1. STRUTTURE IPERSTATICHE

Una struttura si dice *iperstatica* o *staticamente indeterminata* quando è vincolata più del necessario a mantenere il suo equilibrio statico. I sistemi iperstatici, molto comuni nella pratica, sono caratterizzati dall'avere il numero di gradi di libertà inferiore al numero dei gradi di vincolo $nl < nv$. Questo non consente di determinare univocamente né le reazioni vincolari né le azioni di contatto tramite sole equazioni di bilancio (applicate all'intero corpo, o alla sua parte generica), poiché il numero delle incognite (reazioni vincolari o azioni di contatto) è superiore al numero di equazioni (di bilancio). Non è possibile quindi risolvere il problema dell'equilibrio di strutture iperstatiche senza introdurre altri fattori quali le caratteristiche meccaniche del materiale, le caratteristiche geometriche (area, inerzia) della sezione, tutte legate alla deformabilità della trave.

2. METODO DEGLI SPOSTAMENTI O EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA , PER LA SOLUZIONE DI TRAVI IPERSTATICHE

Il metodo degli spostamenti è un metodo per risolvere il problema dell'equilibrio sia per strutture isostatiche, sia per strutture iperstatiche. Esso consente di determinare le reazioni vincolari, i diagrammi delle sollecitazioni, gli spostamenti e le deformazioni, a partire dai tre gruppi di equazioni del modello di trave di Bernoulli. Richiamiamo di seguito tutte le equazioni del modello di trave di Bernoulli, distinguendole in tre gruppi dal diverso significato fisico.

Equazioni di bilancio→ esprimono il legame tra carichi esterni e sollecitazioni

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{ds} + q_1 = 0 \\ \dfrac{dT}{ds} + q_2 = 0 \\ \dfrac{dM}{ds} + T = 0 \end{cases}$$

Equazioni di congruenza → esprimono il legame tra deformazione e spostamenti

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{du}{ds} \\ \gamma = \dfrac{dv}{ds} - \varphi = 0 \qquad \text{da cui} \quad \varphi = \dfrac{dv}{ds}. \\ \chi = \dfrac{d\varphi}{ds} \end{cases}$$

ove ε= deformazione assiale, γ= scorrimento angolare, χ= curvatura. Nel modello di Bernoulli si ipotizza che non ci siano scorrimenti angolari, ossia $\gamma=0$ da cui $\varphi = \frac{dv}{ds}$.

Legame costitutivo→ esprimono il legame tra deformazione e le sollecitazioni

$$\begin{cases} N = EA \cdot \varepsilon \\ M = EJ \cdot \chi \end{cases}$$

E= modulo di Young, modulo di elasticità normale del materiale
A= area della sezione della trave
J= momento di inerzia della sezione della trave

2.1 *Il problema flessionale*

Nel metodo degli spostamenti è possibile distinguere il problema assiale dal problema flessionale che posso essere analizzati come due problemi separati. In questa sede si rivolgerà l'attenzione al solo problema flessionale per cui le grandezze da tenere in considerazione sono:

v, φ, T, M, χ

Nel sistema di equazioni descritte nel paragrafo precedente, le equazioni in cui non figurano queste grandezze sono le seguenti:

$$\frac{dN}{ds} + q_1 = 0$$
$$\varepsilon = \frac{du}{ds}$$
$$N = EA \cdot \varepsilon$$

Esse potranno essere considerate un gruppo di equazioni a parte e trattate separatamente, per determinare l'equazione della linea elastica per soli spostamenti assiali. Dopo tale premessa, le equazioni che definiscono il problema flessionale sono dunque le seguenti:

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} + q_2 = 0 \\ \frac{dM}{ds} + T = 0 \\ M = EJ \cdot \chi \\ \chi = \frac{d\varphi}{ds} \\ \varphi = \frac{dv}{ds} \end{cases} \qquad (1)$$

2.2 *Equazione della linea elastica per spostamenti flessionali*

Tramite un processo di sostituzione a catena tra le equazioni del sistema (1), si passerà dalle cinque equazioni del paragrafo precedente ad un'unica equazione: *l'equazione della linea elastica per spostamenti flessionali*, dove l'incognita sarà lo spostamento trasversale *v*.

Sostituendo la quarta equazione nella quinta equazione del sistema (1) si ottiene che la curvatura è uguale alla derivata seconda dello spostamento

$$\chi = \frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right) \rightarrow \chi = \frac{d^2v}{ds^2}$$

Di conseguenza, la terza equazione del sistema (1) diventa

$$\boxed{M = EJ\frac{d^2v}{ds^2}}$$

Sostituendo l'espressione così ottenuta nella seconda equazione del sistema (1) si ottiene che il taglio è proporzionale alla derivata terza dello spostamento.

$$\frac{d}{ds}\left(EJ\frac{d^2v}{ds^2}\right) + T = 0 \rightarrow EJ\frac{d^3v}{ds^3} + T = 0 \rightarrow \boxed{T = -EJ\cdot\frac{d^3v}{ds^3}}$$

Infine, dalla prima equazione del sistema (1) si ricava:

$$\frac{d}{ds}\left(-EJ\cdot\frac{d^3v}{ds^3}\right) + q_2 = 0 \rightarrow q_2 = \left(-EJ\cdot\frac{d^4v}{ds^4}\right) \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^4v}{ds^4} = \frac{q_2}{EJ}}$$ *equazione differenziale della linea elastica*

L'equazione differenziale della linea elastica metter in relazione i carichi agenti su di una trave (dato del problema) con gli spostamenti da essi prodotti (incognite del problema).
Effettuando quattro operazioni di integrazione in sequenza dell'equazione differenziale della linea elastica si ottiene la funzione spostamento in termini generali. Per adattarla al caso particolare occorre attribuire un valore alle quattro costanti di integrazione. Questo è possibile solamente fissando le condizioni al bordo.

Si procede quindi integrando quattro volte l'equazione della linea elastica:

$$\int\frac{d^4v}{ds^4}ds = \int\frac{q_2}{EJ}ds \rightarrow \frac{d^3v}{ds^3} = \frac{q_2}{EJ}s + C_1$$

$$\int\frac{d^3v}{ds^3}ds = \int\left(\frac{q_2}{EJ}s + C_1\right)ds \rightarrow \frac{d^2v}{ds^2} = \frac{q_2}{EJ}\frac{s^2}{2} + C_1s + C_2$$

$$\int\frac{d^2v}{ds^2}ds = \int\left(\frac{q_2}{EJ}\frac{s^2}{2} + C_1s + C_2\right)ds \rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{q_2}{EJ}\frac{s^3}{6} + C_1\frac{s^2}{2} + C_2s + C_3$$

$$\int \frac{dv}{ds} = \int \left(\frac{q_2}{EJ}\frac{s^3}{6} + C_1\frac{s^2}{2} + C_2 s + C_3 \right) ds \rightarrow$$

$$\boxed{v(s) = \frac{q_2}{EJ}\frac{s^4}{24} + C_1\frac{s^3}{6} + C_2\frac{s^2}{2} + C_3 s + C_4} \qquad \textit{spostamento} \qquad (2)$$

Si ottengono inoltre le seguenti equazioni:

$$\boxed{\varphi(s) = \frac{dv}{ds} = \frac{q_2}{EJ}\frac{s^3}{6} + C_1\frac{s^2}{2} + C_2 s + C} \qquad \textit{rotazione} \qquad (3)$$

$$\boxed{M = -EJ\frac{d^2v}{ds^2} = -EJ\left(\frac{q_2}{EJ}\frac{s^2}{2} + C_1 s + C_2 \right)} \qquad \textit{momento} \qquad (4)$$

$$\boxed{T(s) = -\frac{dM(s)}{ds} = -EJ\frac{d^3v}{ds^3} = -EJ\left(\frac{q_2}{EJ}s + C_1 \right)} \qquad \textit{taglio} \qquad (5)$$

Le condizioni al bordo che interessa fissare ai fini della determinazione del valore delle costanti d'integrazione, sono ovviamente legate alle grandezze *v* , *φ, M, T*, di cui abbiamo or ora determinato le funzioni generali.

Si riporta di seguito un esempio di soluzione di una struttura iperstatica, usando il metodo di integrazione della linea elastica.

2.2.1 Esempio: Trave incastro - appoggio

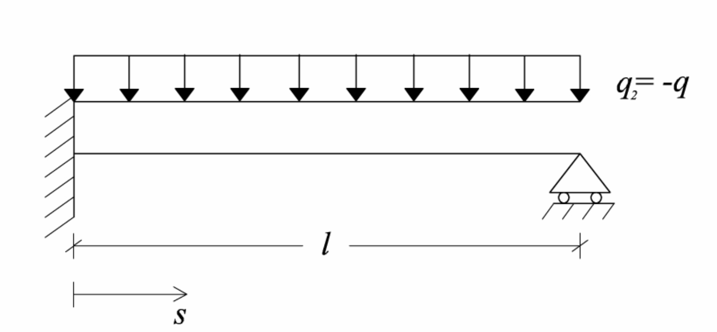

Fig. 2.1

Le condizioni al bordo per la trave in Fig. 2.1 sono:

$$\begin{cases} v(0)=0 \\ \varphi(0)=0 \end{cases} \rightarrow \text{incastro}$$

$$\begin{cases} v(l)=0 \\ M(l)=EJ\dfrac{dv(l)}{ds^2}=0 \rightarrow \dfrac{dv(l)}{ds^2}=0 \end{cases} \rightarrow \text{appoggio}$$

Sostituendo nella equazione (2) la condizione al bordo $v(0)=0$ si ottiene:

$$v(s=0)=0 \rightarrow \boxed{C_4=0}$$

Sostituendo nella equazione (3) la condizione al bordo $\varphi(0)=0$ si ottiene:

$$\varphi(s=0)=0 \rightarrow \boxed{C_3=0}$$

Applicando la condizione al bordo $v(l)=0$, l'equazione (2) diventa:

$$v(s=l)=0 \rightarrow \boxed{-\frac{q}{EJ}\frac{l^4}{24}+C_1\frac{l^3}{6}+C_2\frac{l^2}{2}=0} \qquad (6)$$

Applicando la condizione al bordo $M(l)=0$, l'equazione (4) diventa:

$$M(s=l)=0 \rightarrow \boxed{-\frac{q}{2EJ}l^2+C_1 l+C_2=0} \qquad (7)$$

Risolvendo il sistema delle due equazioni algebriche (6) e (7) nelle due incognite C_1 e C_2

$$\begin{cases} -\dfrac{q}{EJ}\dfrac{l^4}{24}+C_1\dfrac{l^3}{6}+C_2\dfrac{l^2}{2}=0 \\ -\dfrac{q}{2EJ}l^2+C_1 l+C_2=0 \end{cases}$$

Si ottiene

$$\boxed{C_1=\frac{5}{8}\frac{ql}{EJ}}$$

$$\boxed{C_2=-\frac{1}{8}\frac{ql^2}{EJ}}$$

Adesso si sostituendo nell'espressione dello spostamento i valori delle costanti trovati si ricava la funzione spostamento:

$$\boxed{v(s)=-\frac{1}{24}\frac{q}{EJ}s^4+\frac{5}{48}\frac{ql}{EJ}s^3-\frac{1}{16}\frac{ql^2}{EJ}s^2}$$

Si può verificare che l'equazione dello spostamento trovata soddisfa le condizioni al bordo

$v(0) = 0$
$v(l) = 0$

Per disegnare la deformata, determiniamo i valori di massimo e di minimo in corrispondenza dei quali si annulla la derivata della funzione spostamento.
Deriviamo quindi la funzione spostamento, ottenendo la funzione rotazione,

$$\boxed{\varphi(s) = \frac{dv}{ds} = -\frac{q_2}{EJ}\frac{s^3}{6} + \frac{5}{16}\frac{ql}{EJ}s^2 - \frac{ql^2}{8EJ}s}$$

e poniamola uguale a zero:

$$\varphi(s) = \frac{dv}{ds} = -\frac{q_2}{EJ}\frac{s^3}{6} + \frac{5}{16}\frac{ql}{EJ}s^2 - \frac{ql^2}{8EJ}s = 0 \text{ che si può scrivere come}$$

$$\frac{q}{2EJ}s\left(-\frac{s^2}{3} + \frac{5}{8}ls - \frac{l^2}{4}\right) = 0$$

Questa equazione ha una soluzione per s=0 ed un'altra come soluzione dell'equazione di secondo grado

$$-\frac{s^2}{3} + \frac{5}{8}ls - \frac{l^2}{4} = 0 \text{ le cui radici sono} \begin{cases} s = 1.29l \text{ soluzione non accettabile } s > l \\ s = 0.57l \end{cases}$$

I punti di massimo della funzione spostamento si trovano uno in zero e l'altro a $0.57l$ ed avrà valore:

$$v_{\max} = v(0.57l)$$

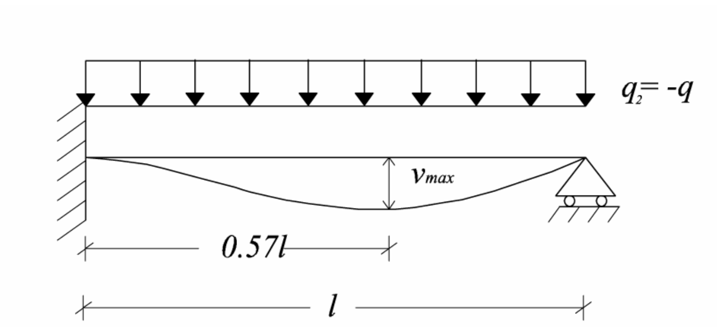

Fig. 2.2

Adesso a partire dalla deformata, si ricavano le altre funzioni ed il valore delle reazioni vincolari nell'ordine:
$\varphi \rightarrow M \rightarrow T \rightarrow R.V.$

$$\boxed{\varphi(s) = \frac{dv}{ds} = -\frac{q_2}{EJ}\frac{s^3}{6} + \frac{5}{16}\frac{ql}{EJ}s^2 - \frac{ql^2}{8EJ}s}$$

$\varphi(0) = 0 \rightarrow$condizione al bordo verificata

$$\varphi(l) = -\frac{q_2}{EJ}\frac{l^3}{6} + \frac{5}{16}\frac{l^3}{EJ} - \frac{ql^3}{8EJ} = \frac{1}{48}\frac{ql^3}{EJ}$$

Adesso calcoliamo M

$$M(s) = EJ\frac{d^2v(s)}{ds^2} = EJ\left(-\frac{qs^2}{2EJ} + \frac{5}{8}\frac{qls}{EJ} - \frac{ql^2}{8EJ}\right) = -\frac{q}{2}s^2 + \frac{5ql}{8}s - \frac{ql^2}{8}$$

Per disegnare l'andamento della funzione momento $M(s)$ necessario calcolare:

1. il valore del momento agli estremi della trave

$$M(s=0) = -\frac{ql^2}{8}$$

$$M(s=l) = -\frac{q}{2}l^2 + \frac{5ql^2}{8} - \frac{ql^2}{8} = 0 \rightarrow \text{condizione al bordo verificata}$$

2. il punto in cui si annulla la derivata del momento $M'(s)$.

$$M'(s) = 0 = qs - \frac{5}{8}ql \rightarrow s = \frac{5}{8}l$$

3. il valore del momento nel punto trovato

$$M\left(s = \frac{5}{8}l\right) = -\frac{1}{2}\frac{25}{64}ql^2 + \frac{25}{64}ql^2 - \frac{1}{8}ql^2 = \frac{9}{128}ql^2$$

4. i punti in cui il momento è nullo

$$M(s) = -\frac{q}{2}s^2 + \frac{5ql}{8}s - \frac{ql^2}{8} = 0 \rightarrow \begin{cases} s = l \\ s = \dfrac{l}{4} \end{cases}$$

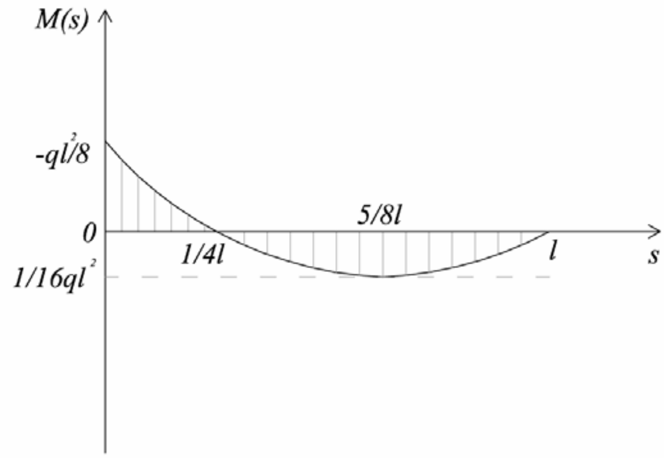

Fig. 2.3

Adesso calcoliamo $T(s) = -\frac{dM}{ds} = -M'(s)$

$$-M'(s) = T(s) = qs - \frac{5}{8}ql$$

$$T(s=0) = -\frac{5}{8}ql$$

$$T(s=l) = ql - \frac{5}{8}ql = \frac{3}{8}ql$$

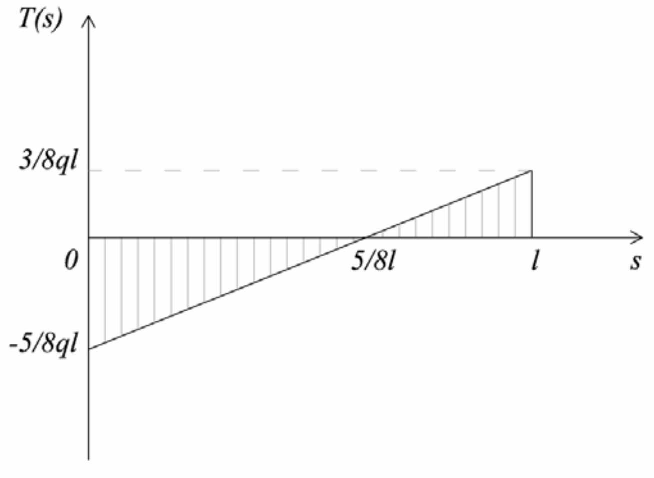

Fig. 2.4

Per trovare le reazione vincolari basta guardare i valori delle funzioni taglio e momento flettente al bordo.

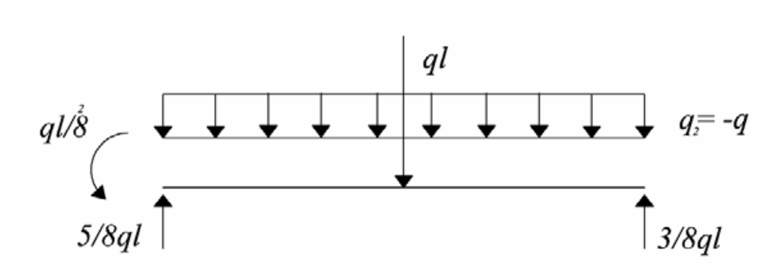

Fig. 2.5

Tali valori corrispondono proprio a quelli delle reazioni vincolari (o di eventuali forze applicate, qualora fossimo in un estremo libero. Ma non è questo il caso).