CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI NELLE STRUTTURE ISOSTATICHE

La linea elastica

Il calcolo degli spostamenti, dovuti ai carichi, su una struttura isostatica, si basa su quattro relazioni fondamentali (che non verranno dimostrate in questa sede).

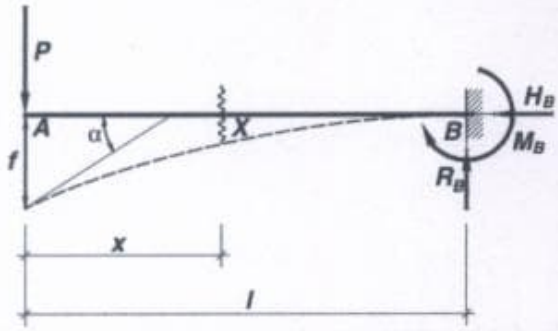
1. $\frac{d'v(x)}{dx} = \varphi_{(x)}$
2. $\frac{d'\varphi(x)}{dx} = \chi_{(x)}$
3. $\frac{d''v(x)}{dx^2} = \chi_{(x)}$
4. $M(x) = E * I * \chi(x)$

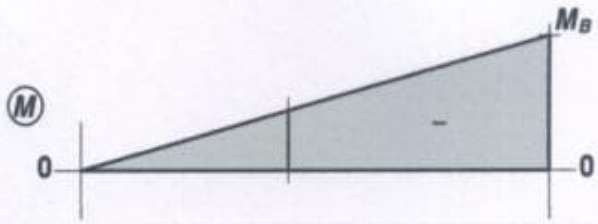
Giova ricordare alcune regole di derivazione e integrazione di polinomi che verranno usate:

5. $\frac{d'x^n}{dx} = n \times x^{n-1}$
6. $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

A questo punto possiamo affrontare alcuni casi specifici e per ognuno di questi diamo per scontata la funzione $M(x)$. Se non è nota è possibile calcolarla con il metodo dei tagli di Cauchy.

a. Trave incastrata di lunghezza l caricata con una forza P al suo estremo libero:





$M(x) = -Px$

$$-P * x = E * I * \chi(x) \quad \Longrightarrow \quad \chi(x) = -\frac{P*X}{E*I}$$

Considerando ora che la $\frac{d'\varphi(x)}{dx} = \chi(x)$ integrando entrambi i termini e sostituendo si

ottiene:

$$\varphi(x) = \int \chi(x) * dx + C_1 = \int -\frac{P*x}{E*I}\, dx + C_1 = -\frac{P}{2*E*I} * x^2 + C_1$$

Si deve ora calcolare il valore di C_1 attraverso le opportune considerazioni al bordo. Questa volta non è possibile conoscere il valore della rotazione per x=0 sappiamo però che $\varphi(l) = 0$ in quanto siamo all'incastro. Possiamo quindi scrivere sostituendo ad x, l e calcolando così C_1.

$$\varphi(l) = 0 = -\frac{P}{2*E*I} * l^2 + C_1 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = \frac{P}{2*E*I} * l^2$$

in fine possiamo scrivere l'equazione completa della rotazione $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{P * l^2}{2 * E * I} - \frac{P}{2 * E * I} * x^2$$

La rotazione massima si avrà per x=0 quindi:

$$\varphi_{max} = \frac{P * l^2}{2 * E * I}$$

Passiamo ora al calcolo della funzione abbassamento cioè $v(x)$.

Ricordando che:

$$\frac{d'v(x)}{dx} = \varphi(x)$$

$$v(x) = \int \varphi(x) * dx + C_2 = \int \left(\frac{P * l^2}{2 * E * I} - \frac{P}{2 * E * I} * x^2 \right) * dx + C_2$$

$$v(x) = \frac{P * l^2}{2 * E * I} * x - \frac{P}{6 * E * I} * x^3 + C_2$$

Calcoliamo ora la costante C_2 considerando che i $v(l) = 0$.

$$v(l) = 0 = \frac{P * l^3}{2 * E * I} - \frac{P * l^3}{6 * E * I} + C_2$$

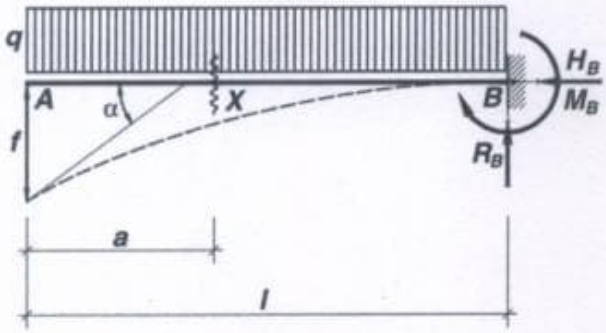
$$C_2 = -\frac{P * l^3}{3 * E * I}$$

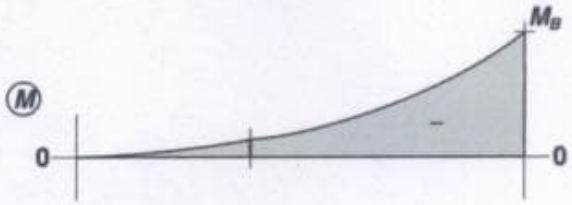
$$v(x) = \frac{P * l^2}{2 * E * I} * x - \frac{P}{6 * E * I} * x^3 - \frac{P * l^3}{3 * E * I}$$

L'abbassamento massimo si avrà all'origine degli assi x=0 e quindi:

$$v_{max} = -\frac{P * l^3}{3 * E * I}$$

b. Trave incastrata di lunghezza l caricata uniformemente





$$M(x) = -\frac{q * x^2}{2}$$

$$-\frac{q*x^2}{2} = E * I * \chi(x) \quad \Rightarrow \quad \chi(x) = -\frac{q*X^2}{2*E*I}$$

Considerando ora che la $\frac{d'\varphi(x)}{dx} = \chi(x)$ integrando entrambi i termini e sostituendo si

Ottiene:

$$\varphi(x) = \int \chi(x) * dx = \int -\frac{q*x^2}{2*E*I}\, dx + C_1 = -\frac{q*x^3}{6*E*I} + C_1$$

Si deve ora calcolare il valore di C_1 attraverso le opportune considerazioni al bordo. La condizione al bordo è $\varphi(l) = 0$ in quanto siamo all'incastro. Possiamo quindi scrivere sostituendo ad x, l e calcolare C_1.

$$\varphi(l) = 0 = -\frac{q*l^3}{6*E*I} + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \frac{q*l^3}{6*E*I}$$

In fine possiamo scrivere l'equazione completa della rotazione $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{q * l^3}{6 * E * I} - \frac{q * x^3}{6 * E * I}$$

La rotazione massima si avrà per x=0 quindi:

$$\varphi_{max} = \frac{q * l^3}{6 * E * I} = \varphi(0)$$

L'abbassamento $v(x)$ sarà:

Ricordando che: $\frac{d'v(x)}{dx} = \varphi(x)$

$$v(x) = \int \varphi(x) * dx = \int \left(\frac{q * l^3}{6 * E * I} - \frac{q * x^3}{6 * E * I} \right) * dx + C_2$$

$$v(x) = \frac{q * l^3 * x}{6 * E * I} - \frac{q * x^4}{24 * E * I} + C_2$$

Calcoliamo ora la costante C_2 considerando che i $v(l) = 0$.

$$v(l) = 0 = -\frac{q * l^4}{6 * E * I} + \frac{q * l^4}{24 * E * I} = C_2$$

$$C_2 = -\frac{q * l^4}{8 * E * I}$$

$$v(x) = \frac{q * l^3 * x}{6 * E * I} - \frac{q * x^4}{24 * E * I} - \frac{q * l^4}{8 * E * I}$$

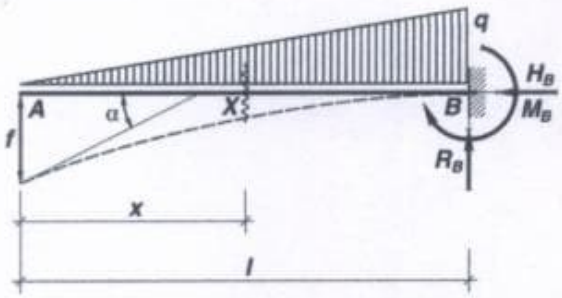
L'abbassamento alla radice dell'asta x=l sarà come previsto nullo:

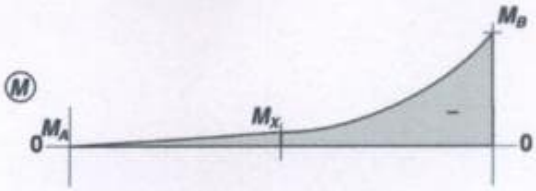
$$v(l) = \frac{q * l^4}{6 * E * I} - \frac{q * l^4}{24 * E * I} - \frac{q * l^4}{8 * E * I} = \frac{4 * q * l^4 - q * l^4 - 3 * q * l^4}{24 * E * I} = 0$$

L'abbassamento massimo si avrà all'origine degli assi x=0 e quindi:

$$v_{max} = -\frac{q * l^4}{8 * E * I} = v(0)$$

c. TRAVE INCASTRATA CON CARICO LINEARE





$$M(x) = -\frac{q * x^3}{6 * l}$$

$$-\frac{q*x^3}{6*l} = E * I * \chi(x) \quad \Rightarrow \quad \chi(x) = -\frac{q*x^3}{6*E*I*l}$$

Considerando ora che la $\frac{d'\varphi(x)}{dx} = \chi(x)$ integrando entrambi i termini e sostituendo si

ottiene:

$$\varphi(x) = \int \chi(x) * dx = \int -\frac{q*x^3}{6*E*I*l}\, dx + C_1 = -\frac{q*x^4}{24*E*I} + C_1$$

Si deve ora calcolare il valore di C_1 attraverso le opportune considerazioni al bordo. La condizione al bordo è $\varphi(l) = 0$ in quanto siamo all'incastro. Possiamo quindi scrivere sostituendo ad x, l e calcolare C_1.

$$\varphi(l) = 0 = -\frac{q*l^4}{24*E*I*l} + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{q*l^3}{24*E*I}$$

in fine possiamo scrivere l'equazione completa della rotazione $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{q * l^3}{24 * E * I} - \frac{q * x^4}{24 * l * E * I}$$

La rotazione massima si avrà per x=0 quindi:

$$\varphi_{max} = \frac{q * l^3}{24 * E * I} = \varphi(0)$$

L'abbassamento $v(x)$ sarà:

Ricordando che:

$$\frac{d'v(x)}{dx} = \varphi(x)$$

$$v(x) = \int \varphi(x) * dx = \int \left(\frac{q * l^3}{24 * E * I} - \frac{q * x^4}{24 * l * E * I} \right) * dx + C_2$$

$$v(x) = \frac{q * l^3 * x}{24 * E * I} - \frac{q * x^5}{120 * l * E * I} + C_2$$

Calcoliamo ora la costante C_2 considerando che i $v(l) = 0$.

$$v(l) = 0 = \frac{q * l^5}{120 * l * E * I} - \frac{q * l^4}{24 * E * I} = \frac{q * l^4}{120 * E * I} - \frac{5 * q * l^4}{120 * E * I} = -\frac{q * l^4}{30 * E * I}$$

$$C_2 = -\frac{q * l^4}{30 * E * I}$$

$$v(x) = \frac{q * l^3 * x}{24 * E * I} - \frac{q * x^5}{120 * l * E * I} - \frac{q * l^4}{30 * E * I}$$

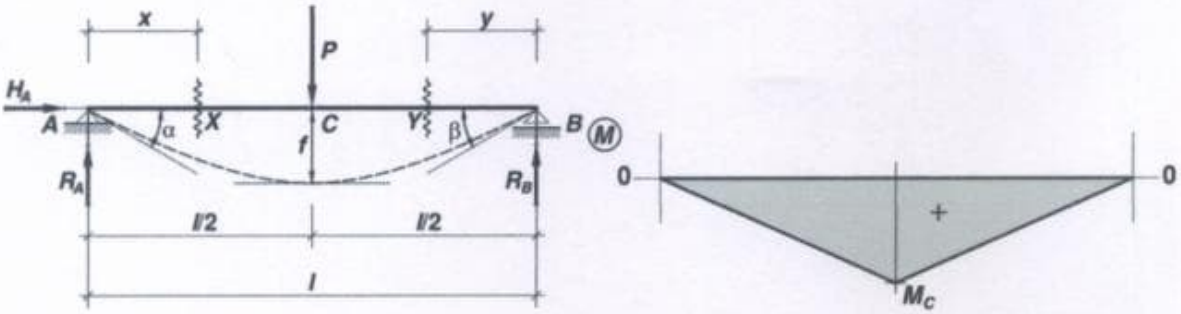
L'abbassamento alla radice dell'asta x=l sarà come previsto nullo, come si vede dalla seguente relazione:

$$v(l) = \frac{q * l^4}{24 * E * I} - \frac{q * l^4}{24 * E * I} - \frac{q * l^4}{8 * E * I} = \frac{4 * q * l^4 - q * l^4 - 3 * q * l^4}{24 * E * I} = 0$$

L'abbassamento massimo si avrà all'origine degli assi x=0 e quindi:

$$v_{max} = v(0) = -\frac{q * l^4}{30 * E * I}$$

d. Trave appoggiata con carico P in mezzeria



$M(x) = \frac{1}{2} * P * x \qquad M(y) = \frac{1}{2} * P * y$

Visto che i diagrammi sono simmetrici, prendiamo in considerazione solo la parte sinistra cioè quei valori di x da 0 a $\frac{l}{2}$.

$$\frac{1}{2} * P * x = E * I * \chi(x) \Rightarrow \quad \chi(x) = \frac{P*x}{2*E*I}$$

Considerando ora che la $\frac{d'\varphi(x)}{dx} = \chi(x)$ integrando entrambi i termini e sostituendo si ottiene:

$$\varphi(x) = \int \chi(x) * dx = \int \frac{P*x}{2*E*I}\, dx + C_1 = \frac{P*x^2}{4*E*I} + C_1$$

Si deve ora calcolare il valore di C_1 attraverso le opportune considerazioni al bordo. La condizione al bordo è $\varphi\left(\frac{l}{2}\right) = 0$ in mezzeria. Possiamo quindi scrivere sostituendo ad x,$\frac{l}{2}$ e calcolare C_1.

$$\varphi\left(\frac{l}{2}\right) = 0 = \frac{P}{4*E*I} * \left(\frac{l}{2}\right)^2 + C_1 \qquad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{P*l^2}{16*E*I}$$

in fine possiamo scrivere l'equazione completa della rotazione $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{P * x^2}{4 * E * I} - \frac{P * l^2}{16 * E * I}$$

La rotazione massima si avrà per x=0 quindi:

$$\varphi_{max} = -\frac{P * l^2}{16 * E * I} = \varphi(0) = \varphi(l)$$

L'abbassamento $v(x)$ in mezzeria sarà:

Ricordando che: $\frac{d'v(x)}{dx} = \varphi(x)$

$$v(x) = \int \varphi(x) * dx = \int \left(\frac{P * x^2}{4 * E * I} - \frac{P * l^2}{16 * E * I}\right) * dx + C_2$$

$$v(x) = -\frac{P * l^2 * x}{16 * E * I} + \frac{P * x^3}{12 * E * I} + C_2$$

Calcoliamo ora la costante C_2 considerando che i $v(0) = 0$.

$$v(0) = 0 = C_2$$

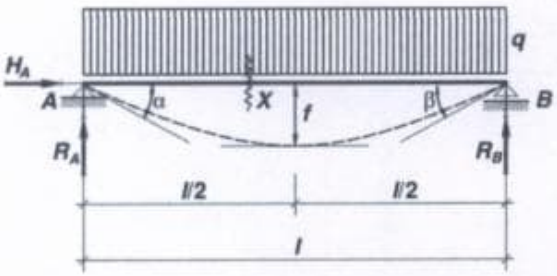
$$v(x) = -\frac{P * l^2 * x}{16 * E * I} + \frac{P * x^3}{12 * E * I}$$

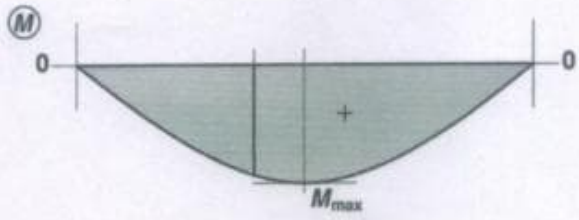
L'abbassamento massimo si avrà in mezzeria x= $\frac{l}{2}$ e quindi:

$$v_{max} = v\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{P * l^2}{16 * E * I} * \frac{l}{2} + \frac{P}{12 * E * I} * \left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{P * l^3}{E * I} * \left(\frac{1}{96} - \frac{1}{32}\right)$$

$$v_{max} = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P * l^3}{48 * E * I}$$

e. TRAVE APPOGGIATA CON CARICO UNIFORME





$$M(x) = \frac{1}{2} * q * (l - x) * x$$

$$\frac{1}{2} * q * (l - x) * x = E * I * \chi(x) \quad \Rightarrow \quad \chi(x) = \frac{1}{2*E*I} * q * (l - x) * x$$

Considerando ora che la $\frac{d'\varphi(x)}{dx} = \chi(x)$ integrando entrambi i termini e sostituendo si ottiene:

$$\varphi(x) = \int \chi(x) * dx = \int \frac{1}{2*E*I} * q * (l - x) * x * \ dx + \ C_1$$

$$\varphi(x) = \int \left(\frac{q * l}{2 * E * I} * x - \frac{q * x^2}{2 * E * I} \right) * \ dx + \ C_1$$

$$\varphi(x) = \frac{q * l}{4 * E * I} * x^2 - \frac{q * x^3}{6 * E * I} + \ C_1$$

$$\varphi\left(\frac{l}{2}\right) = 0 = \frac{q * l}{4 * E * I} * \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{q}{6 * E * I} * \left(\frac{l}{2}\right)^3 + \ C_1$$

$$C_1 = -\frac{q * l^3}{16 * E * I} + \frac{q * l^3}{48 * E * I} = -\frac{q * l^3}{24 * E * I}$$

In fine possiamo scrivere l'equazione completa della rotazione $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{q * l}{4 * E * I} * x^2 - \frac{q}{6 * E * I} * x^3 - \frac{q * l^3}{24 * E * I}$$

La rotazione massima si avrà per x=0 quindi:

$$\varphi_{max} = \varphi(0) = \varphi(l) = -\frac{q * l^3}{24 * E * I}$$

L'abbassamento $v(x)$ in mezzeria:

Ricordando che:

$$\frac{d'v(x)}{dx} = \varphi(x)$$

$$v(x) = \int \varphi(x) * dx = \int \left(\frac{q * l}{4 * E * I} * x^2 - \frac{q}{6 * E * I} * x^3 - \frac{q * l^3}{24 * E * I}\right) * dx + C_2$$

$$v(x) = \int \left(\frac{q * l}{4 * E * I} * x^2 - \frac{q}{6 * E * I} * x^3 - \frac{q * l^3}{24 * E * I}\right) * dx + C_2$$

$$v(x) = \frac{q * l}{12 * E * I} * x^3 - \frac{q}{24 * E * I} * x^4 - \frac{q * l^3}{24 * E * I} * x + C_2$$

Calcoliamo ora la costante C_2 considerando che i $v(0) = 0$.

$$v(0) = 0 = C_2$$

$$v(x) = \frac{q * l}{12 * E * I} * x^3 - \frac{q}{24 * E * I} * x^4 - \frac{q * l^3}{24 * E * I} * x$$

L'abbassamento massimo si avrà in mezzeria x= $\frac{l}{2}$ e quindi:

$$v_{max} = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q * l}{12 * E * I} * \left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{q}{24 * E * I} * \left(\frac{l}{2}\right)^4 - \frac{q * l^3}{24 * E * I} * \left(\frac{l}{2}\right)$$

$$v_{max} = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q * l^4}{96 * E * I} - \frac{q * l^4}{384 * E * I} - \frac{q * l^4}{48 * E * I}$$

$$v_{max} = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q * l^4}{E * I} - \frac{4 - 1 - 8}{384} = \frac{5}{384} * \frac{q * l^4}{E * I}$$

$$v_{max} = \frac{5}{384} * \frac{q * l^4}{E * I}$$