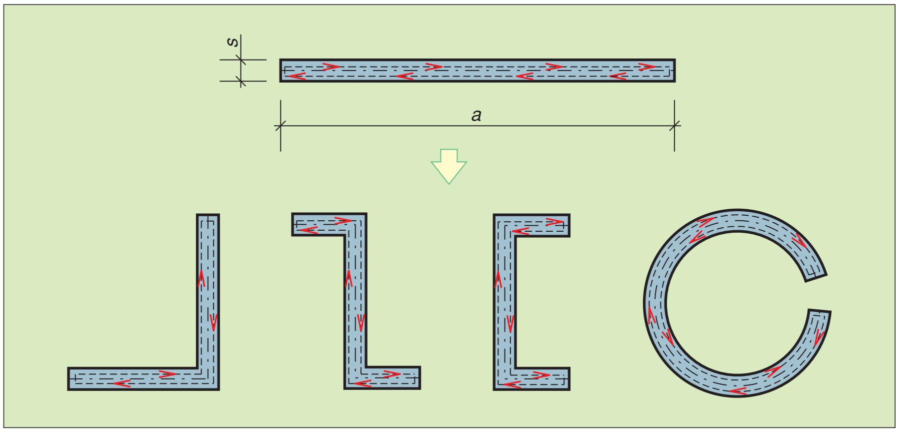

FIGURA 4 Sezioni aperte ottenute sagomando un rettangolo sottile.

APPLICAZIONE

Si immagini di praticare un taglio nella sezione tubolare di ▶FIGURA 7 *(sempre soggetta al momento torcente di* 24 kN · m) *e si determini la tensione massima, supponendo sottile lo spessore.*

Poiché la sezione non è più chiusa, non si può applicare la formula di Bredt. Si dovrà, invece, applicare la (6), relativa alle sezioni aperte di spessore sottile e uniforme. Si ha:

$$\tau_{max} = \frac{3\,M_t}{as^2} = \frac{3 \cdot 24 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 150 \cdot 20^2} = 190 \text{ N/mm}^2$$

Si noti il forte aumento della tensione rispetto alla stessa sezione chiusa: le sezioni aperte sono poco adatte a resistere a torsione.

I profilati non tubolari possono essere considerati sezioni aperte, di spessore sottile ma non uniforme.

Nella (6), scritta nella forma:

$$\tau = \frac{3\,s\,M_t}{as^3}$$

si sostituisca:

- il denominatore as^3 con $\sum a_i\, s_i^3$, essendo la sommatoria estesa a tutti i rettangoli che compongono la sezione;
- lo spessore s al numeratore con lo spessore s_{max} del rettangolo di spessore maggiore, ai bordi del quale si riscontra la massima tensione.

Si ha:

$$\tau_{max} = \frac{3\,s_{max}\,M_t}{\sum_i a_i\, s_i^3} \qquad (3)$$

APPLICAZIONE

Determinare la tensione massima nella sezione IPE 220, *sottoposta alla torsione di* 5 kN · m.

Con riferimento ai valori della tabella Acc1, si ha:

$$\sum_i a_i s_i^3 = 2 \cdot 11 \cdot 0{,}92^3 + (22 - 2 \cdot 0{,}92) \cdot 0{,}59^3 = 20{,}91 \text{ cm}^4 = 20{,}91 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

e quindi:

$$\tau_{max} = \frac{3\,s_{max}\,M_t}{\sum_i a_i\, s_i^3} = \frac{3 \cdot 9{,}2 \cdot 5 \cdot 10^2}{20{,}91} = 600 \text{ N/mm}^2$$