

## 1) PREMESSA

La teoria elastico lineare del continuo di Cauchy è basata sulle seguenti equazioni: di bilancio, di congruenza della deformazione e di legame costitutivo. Questi gruppi di equazioni (bilancio, deformazione e legame costitutivo) sono presenti in ogni teoria meccanico strutturale (teoria della trave, delle travature reticolari etc.).

Le equazioni di legame costitutivo sono equazioni algebriche e legano la **tensione di Cauchy** ( $\sigma$ ) alla deformazione ( $\epsilon$ ) in un nesso di causa ed effetto; esse contengono tutte le informazioni necessarie per definire il comportamento meccanico del materiale di cui il continuo è composto. Le equazioni più semplici di legame costitutivo definiscono un materiale elastico lineare, omogeneo ed isotropo. L'isotropia implica che l'intero comportamento sia definito da due sole costanti elastiche, che possono essere individuate nel modulo di elasticità normale (**E**), o modulo di Young, ed nel **coefficiente di Poisson** ( $\nu$ ). Queste due grandezze sono specifiche del materiale in esame e si misurano in laboratorio da semplici prove di stato tensionale monoassiale.

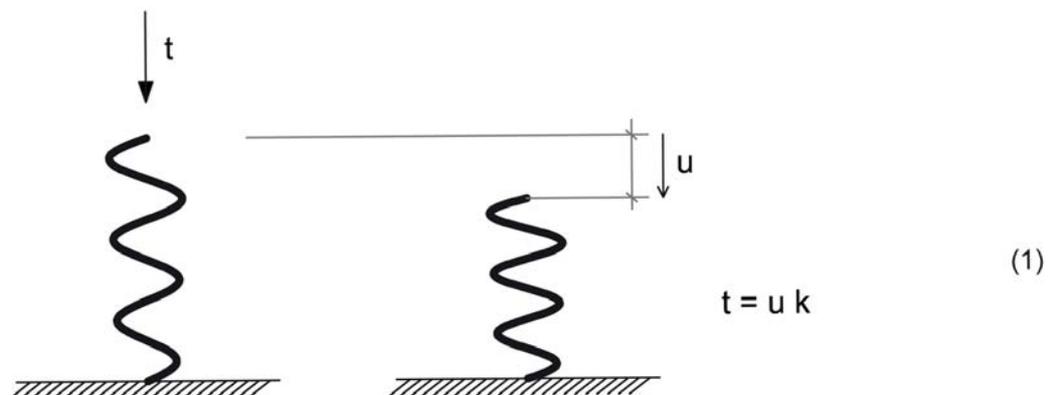
Le parole elastico lineare omogeneo ed isotropo necessitano di essere definite. La parola **elastico** definisce un materiale in cui il valore della tensione è funzione (nel senso dell'analisi matematica) del solo valore della deformazione attuale e non della storia di deformazione cui il materiale è stato sottoposto. In questo senso, la parola elastico diventa sinonimo di reversibile. La parola **lineare** caratterizza questa funzione, richiedendo che essa sia additiva ed omogenea.

Questa richiesta, che si formalizza come segue:

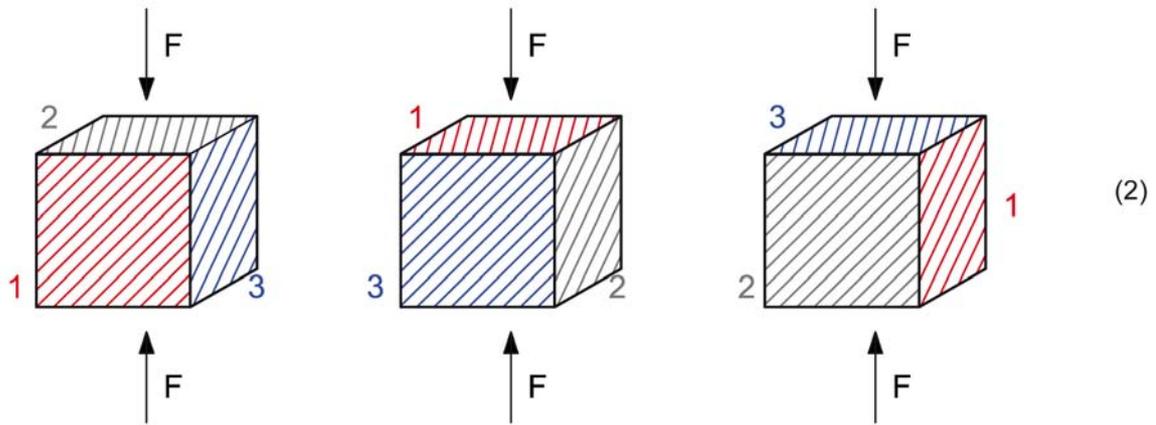
$$\begin{cases} f(\epsilon_1 + \epsilon_2) = f(\epsilon_1) + f(\epsilon_2) & \forall \epsilon_1, \epsilon_2 \\ f(\alpha \epsilon_1) = \alpha f(\epsilon_1) & \forall \alpha \in R \end{cases} \quad (a)$$

$$f(0) = 0$$

Ha come ulteriore implicazione che a **deformazione nulla corrisponda tensione nulla**, e viceversa. In poche parole, la legge elastico lineare estende al **continuo di Cauchy**, la **legge di Hooke**, utilizzata per definire il comportamento meccanico di una molla, sancendo la proporzionalità diretta tra forza ed accorciamento della molla (**sic tensio ut vis**).



Un comportamento materiale si dice **isotropo** se il suo comportamento meccanico, ossia la tensione che nasce nel materiale per effetto di uno stato di deformazione, non dipende da come un suo provino cubico è orientato nello spazio.

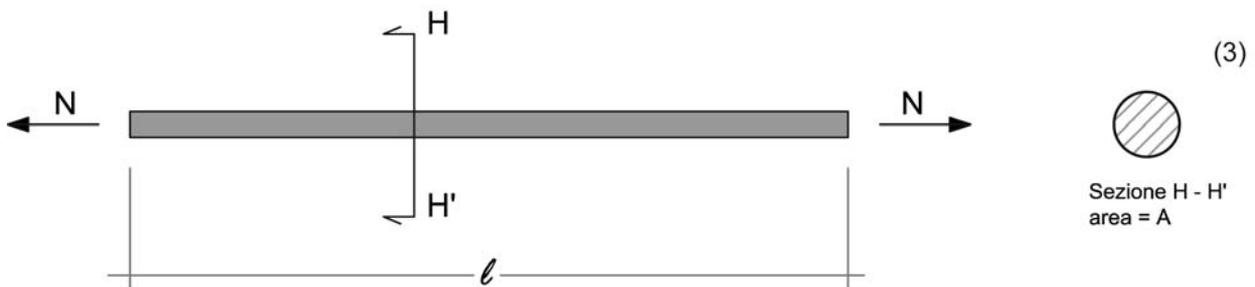


L'isotropia implica la presenza di due sole costanti elastiche indipendenti nella definizione del legame costitutivo (si dimostra) . Nel caso in esame, a volte ne compaiono tre, ( $E$ ), ( $G$ ) e ( $\nu$ ), ma due sole di queste sono indipendenti, e la terza è legata funzionalmente alle altre due.

Un materiale si dice **omogeneo** se il suo comportamento meccanico non dipende dal punto del corpo da cui è estratto il provino cubico.

## 2) INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLA PLASTICITA'

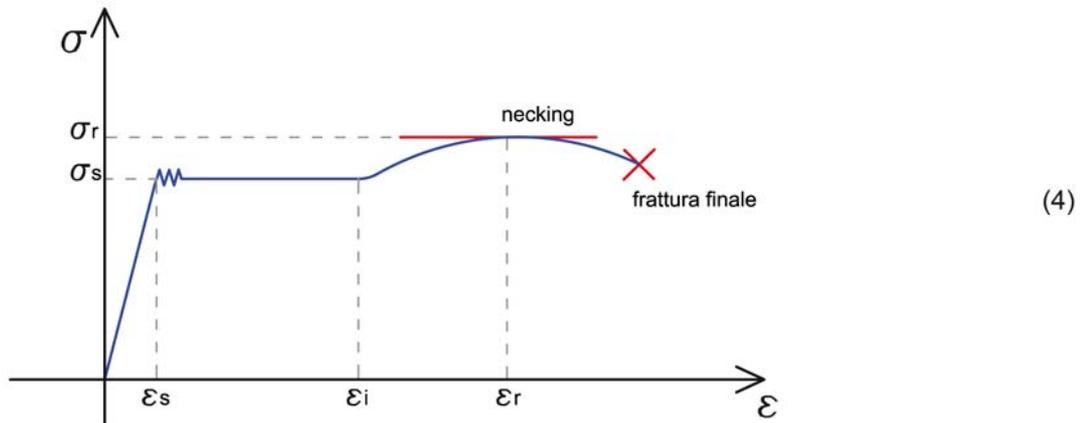
Tralasciando per ora i concetti di omogeneità ed isotropia, parliamo dei limiti dell'ipotesi di elasticità lineare. Il legame tra tensione e deformazione è lungi dall'essere lineare, pur ammettendo tratti di linearità in vicinanza della configurazione a tensione e deformazione entrambe nulle. Ad ogni modo, la tensione non può crescere all'infinito perché è limitata superiormente dalla resistenza del materiale, e questa informazione fisica è trascurata dall'ipotesi di elasticità lineare. Per quanto riguarda la deformazione, questa non è del tutto reversibile. Inoltre, la deformazione medesima, dipende anche da altri fattori oltre che dalla tensione, come la temperatura, la velocità di applicazione del carico, dallo stato preesistente, dal semplice scorrere del tempo. Ovviamente, questi comportamenti dipendono dal materiale, dalla sua natura chimico-fisica e dalla tecnologia costruttiva che li ha prodotti. Una semplice **prova di trazione monoassiale** su di un provino cilindrico ci consentirà di mettere in evidenza molti degli aspetti meccanici sopra citati e di introdurre una adeguata nomenclatura.



Il provino metallico, di lunghezza ( $l$ ) e di sezione circolare di area ( $A$ ) sia soggetto ad allungamento progressivo tramite utilizzo di una macchina che controlli lo spostamento relativo ( $\Delta l$ ) delle due sezioni di estremità. La medesima macchina misura la forza ( $F$ ) necessaria per imporre al provino la lunghezza desiderata. Si possono quindi definire una tensione nominale ( $\sigma$ ) ed una deformazione nominale ( $\epsilon$ ), come di seguito indicato:

$$\sigma = N/A \qquad \epsilon = \Delta l/l$$

Se a valle della prova diagrammiamo l'andamento della tensione nominale ( $\sigma$ ) in funzione della deformazione nominale ( $\epsilon$ ), il diagramma avrà la seguente forma:



In figura (4) possiamo distinguere tre zone:

- 1) **zona 1**: il comportamento del materiale è **elastico lineare** dall'origine degli assi fino ad un punto (detto di snervamento) individuato dai seguenti valori caratteristici ( $\epsilon_s, \sigma_s$ );
- 2) **zona 2**: la deformazione cresce, nonostante che la tensione si mantenga costante e pari alla tensione di snervamento ( $\sigma_s$ ), fino ad un punto, detto di incrudimento, individuato dai valori ( $\epsilon_i, \sigma_s$ );
- 3) **zona 3**: la tensione comincia a risalire con un andamento non lineare. Questa fase, detta di **incrudimento**, termina nel punto di massima tensione ( $\epsilon_r, \sigma_r$ ). La frattura, ossia la divisione del provino in due parti, avviene poco dopo.

Alle tre zone così differenziate, corrispondono diversi comportamenti **a livello macroscopico**, ossia



osservabili e misurabili. Nella **fase elastica** il provino si comporta come una **trave di S.Venant**, ossia si allunga e, al contempo, la sezione circolare si contrae per **effetto Poisson**. La prova è difatti una prova di tensione monoassiale, ma non di deformazione monoassiale. La deformazione è in realtà triassiale, proprio per effetto della contrazione laterale. Tuttavia, è elastica, ossia reversibile.

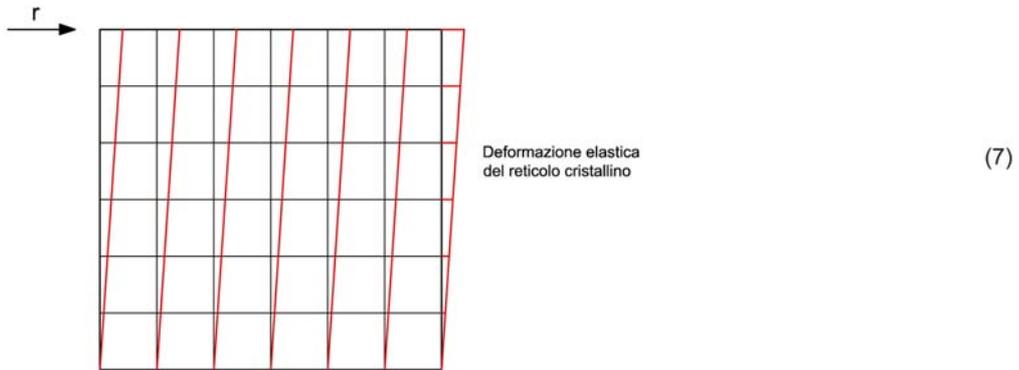
Nella **fase di snervamento** la deformazione rimane uniforme sul provino. La sezione, cioè, rimane la medesima per tutta la lunghezza del provino. Tuttavia, la deformazione cresce (sia in termini di allungamento percentuale, sia di contrazione laterale) senza che si registri un aumento di tensione. E questa deformazione non è tutta reversibile. Ovviamente, ci si accorge dell'irreversibilità di una parte di deformazione, solo se il provino viene scaricato, ossia la tensione viene portata, con la stessa velocità di carico, al suo valore nullo. A provino completamente scarico, la deformazione non si annulla del tutto, rivelando una deformazione residua, detta **deformazione plastica**.

Nella fase di incrudimento, la deformazione continua a crescere uniformemente fino al valore ( $\epsilon_r$ ). In questa configurazione, a livello macroscopico il provino presenta una sezione in cui si forma uno strozzamento o **necking**. La deformazione non è quindi più uniforme e continua a localizzarsi nella regione in cui questo strozzamento ha avuto origine, fino a rottura del provino medesimo.

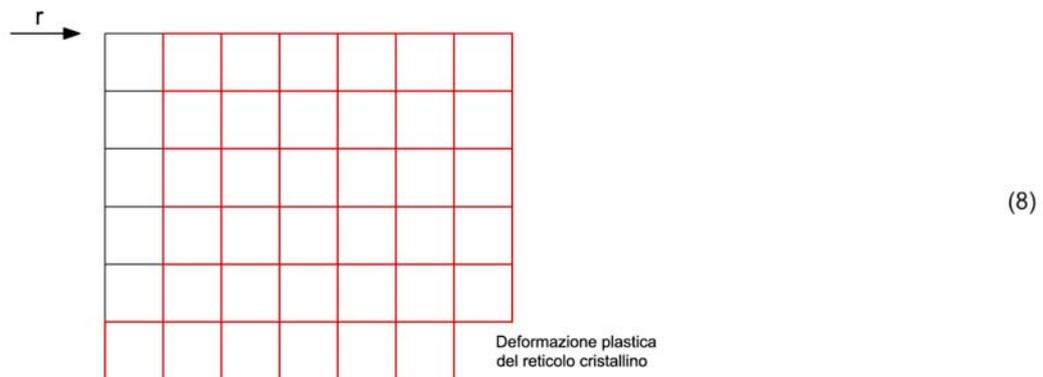


La fenomenologia macroscopica ha una sua spiegazione a livello **microscopico** a scala nanometrica, ossia alla scala in cui sia visibile il reticolo cristallino. Dal punto di vista della fisica dello stato solido, i metalli hanno una natura microscopica **cristallina**, ossia con gli atomi disposti ordinatamente in strutture tridimensionali regolari, denominate **reticoli cristallini**, caratterizzate da una cella di base (variabile all'interno di una classe di quattordici tipi fondamentali, detti **reticoli di Bravais**) che si ripete ordinatamente

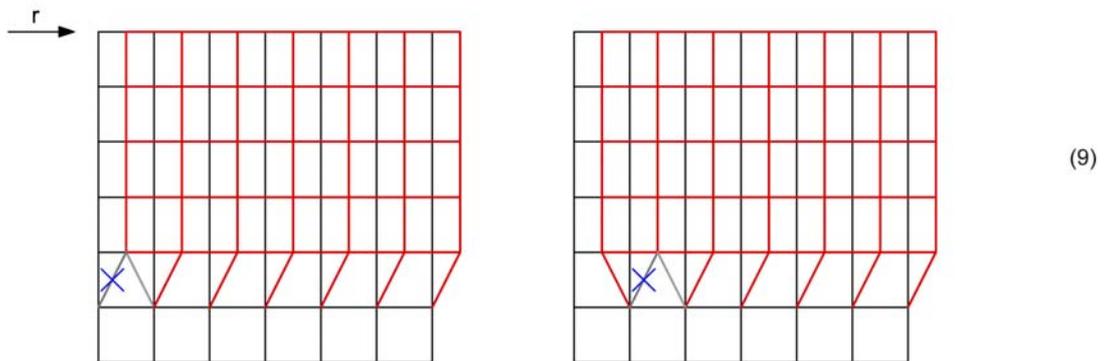
nello spazio. Ciò premesso, la fase elastica a livello macroscopico corrisponde ad una deformazione anche essa reversibile del reticolo cristallino.



Analogamente, anche la fase di snervamento macroscopica corrisponde all'insorgere di deformazioni plastiche del reticolo medesimo, spesso coincidenti con scorrimenti permanenti di una parte del reticolo rispetto al resto.



Un fenomeno siffatto non è istantaneo, ma è caratterizzato dalla rottura progressiva di vecchi legami atomici seguita dalla ricostruzione anch'essa progressiva di nuovi. Questa rottura e ricostruzione progressiva del reticolo cristallino prende il nome di **dislocazione** che viaggia nel reticolo.



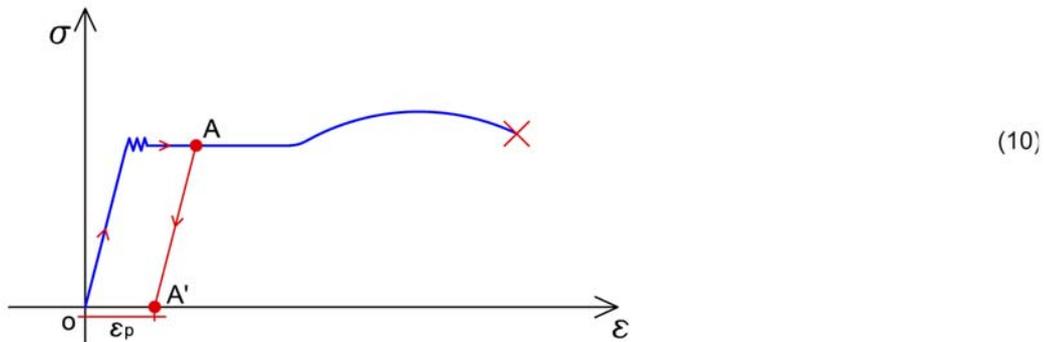
Nella fase di incrudimento, le varie dislocazioni del reticolo cristallino che viaggiano nel materiale, si addensano finendo per ostacolarsi vicendevolmente. Questo contrasto reciproco tra le dislocazioni conferisce al materiale una nuova rigidità e difatti, a livello macroscopico, la tensione cresce ancora fino alla fase di rottura.

Torniamo al diagramma ( $\sigma$ - $\epsilon$ ). La presenza e l'estensione della fase di snervamento induce una classificazione dei materiali in **duttili** o **fragili**.

Un materiali si considera più o meno duttile a seconda di quanto sia grande il valore ( $\epsilon_f - \epsilon_S$ ). I materiali metallici hanno questo intervallo relativamente grande, di valore pari a 1-2% e sono generalmente ritenuti materiali duttili. Un materiale in cui manchi la fase di snervamento e la successiva fase incrudente si dice fragile. I materiali ceramici (le malte, i mattoni, il cemento, le pietre naturali, il vetro etc) sono generalmente fragili.

Tuttavia, le temperature basse e le elevate velocità di carico tendono ad infragilire i materiali; al converso, temperature elevate e base velocità di carico ne aumentano la duttilità.

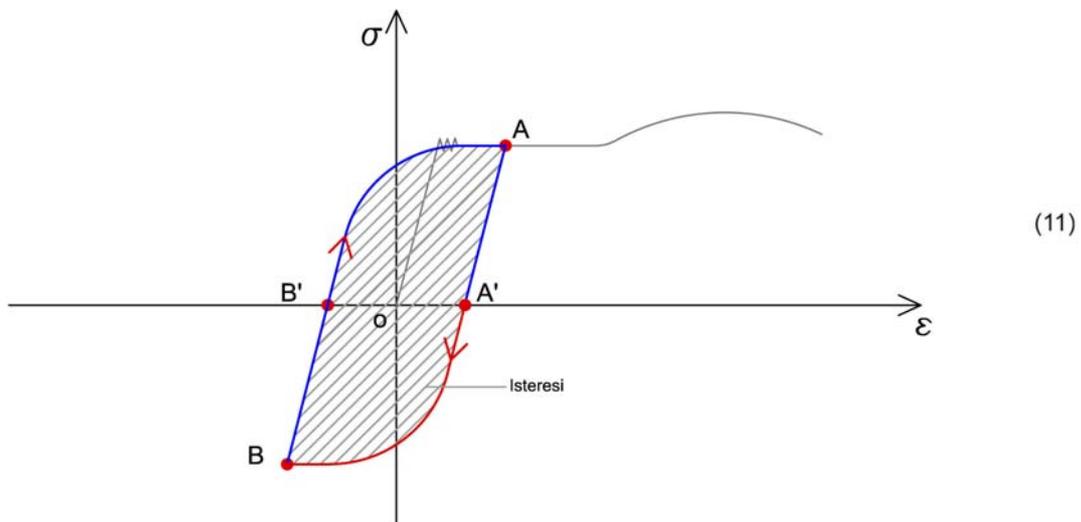
La duttilità di un materiale è alla base della capacità che un materiale ha di dissipare energia per **isteresi**. Per illustrare questo fenomeno, ripetiamo la prova monoassiale, non più con un andamento progressivo, ma con un andamento ciclico. Effettuiamo cioè una prova monoassiale con un andamento ciclico di carico e scarico del provino.



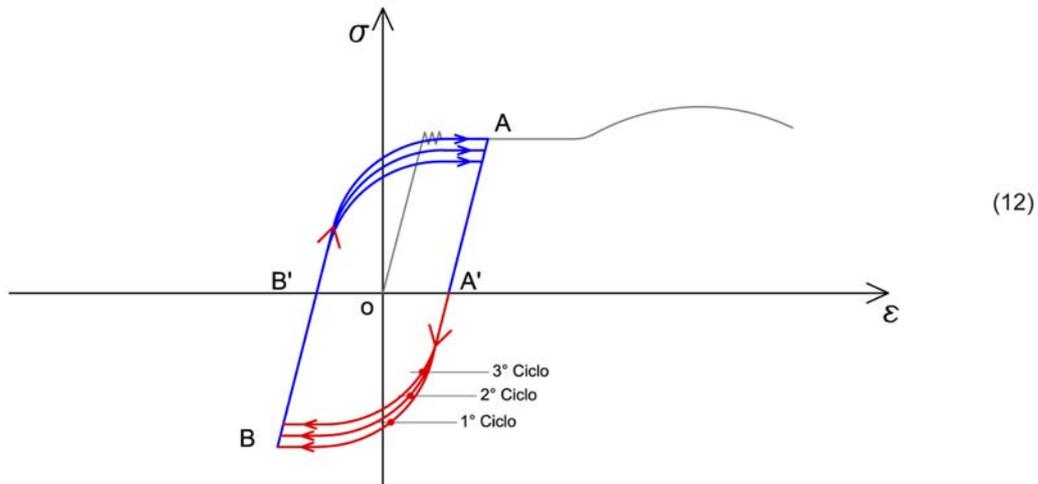
Dopo una fase di allungamento progressivo che porti lo stato del materiale dal punto (O) al punto (S) e poi fino al punto (A) del diagramma in figura (fase di carico), effettuiamo una fase di scarico, portando il materiale a tensione nulla. Si registra che:

- 1) il **tratto di scarico** (da A ad A') è parallelo al **tratto di carico** (da O ad S) iniziale;
- 2) Allo scarico totale (ossia a  $\sigma=0$ ) c'è una deformazione residua (deformazione plastica  $\epsilon_p$ )

Se ora cambiamo il segno alla tensione, passando ad uno stato di compressione monoassiale, e proseguiamo la prova accorciando progressivamente il provino, si verificano altri fenomeni molto interessanti:



- 1) La curva nel ramo compresso si rivela più regolare, non presentando più la brusca transizione dello snervamento (**effetto Bauschinger**) (da A' a B)
- 2) Un ulteriore scarico da (B) a (B') avviene sempre con la medesima pendenza di (O-S) e di (A-A') e rivela sempre a presenza di deformazioni residue, anche se di segno opposto.
- 3) In un ciclo completo di carico e scarico si genera isteresi (si dissipa cioè energia proporzionale all'area racchiusa dalla curva (A-A')-(B-B'))
- 4) In cicli successivi di carico e scarico il valore di snervamento si abbassa. Questo fenomeno è detto di **fatica** del materiale.



### 3) A PROPOSITO DI ISTERESI

Dimostriamo ora quanto anticipato sopra, ossia che l'area racchiusa dalla curva nel piano  $(\sigma-\varepsilon)$ , che individua il comportamento del materiale in un ciclo completo di carico e scarico, è una misura dell'energia dissipata dal materiale medesimo.

Partiamo dal **teorema della potenza**, che sancisce l'eguaglianza della **potenza esterna** ( $P^E$ ), ossia quella spesa dai carichi esterni per un generico campo di velocità, con la **potenza interna**  $P^I$ , spesa dalle azioni di contatto in equilibrio con i carichi esterni per la velocità di deformazione legata al campo di velocità, ossia:

$$p^e = p^i$$

ovvero

$$\int_A \underline{b} \cdot \underline{v} \, dA + \int_{\delta A} \underline{t} \cdot \underline{v} \, ds = \int_A (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + 2T\gamma) \, dA$$

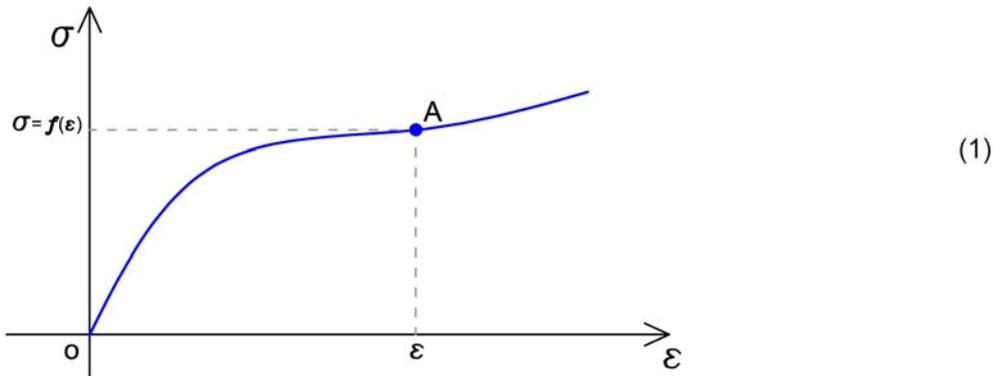
Essendo la potenza la derivata rispetto al tempo del **lavoro**, il teorema della potenza implica l'eguaglianza del lavoro delle forze esterne e delle forze interne in un dato intervallo temporale:

$$\int_0^{t^i} d\mathcal{L} = \int_0^{t^i} p^e \, dt = \int_0^{t^i} p^i \, dt$$

Quando le forze di contatto hanno una natura elastica, allora il lavoro speso dalle forze esterne rimane conservato nel materiale sotto forma di **energia di deformazione**. Definiamo quindi l'energia di deformazione e vediamo cosa accade ad essa in un ciclo di carico e scarico. Ipotizziamo nuovamente una prova di carico monoassiale su di un provino di materiale elastico non lineare, caratterizzato dalla seguente funzione costitutiva:

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

il cui grafico è riportato in figura (1)



Supponiamo che all'istante ( $t=0$ ) lo stato del materiale sia rappresentato nel diagramma ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) in figura dall'origine degli assi cartesiani, mentre a ( $t=t_1$ ) lo stato del materiale sia rappresentato dal punto A. Il lavoro speso dalle forze esterne, pari a quello speso dalle forze di contatto, nell'intervallo temporale  $[0, t_1]$  varrà:

$$\int_0^{t_1} p^i dt = \int_0^{t_1} \left( \int_A \sigma \epsilon dA \right) dt$$

Dove (**A**) è la regione occupata dal provino nella sua configurazione iniziale. Poiché (**A**) non dipende dalla variabile tempo, i due domini di integrazione potranno essere invertiti, ottenendosi dunque:

$$\int_A \left( \int_0^{t_1} \sigma \epsilon dt \right) dA$$

La funzione integrata su (**A**) è la densità rispetto al volume del lavoro delle forze di contatto, ovvero è il lavoro speso dalle forze interne su di un provino di volume unitario. Essa è espressa come integrale rispetto alla variabile tempo, parametro fisico che scandisce il progredire della deformazione  $\epsilon(t)$  e della tensione:

$$\sigma(t) = f(\epsilon(t))$$

Quest'ultima diventa anche essa funzione del tempo per il tramite della deformazione. L'espressione della densità volumetrica del lavoro delle forze di contatto può essere modificata, a mezzo di un cambiamento di variabile, da integrale rispetto alla variabile tempo ad integrale rispetto alla variabile deformazione. Varrà dunque:

$$\int_0^{t_1} \sigma(t) \epsilon(t) dt = \int_0^{\epsilon_1} \sigma(\epsilon_1) d\epsilon$$

Dove

$$\epsilon_1 = \epsilon(t_1)$$

L'integrale a secondo membro rappresenta l'area sottesa dalla curva ( $\sigma = f(\epsilon)$ ) nell'intervallo  $[0, \epsilon_1]$ . Se la funzione è integrabile, esisterà una primitiva  $F(\epsilon)$  tale che:

$$\int_0^{\epsilon_1} f(\epsilon) d\epsilon = F(\epsilon_1) - F(0)$$

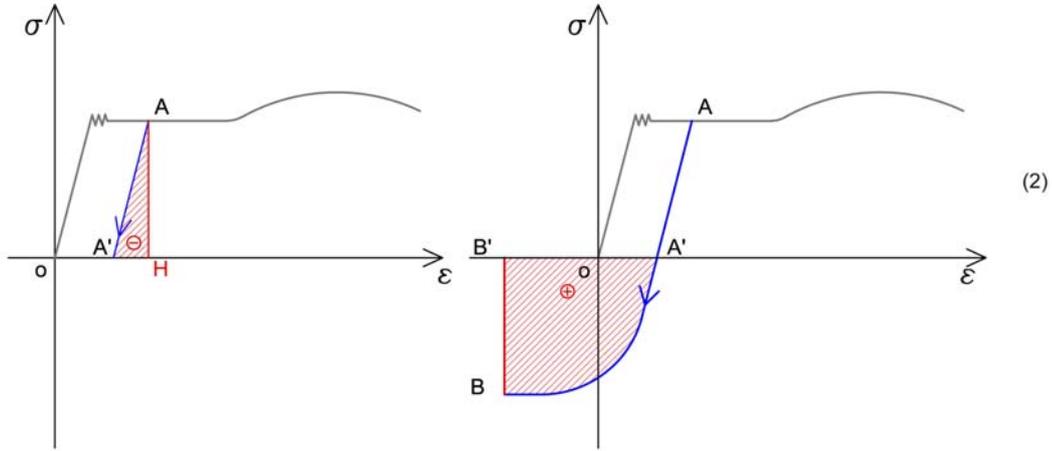
Se ora effettuiamo il percorso a ritroso, passando dallo stato (**A**) allo stato (**O**), il lavoro speso dalle forze interne varrà:

$$\int_{\epsilon_1}^0 f(\epsilon) d\epsilon = - \int_0^{\epsilon_1} f(\epsilon) d\epsilon = F(0) - F(\epsilon_1)$$

Quindi nell'intero ciclo di carico e scarico, passando da (O) ad (A) e poi da (A) ad (O), il lavoro complessivo speso dalle forze esterne è nullo.

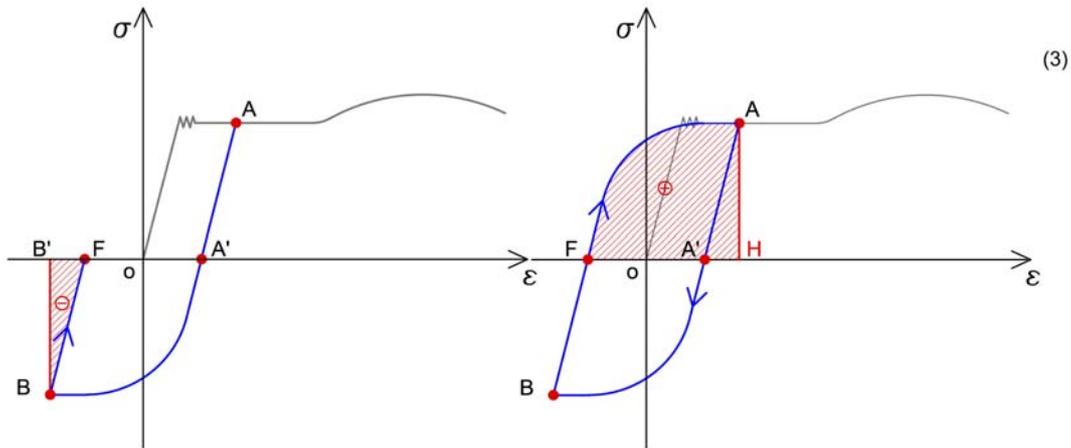
Nel caso di un fenomeno isteretico, quello che accade è messo in evidenza dalle figure che seguono:

- 1) Nel tratto di scarico da (A) ad (A') il lavoro compiuto dalle forze interne è pari all'area del triangolo **[AA'H]** ed ha valore negativo (perché a valori positivi della variabile dipendente  $[\sigma > 0]$  corrispondono incrementi negativi  $[\Delta \epsilon < 0]$  della variabile indipendente, e quindi  $[\sigma \Delta \epsilon < 0]$ ).



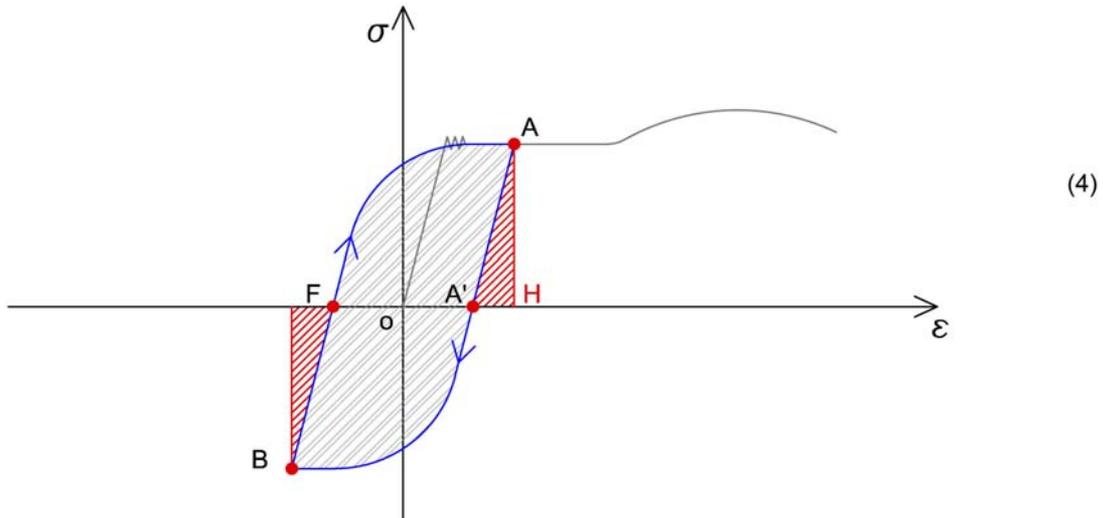
- 2) Se continuo la prova caricando con segno opposto, ossia procedendo da (A') a (B), il lavoro compiuto è pari all'area della regione **[A'B'B']** ed ha valore positivo (perché a valori negativi della variabile dipendente  $[\sigma < 0]$  corrispondono incrementi negativi  $[\Delta \epsilon < 0]$  della variabile indipendente, e quindi  $[\sigma \Delta \epsilon > 0]$ ).

- 3) Effettuando nuovamente uno scarico lungo il tratto (BF), viene compiuto un lavoro pari all'area del triangolo **[BB'F]** e di valore negativo (a valori negativi della variabile dipendente  $[\sigma < 0]$  corrispondono incrementi positivi  $[\Delta \epsilon > 0]$  della variabile indipendente, e quindi  $[\sigma \Delta \epsilon < 0]$ ).



- 4) Ricaricando da (F) ad (A), il lavoro speso sarà pari all'area della regione **[FAH]** e sarà positivo (a valori positivi di  $[\sigma > 0]$  corrispondono incrementi positivi  $[\Delta \epsilon > 0]$  e quindi  $[\sigma \Delta \epsilon > 0]$ ).

- 5) In un ciclo completo di carico e scarico, ossia nell'attraversare tutta la curva chiusa toccando tutti i punti **[AA'B'F]** e poi di nuovo (A), tutti i contributi ottenuti nei punti precedenti si sommano con il loro segno, alcuni si elidono, e rimane un contributo positivo pari all'area della regione racchiusa dalla curva **[AA'BFA]**.

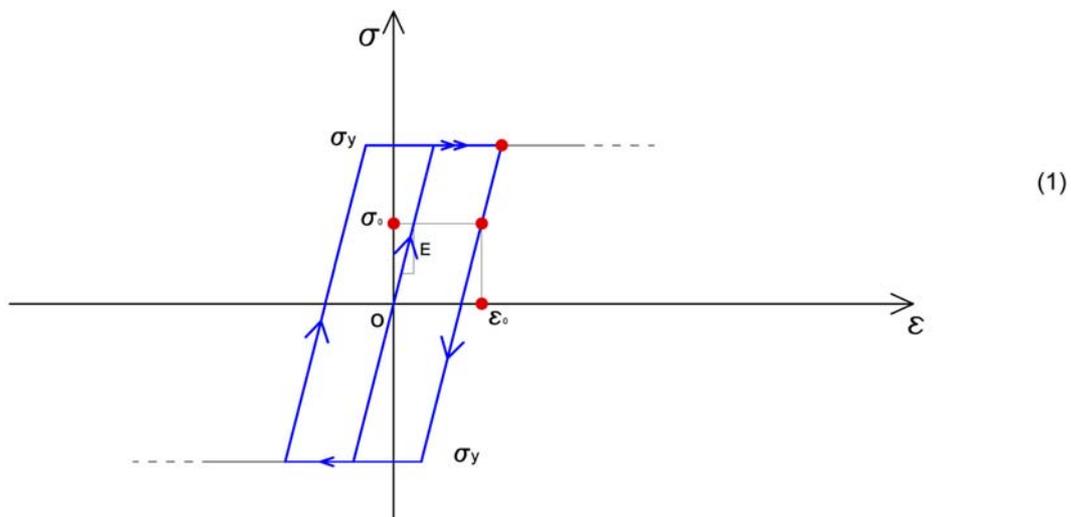


Pertanto, in un intero ciclo di carico e scarico partendo dallo stato (A) e ritornando allo stato (A), le forze esterne, e quindi le forze interne, spendono lavoro positivo. Il materiale è tornato nello stato (A), ma dell'energia è stata spesa (dissipata) o sotto forma di calore, o per riorganizzare la microstruttura del materiale.

#### 4) IL LEGAME ELASTO-PLASTICO PERFETTO

La complessità fenomenologica descritta precedentemente viene formalizzata in un modello matematico detto "modello costitutivo elasto-plastico ideale o perfetto".

In questo modello idealizzato vengono effettuate alcune semplificazioni: gli effetti della temperatura e della velocità di carico vengono trascurati, considerato che il range di variazioni di entrambi nella vita media delle strutture è limitato (si escludono esplosioni ed incendi). Viene trascurato l'incrudimento e, a meno di casi particolari, la deformazione non viene limitata superiormente. Il modello costitutivo così idealizzato viene rappresentato nel piano  $\sigma$ - $\epsilon$  come una bilatera, con un punto di spigolo allo snervamento, con duttilità



illimitata e con comportamento identico a trazione e compressione.

Un modello siffatto ben si adatta a rappresentare il comportamento a rottura dei materiali metallici o comunque duttili.

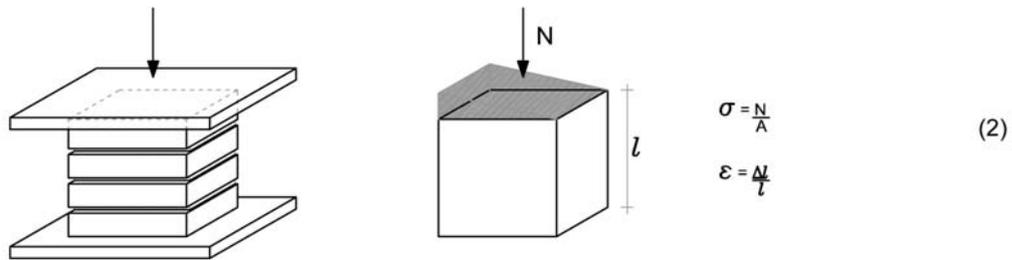
Già con l'ausilio della sola prova monoassiale e con la teoria della trave potremmo modellare il comportamento meccanico dei travi, telai e travature reticolari allo scopo di valutare il carico di collasso

plastico delle medesime. Quest'ultimo è definito come quel valore del carico esterno al di là del quale non sussiste più l'equilibrio statico della struttura in esame. Se ne parlerà più avanti.

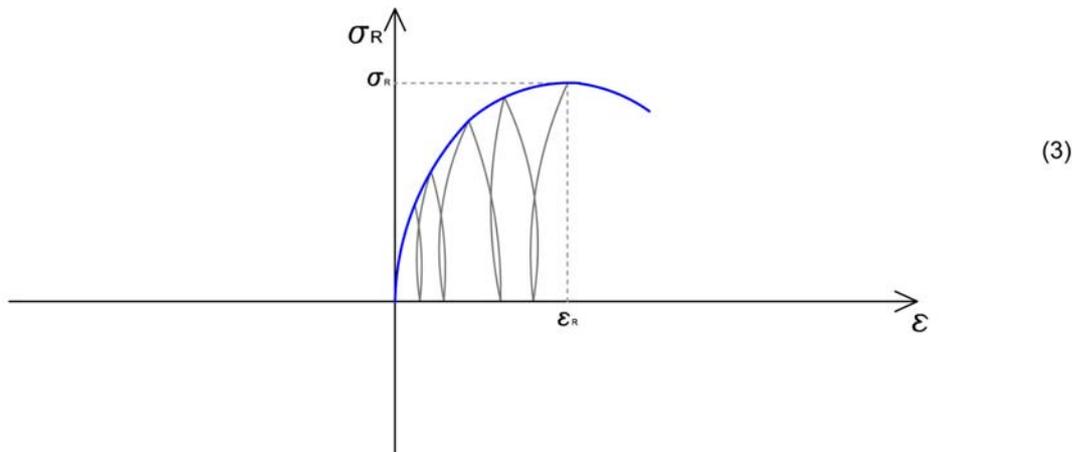
## 5) PROVE SU MATERIALE MURARIO

Non tutti i materiali hanno lo stesso comportamento a trazione e a compressione. I materiali ceramici infatti sono caratterizzati da un comportamento a compressione ben diverso da quello a trazione. Un particolare materiale ceramico a cui siamo molto interessati è il materiale murario. Il termine "materiale murario" individua una classe di materiali, estremamente variegata al suo interno, ma con alcune costanti, ossia la presenza di unità abbastanza rigide (blocchi di pietra, mattoni, pezzi di pietrame) tenute assieme da un legante (malte di calce, calce e pozzolana, malte cementizie, etc). Anche nel caso di spiccate caratteristiche di regolarità geometrica (blocchi prismatici tutti della stessa forma, tessiture periodiche etc) e meccanica, il materiale murario è certamente non omogeneo, non isotropo, certamente non elastico-lineare.

Se effettuiamo una prova di compressione su di un muretto e ne diagrammiamo il risultato in termini di tensione nominale ( $\sigma$ ) e deformazione nominale ( $\epsilon$ ), ci troviamo di fronte al seguente risultato:



L'analisi del grafico rivela le seguenti caratteristiche:



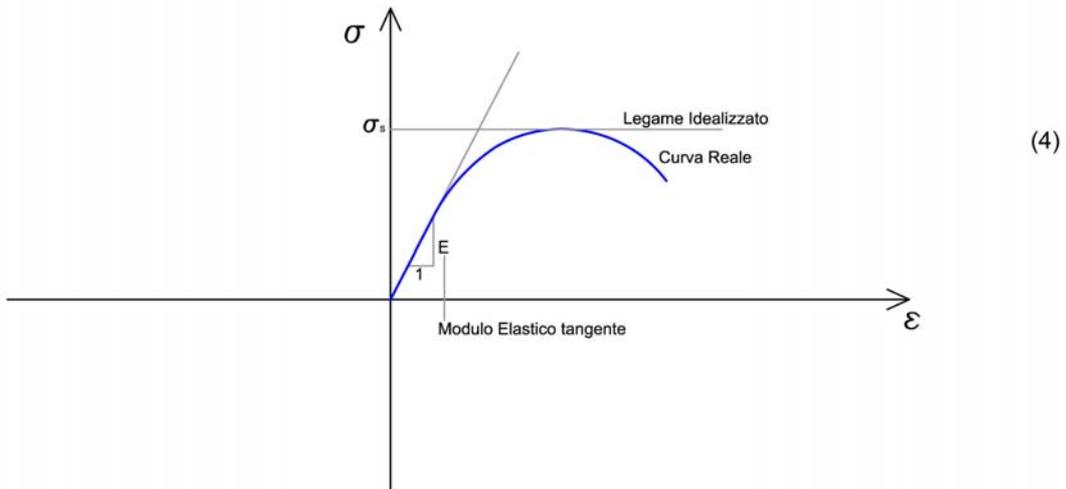
- 1) il comportamento del materiale è ben distante dall'elasticità lineare: la curva difatti non rivela tratti lineari; inoltre non rivela neanche uno specifico punto di crisi, a cui attribuire il significato di valore di snervamento.
- 2) Mancando un tratto lineare, risulta difficile definire un modulo di elasticità a compressione. Possiamo definire un modulo tangente (il coefficiente angolare della retta tangente nell'origine degli assi) o vari moduli secanti (coefficienti angolari di rette secanti).
- 3) Se da uno stato qualsiasi (anche a valori molto bassi della tensione) effettuiamo uno scarico fino a tensione nulla, registriamo la presenza di deformazioni anelastiche (residue). Se a questo scarico facciamo seguire un nuovo processo di carico, osserveremo che la curva riparte con un coefficiente angolare più basso della curva di scarico. Se alterniamo vari cicli di carico e scarico (sempre fino a tensione nulla, senza invertire il segno della tensione) ogni volta ripartiremo con un coefficiente angolare più basso. Questo fenomeno, detto di **danneggiamento**, è un fenomeno di degrado del materiale, che tiene conto della presenza di uno

stato di progressiva fessurazione invisibile ad occhio nudo, ma con effetti meccanici ben precisi, ossia una progressiva diminuzione del modulo di elasticità del materiale.

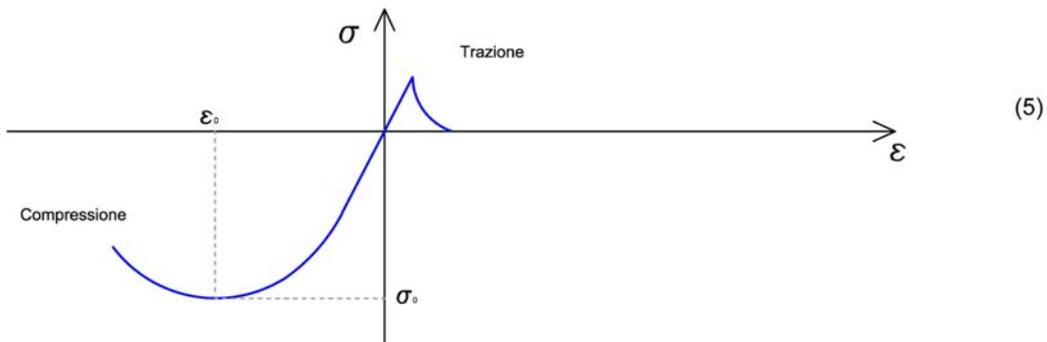
4) La curva tuttavia presenta un colmo, caratterizzato dai valori  $(\epsilon_R, \sigma_R)$ , e che individua la tensione massima sopportabile dal materiale e la deformazione corrispondente. In questa fase finale, fessure sub verticali, paralleli alle linee di forza, si propagano sul muretto di prova, sancendone il collasso meccanico.

5) La deformazione a rottura  $\epsilon_R$  non è risibile (può arrivare anche fino all'1%) e quindi a compressione il materiale murario presenta una certa duttilità.

Tirando le somme di questa complessa fenomenologia, possiamo anche pensare di modellare il comportamento meccanico della muratura a compressione come un materiale elasto-plastico perfetto, o elasto-plastico a duttilità limitata (con deformazione limitata superiormente).



In una prova di trazione il materiale murario si comporta in maniera del tutto differente, indicato nella figura che segue:



Anzitutto il valore massimo è molto più basso del valore massimo a compressione; inoltre il comportamento è pressoché lineare, ma non ha alcuna duttilità. Il comportamento del materiale murario a trazione è di tipo **elasto-fragile**.

A volte la resistenza a trazione è talmente bassa che si finisce per trascurarla del tutto. Il modello meccanico di **materiale non reagente a trazione** è di frequente usato nell'ambito nella modellazione meccanica delle murature.

## 6) LA VERIFICA IN CAMPO ELASTICO

Una delle caratteristiche fondamentali del legame elasto-plastico idealizzato è l'esistenza di un limite superiore alla tensione sopportabile dal materiale. Questo limite superiore, individuato nel valore di snervamento, diventa una funzione più complessa dello stato tensionale, qualora lo stato di tensione non sia più monoassiale. Ciò che diremo in seguito non sarà limitato nella sua generalità dall'aver fatto l'ipotesi di stato monoassiale.

Lo stato di snervamento è visto come il primo punto di crisi del materiale. Per molto tempo si è pensato di doversi cautelare da questo primo punto di crisi, prendendone le distanze. Cioè, la progettazione di una struttura è stata guidata dall'idea che per qualunque condizione di carico ed in nessun punto della struttura la condizione di snervamento potesse essere raggiunta. Anzi, ci si teneva a debita distanza, prendendo come valore massimo di riferimento non il valore di snervamento  $\sigma_y$  ma una sua frazione  $[\sigma_a = \sigma_y/v]$ , detta **tensione ammissibile**, con (v) (coefficiente di sicurezza) diverso a seconda del grado di fiducia che si ha sulla attendibilità della misura del valore ( $\sigma_y$ ). Questo tipo di progettazione era dunque basata su di una **verifica in fase elastica**.

Il progetto basato su di una verifica in fase elastica è dunque un tentativo di mantenere tutti i punti materiali della struttura al di sotto della soglia di snervamento e nasce dalla paura di questa soglia.

Un esempio di progetto basato sulla verifica in fase elastica è il seguente: data una trave doppiamente appoggiata e soggetta ad un carico ripartito q (fissato dalla normativa), questa risulta soggetta a flessione e taglio. La sollecitazione flettente massima, determinata facendo uso del modello monodimensionale di **Bernoulli**, risulta essere in mezzeria, in corrispondenza del valore nullo della sollecitazione tagliante, ed il valore del momento massimo diventa valore di riferimento per il progetto della sezione:

$$m_{\max} = ql^2/8$$

Il progetto della sezione si avvale del modello tridimensionale di trave alla **S.Venant**, ed in particolare della formula di Navier, che lega il momento flettente agente sulla sezione alla distribuzione di tensioni sui punti materiali che compongono la medesima:

$$\sigma = m_{\max} y / J_x = m_{\max} / W_x$$

Il valore massimo della tensione si avrà dunque al bordo superiore e/o inferiore della sezione di mezzeria. Imporre che questo valore sia pari al valore ammissibile, ci consente di determinare un valore minimo del modulo di resistenza a flessione ( $W_x$ ) della sezione con cui scegliere la geometria della sezione, nell'ambito della classe dei materiali che hanno come valore comune di riferimento ( $\sigma_a$ ):

$$W_{x \min} = m_{\max} / \sigma_a$$

Questo modo di ragionare, se serve a preservare la struttura dalla plasticità, è illusorio. Inoltre non è detto che preservare la struttura dalla plasticità sia un obiettivo condivisibile.

Anzitutto illusorio, in quanto sembra fornire rassicurazioni sul fatto che, così facendo, ogni punto della struttura sia ancora in fase elastica e non abbia subito plasticizzazioni. Questo sarebbe vero se il materiale fosse **vergine**, ossia totalmente **privo di tensione** nel momento in cui assume una funzione strutturale. In genere, questo è falso, in quanto il materiale ha una storia passata, legata ai procedimenti di lavorazione che lo hanno prodotto, e che induce all'interno del materiale uno stato tensionale indipendente dai carichi esterni, ossia in equilibrio a carichi esterni nulli. Uno stato tensionale in equilibrio con carichi esterni nulli è detto stato di **autotensione**.

Di esempi di stati di autotensione legati a procedimenti di lavorazione se ne possono fare tanti. Ne citiamo alcuni, legati ai più comuni materiali da costruzione. I metalli, ad esempio, sono soggetti a procedimenti di fusione e raffreddamento non uniforme, che inducono autotensioni. E' proprio la non uniformità del raffreddamento la causa principale della nascita di autotensioni. Infatti, in un processo di raffreddamento, il materiale più esterno si raffredda prima del materiale all'interno. Questo provoca per il materiale all'interno uno stato di **dilatazione contrastata** dal materiale esterno che si dilata in misura minore, data la sua più bassa temperatura. Questo stato di vincolo interno è equivalente ad uno stato di tensione non uniforme, che si annulla al bordo e che comprime gli strati interni del materiale e ne dilata quegli esterni. Sempre legati alla temperatura sono gli stati di autotensione indotti dai processi di saldatura a caldo.

Ancora i metalli ma non solo sono soggetti a procedimenti di lavorazione che inducono deformazioni plastiche con annessi stati di autotensione. I processi di estrusione, trafilatura e laminatura, a caldo o a freddo, sono lavorazioni meccaniche in cui il materiale subisce cambiamenti forma permanenti, il che ovviamente implica la presenza di deformazioni irreversibili. Per effettuare questi cambiamenti di forma sul materiale vengono esercitate pressioni differenziali molto elevate per un tempo ridotto, che inducono autotensione.

In alcuni materiali ceramici, come nella malte cementizie o prive di cemento, uno dei fenomeni che induce autotensione è il **ritiro impedito**. Il ritiro è anzitutto una deformazione non elastica che nasce dall'evaporazione dal materiale della parte dell'acqua di impasto che non ha reagito chimicamente. Infatti, la trasformazione chimica fondamentale che avviene nei leganti è l'idratazione degli ossidi (ad esempio di

calcio o di alluminio) per formare idrossidi (ossia sali). In questo fenomeno, detto di presa e indurimento, l'acqua è chimicamente necessaria. Tuttavia, per garantire all'impasto una sufficiente lavorabilità, la quantità d'acqua che si mette nell'impasto è sempre superiore a quella chimicamente necessaria. Questa eccedenza, evaporando, provoca una contrazione del materiale in fase di indurimento, detta ritiro. Se il ritiro viene contrastato o avviene in maniera non uniforme, nasce uno stato di tensione equilibrato a carichi nulli, esattamente come nel caso del raffreddamento non uniforme. Autotensioni da ritiro nascono in opere in calcestruzzo di grandi dimensioni, in cui, ovviamente, il ritiro è non uniforme in quanto l'evaporazione dell'acqua procede dall'esterno verso l'interno. Autotensioni da ritiro nascono nelle murature, quando le malte tendono a ritirarsi e la rigidità dei blocchi ne limita la contrazione.

Tutti questi esempi dovrebbero dare l'idea del fatto che la verginità del materiale è un mito. Lo stato di autotensione, esistente, ma in generale non valutabile quantitativamente, si somma allo stato tensionale prodotto dai carichi esterni producendo un risultato di fatto non valutabile. Quindi l'idea di controllare il valore della tensione è un'idea illusoria.

Inoltre, l'idea della pericolosità delle deformazioni plastiche è anche da sfatare. Alcune deformazioni plastiche vengono appositamente indotte allo scopo di contrastare fenomeni che potrebbero verificarsi, o per modificare alcune caratteristiche dei materiali. Ad esempio, l'impallinatura dei metalli è un processo di lavorazione superficiale (la superficie del materiale viene bombardata con pallini molto duri) che induce deformazioni plastiche di compressione le quali, oltre a contrastare l'evoluzione delle cricche (microfessure che evolvono per effetto di trazione e/o taglio), hanno anche l'effetto di opacizzare la superficie del materiale (molto utilizzata nell'alluminio).

Dopo aver premesso questo, la verifica (con annesso progetto) in fase elastica sembra perdere significato scientifico per assumere il carattere di una verifica convenzionale. Ma il teorema statico dell'analisi limite, fa riguadagnare scientificità al procedimento, ricontestualizzandolo culturalmente.

## 7) L'ANALISI LIMITE: TEOREMA STATICO

Nell'ambito della teoria della plasticità perfetta, poniamoci il seguente problema: data una struttura di materiale elasto-plastico perfetto, qual è il valore del carico al di là del quale non sussiste più l'equilibrio statico della struttura? Questo preciso valore del carico viene detto **carico di collasso plastico**.

A questa domanda rispondono i due teoremi dell'**analisi limite**, o anche **teoremi di Prager**. Sono detti rispettivamente **teorema statico** e **teorema cinematico** dell'analisi limite.

*Il teorema statico sancisce che: dato uno stato di tensione equilibrato e tutto all'interno del dominio elastico, il carico in equilibrio con esso è inferiore o al limite uguale al carico di collasso plastico della struttura.*

Quindi, il teorema statico consente di determinare una stima per difetto del carico di collasso.

Per strutture intelaiate piane, applicare il teorema statico risulta agevole e, in casi semplici, si possono effettuare calcoli a mano. Le strutture composte da travi sono prevalentemente inflesse. In tal caso, uno stato tensionale all'interno del dominio elastico non è altro che un andamento del momento flettente che non superi in nessuna sezione il **momento ultimo** della sezione medesima. Uno stato tensionale equilibrato non è altro che un andamento del momento flettente che soddisfi le equazioni indefinite di equilibrio e le condizioni ai bordi.

Ciò premesso, applicare il teorema statico a telai piani isostatici, è veramente semplice. Si tratta cioè di determinare il diagramma de momento flettente dalle equazioni di bilancio (per strutture isostatiche è possibile), individuare la sezione in cui il momento è massimo ed imporre che il valore massimo del momento sia pari al momento ultimo della sezione. Da questa equazione si ricava una stima per difetto del carico di collasso plastico.

Per telai iperstatici, l'applicazione del teorema statico passa attraverso la determinazione di un diagramma dei momenti equilibrato. In strutture iperstatiche i diagrammi dei momenti equilibrati non sono univocamente determinati, ma dipendono da un numero di parametri pari al grado di iperstaticità della struttura.

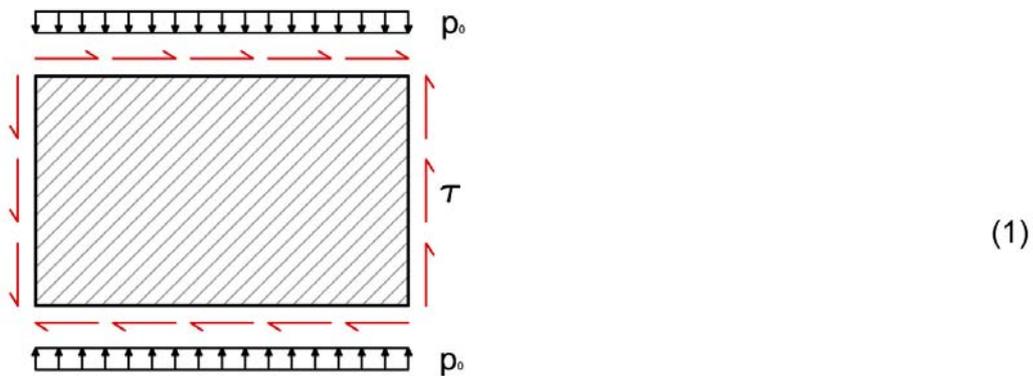
## 8) MODELLI DI CRISI DI PANNELLI MURARI

Il teorema statico dell'analisi limite è stato premesso a questa trattazione dei modelli di crisi per pannelli murari, allo scopo di legittimare l'uso delle sole equazioni di equilibrio per stimare il carico di collasso del generico pannello murario. Un edificio in muratura si compone di elementi verticali (muri) ed elementi orizzontali (solai). I muri possono essere più o meno interrotti dalle aperture, la cui collocazione nella parete individua degli elementi verticali continui che prendono il nome di **maschi murari**. Un modo semplice di modellare il comportamento meccanico di una parete muraria è quello di immaginarlo come il risultato della collaborazione in parallelo dei maschi murari, che contribuiscono alla rigidità e resistenza della parete

con la loro singola rigidezza e resistenza. Nei paragrafi che segue l'attenzione verrà focalizzata sulla resistenza meccanica di questi maschi o pannelli per un'azione di compressione  $p_0$  e taglio  $\tau$  agenti entrambi nel piano medio del pannello. Mentre l'azione di compressione  $p_0$  intende modellare i carichi fissi (peso proprio del maschio murario più peso delle altre strutture e sovrastrutture portate), l'azione tangenziale  $\tau$  simula l'azione del sisma. L'obiettivo dei discorsi che seguono è determinare quel valore di  $\tau$  che corrisponde al collasso del pannello.

### 8.1) Rottura per fessurazione diagonale

Una delle modalità di rottura dei pannelli murari è la fessurazione pressoché diagonale. In zona sismica si vedono frequentemente quadri fessurativi caratterizzati da una doppia diagonale (una croce) nei piani bassi delle costruzioni murarie purché i pannelli non siano eccessivamente snelli. Un modo per giustificare questo quadro fessurativo può essere il seguente: il pannello sia modellato come un **continuo di Cauchy** di forma rettangolare soggetto ad una compressione ( $p_0$ ) lungo i lati Nord e Sud e ad uno stato di taglio uniforme ( $\tau$ ) lungo i quattro lati Nord, Sud, Ovest, Est.

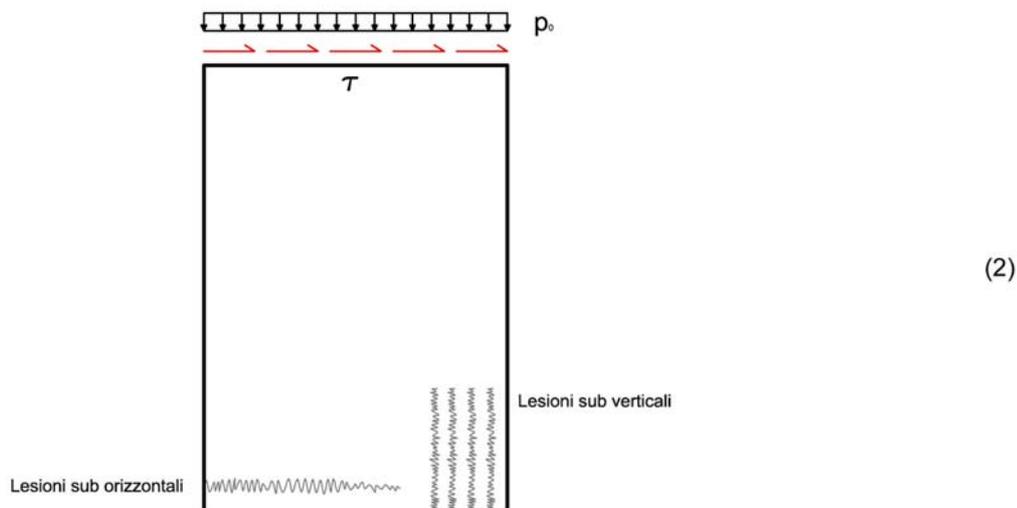


Uno stato tensionale  $\sigma$  costante su tutto il dominio rettangolare e pari ai valori che sono imposti lungo i lati del rettangolo soddisfa le equazioni di bilancio sia sul dominio con ( $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ ) (uno stato tensionale uniforme ha divergenza nulla) sia quelle al bordo ed è quindi la soluzione del problema in termini di stato tensionale. Noto lo stato tensionale, uno può porsi il problema della determinazione dei valori minimi e massimi della tensione normale e le giaciture su cui queste agiscono. Il valore massimo della tensione di trazione e la corrispondente giacitura (**isostatica di trazione**) sono quelli di interesse ai fini che ci siamo posti, in quanto la circostanza che la resistenza a trazione del materiale murario sia molto bassa individua nel raggiungimento di quel valore il la causa della crisi del pannello (vedere gli appunti sui circoli di **Mohr**)

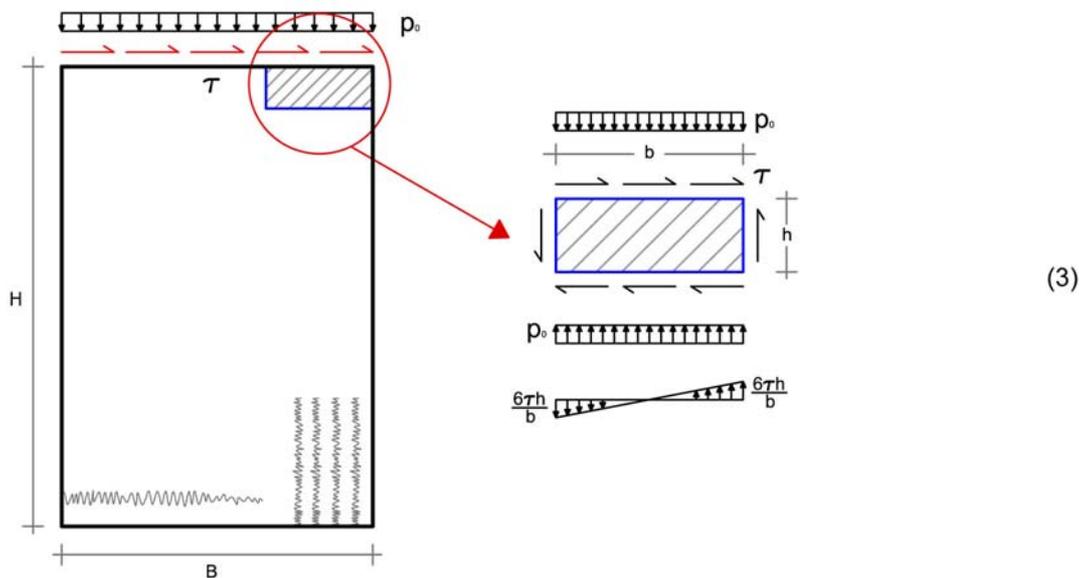
### 8.2) Rottura per pressoflessione

Il caso precedente sembra avere esaurito tutte le possibilità di rottura di un pannello soggetto a compressione e taglio. Tuttavia, la situazione idealizzata del caso precedente non tiene conto di due fattori importanti: le reali condizioni al bordo del pannello e la microstruttura del materiale. I pannelli murari sono delimitati dalle aperture nella parete, le quali forniscono al pannello la condizione di bordo libero sui lati verticali. Questa condizione al bordo è protagonista del fenomeno di rottura per pressoflessione.

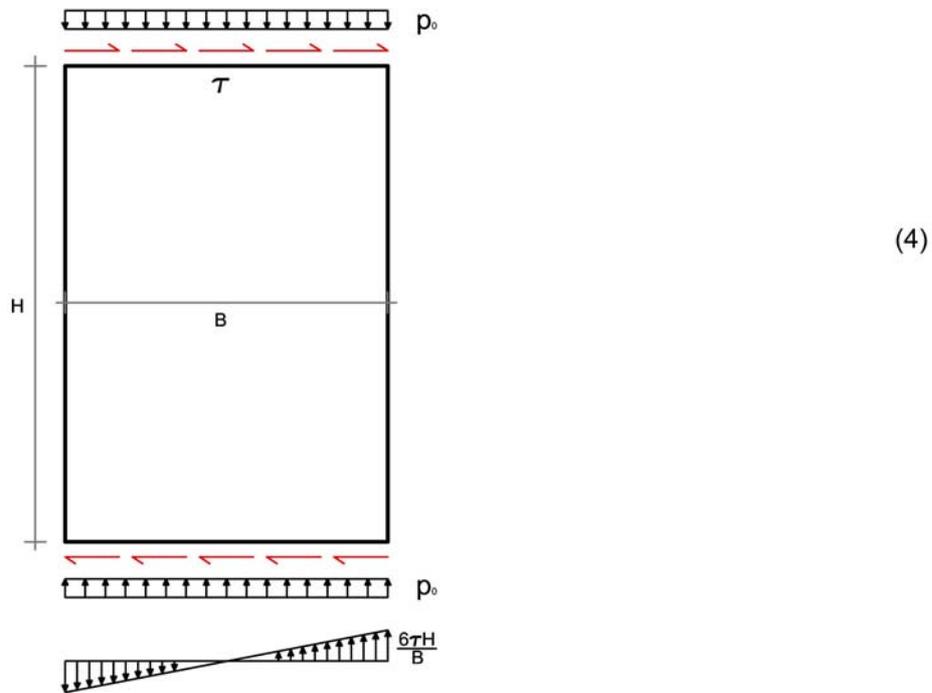
La rottura per pressoflessione del pannello si verifica frequentemente nei piani alti delle costruzioni, ove la sollecitazione di compressione verticale è limitata, o per pannelli snelli, ossia caratterizzati da rapporti altezza/larghezza elevati. Le considerazioni che seguono sono di puro equilibrio, ma guidate dalla conoscenza del quadro fessurativo che governa questo tipo di crisi, mostrata in figura. Tale quadro è caratterizzato da lesioni sub verticali localizzate su di un angolo del lato sud del pannello (che testimoniano la rottura a compressione di quella parte di materiale) e da lesioni sub orizzontali sempre sul lato sud, ma da parte opposta rispetto alla zona compressa (che testimoniano una rottura per trazione). Questo quadro fa pensare ad una rottura per flessione (la presenza della zona tesa e della zona compressa ne sono i sintomi).



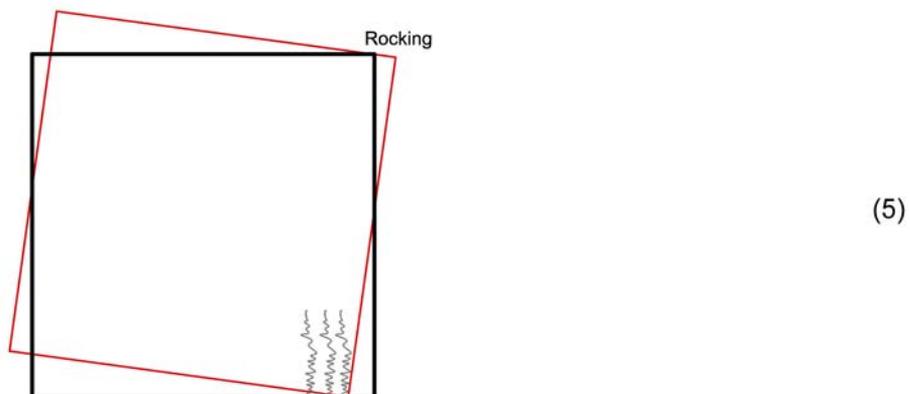
Queste considerazioni guideranno la scelta dello stato di tensione in equilibrio con i carichi esterni (forze di massa nulla, compressione sul lato Nord, tensione tangenziale sul lato Nord) tra gli infiniti stati di tensione possibili. Un continuo di Cauchy di forma rettangolare caricato come in figura non può avere uno stato tensionale uniforme (mancano le tensioni tangenziali sui lati Est ed Ovest) e quindi senza l'ausilio delle equazioni di legame costitutivo e di compatibilità cinematica non si può determinare la soluzione del problema dell'equilibrio. Tuttavia, le indicazioni forniteci dal quadro fessurativo e la garanzia di sicurezza al collasso fornitaci dal teorema statico dell'analisi limite, ci consentono di selezionare uno stato tensionale ammissibile e di attribuire al carico in equilibrio con questo stato tensionale lo statuto di carico di collasso del pannello. Le operazioni che seguono renderanno questo pensiero preciso.



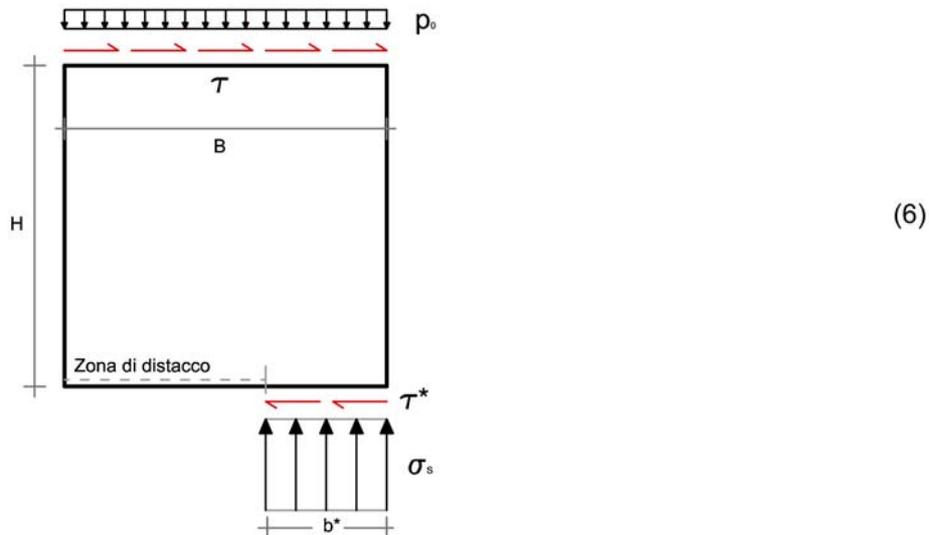
Se consideriamo una parte del pannello, quella indicata in figura, che condivide col pannello un pezzo di bordo esterno, le forze agenti sul bordo esterno saranno note. Incognite invece saranno le tensioni sulle altre facce, ma dovranno comunque garantire l'equilibrio a traslazione e rotazione della parte evidenziata. Uno stato tensionale che equilibri le forze al bordo esterno potrà essere quello evidenziato in figura. Le forze normali alla faccia Sud della parte dovranno garantire non solo una forza verticale ma anche un momento risultante, che equilibri il momento risultante delle forze tangenziali sui lati Nord e Sud della parte medesima. Se estendiamo il ragionamento all'intero pannello, le tensioni normali al lato Sud avranno in prima istanza l'andamento che segue:



Se consideriamo il materiale murario non reagente a trazione, la quota parte di lato Sud che subisce una trazione si romperà. In corrispondenza della frattura sub orizzontale si avrà il distacco del materiale e l'intero pannello tenderà a ruotare tendendo a schiacciare maggiormente la parte compressa e a rompersi progressivamente nella parte tesa (fenomeno di **rocking.**)



Fino al collasso del pannello l'equilibrio sarà comunque garantito con delle tensioni che non potranno superare i loro valori massimi. In questo caso specifico il pannello andrà in crisi quando il valore della compressione nella zona maggiormente sollecitata raggiungerà uniformemente il valore di snervamento.



In tal caso dall'equilibrio alla traslazione verticale si ricaverà l'estensione della zona compressa e dall'equilibrio alla rotazione si ricaverà la tensione tangenziale di crisi del pannello. Questi varranno:

$$\sigma_s b^* = p_0 B \quad \rightarrow \quad b^* = \frac{p_0 B}{\sigma_s}$$

$$\tau^* b^* = \tau B$$

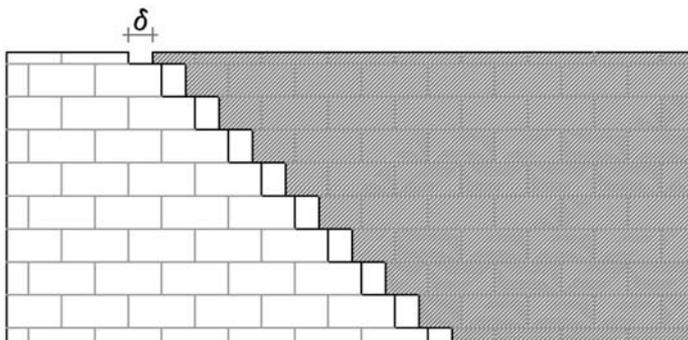
$$\tau B H = p_0 \frac{B (B - b^*)}{2}$$

Il valore ultimo della tensione tangenziale ci consente di calcolare il valore della resistenza del pannello, o taglio limite. Questo varrà:

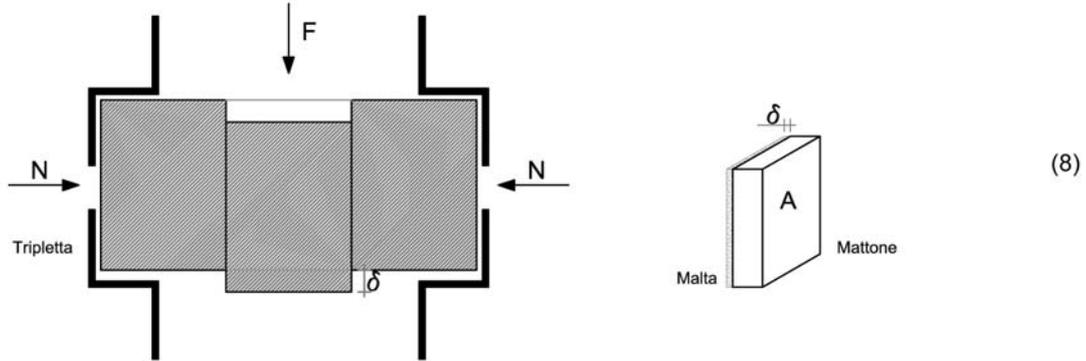
$$T_y = \tau B = p_0 \frac{B (B - b^*)}{(2H)}$$

### 8.3) Rottura per scorrimento dei giunti

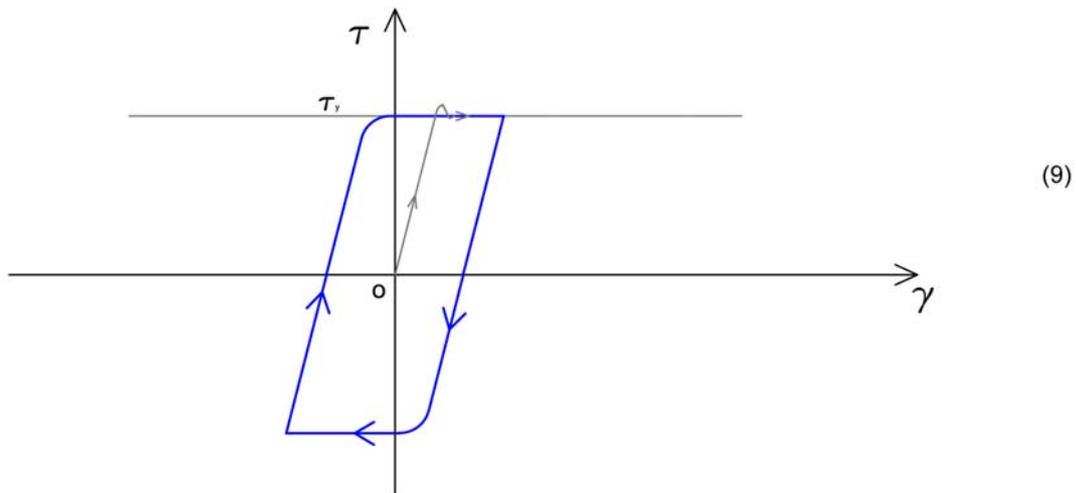
Per microstruttura qui si intende la reale tessitura del materiale murario. Vedere un pannello come un continuo omogeneo ed aspettarsi i comportamenti meccanici del continuo omogeneo può essere una forzatura che proprio le condizioni di crisi del pannello rivelano come tale. Una muratura composta da blocchi regolari quadrati di rigidità e resistenza di molto superiore ai giunti di malta che li connettono non presenterà una rottura per fessurazione diagonale come quella determinata dall'analisi agli auto valori dello stato tensionale (vedi sopra): le linee a 45° della rottura a taglio puro dovranno farsi strada nella reale tessitura del materiale, privilegiando, in questo specifico esempio di giunti deboli, una rottura localizzata nei giunti di malta e quindi un quadro fessurativo a scalini.



La crisi del pannello mostrata in figura è dovuta alla rottura di giunti dalla natura e dalla funzione diversa. Infatti sia i giunti di testa, sollecitati a trazione, sia i giunti di letto, sollecitati a compressione e taglio, sono messi in giuoco. La resistenza a trazione è stata già oggetto di trattazione nel paragrafo riguardante le prove sperimentali sul materiale murario, mentre la prova che misuri la resistenza a compressione e taglio viene qui di seguito trattata. Quando la muratura è del tipo regolare con blocchi squadrati resistenti e malte relativamente più deboli, la prova più semplice da effettuare per misurare la resistenza a compressione e taglio dei giunti risponde allo schema della figura seguente:



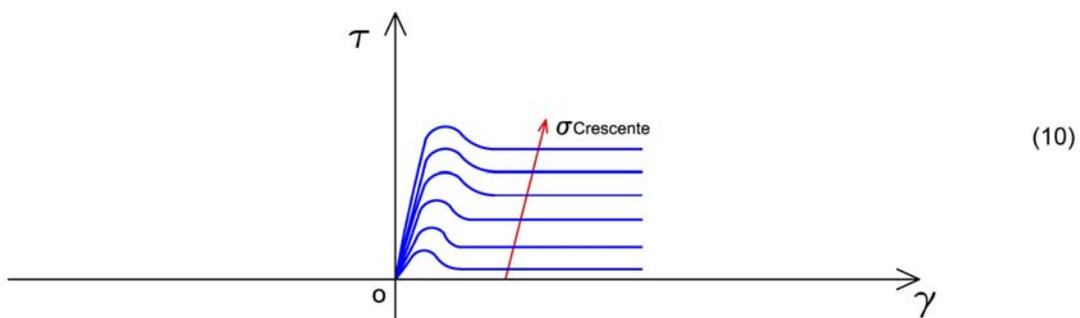
La prova prevede una compressione costante  $N$  sui giunti di malta ed una forza trasversale  $F$  crescente o ciclica, che si bipartisce per simmetria sui due giunti ed induce uno spostamento ( $\delta$ ). Se definiamo le seguenti grandezze: una tensione normale  $[\sigma=N/A]$ , una tensione tangenziale  $[\tau=F/(2A)]$  ed uno scorrimento tangenziale  $[\gamma = \delta/s]$ , possiamo diagrammare i risultati della prova.



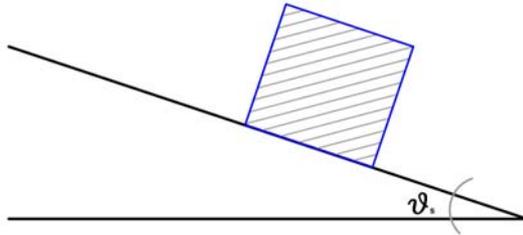
Per un dato valore di  $\sigma$  il risultato della prova mette in evidenza un comportamento che ben si adatta al legame elasto-plastico ideale, caratterizzato da una tensione limite, ampia duttilità e deformazioni residue. Se poi mettiamo sullo stesso grafico il risultato di varie prove effettuate a valori crescenti di ( $\sigma$ ), otteniamo che la tensione limite ( $\tau_y$ ) cresce al variare di  $\sigma$  in accordo con una legge lineare, ossia

$$\tau_y = c + \sigma \mu$$

Dove ( $c$ ), detta **coesione**, rappresenta la tensione ultima quando ( $\sigma=0$ ) e ( $\mu$ ) è un coefficiente detto **coefficiente di attrito**.



La legge suddetta è nota come **legge di Mohr-Coulomb**. Il richiamo alla legge di attrito statico di Coulomb è evidente. Ricavata dal problema dell'equilibrio di un corpo pesante appoggiato su di un piano inclinato, la legge di Coulomb determina il limite superiore della componente tangenziale della reazione vincolare del piano inclinato. Tale limite superiore si ricava essere il prodotto della componente normale della reazione vincolare per la tangente trigonometrica dell'angolo di inclinazione del piano per cui avviene lo scivolamento del corpo verso il basso. Tale angolo viene chiamato **angolo di attrito statico** e la sua tangente trigonometrica **coefficiente di attrito statico**.



(11)

Ritorniamo alla legge di Mohr-Coulomb, che determina la tensione tangenziale limite di un giunto uniformemente compresso. Se il giunto non fosse uniformemente compresso ma il valore della compressione  $\sigma$  dipendesse dal punto  $(x)$ , anche la tensione tangenziale limite ( $\tau_y$ ) dipenderebbe dal punto  $(x)$ , in accordo con la legge di Mohr-Coulomb:

$$\tau_y(x) = c + \sigma(x)\mu$$

In tal caso il taglio limite di un giunto lungo  $b$ , ottenuto come integrale di linea delle tensioni tangenziali limite (se il problema è intrinsecamente piano), varrà:

$$T_b = \int_{-b/2}^{b/2} \{c + \sigma(x)\mu\} dx = c b + \mu \int_{-b/2}^{b/2} \sigma(x) dx = c b + \mu N$$

con  $(N)$  sforzo normale sul giunto; quindi, se anche sul giunto l'andamento delle tensioni di compressione fosse variabile e fosse equivalente ad uno sforzo normale e ad un momento flettente, quello che conta ai fini del taglio limite di Mohr-Coulomb è il valore dello sforzo normale e che il giunto sia tutto compresso (ossia che la pressoflessione non sia tale da indurre trazione e quindi distacco). Quest'ultima situazione si verifica soprattutto nei pannelli dei primi piani, su cui grava il carico di tutte le strutture in elevazione (solai ed anche il peso dei pannelli dei piani superiori).

Premesso questo se vogliamo determinare il taglio limite del pannello per la situazione di figura, una volta rotti per trazione i giunti di letto (se la resistenza a trazione del giunto è veramente bassa), la resistenza del pannello è dovuta alla resistenza a compressione e taglio dei giunti di letto interessati dalla frattura a scalino. Poiché lo sforzo normale su tali giunti è pari a  $[N = p_0 b]$  e, se la compressione è forte, tutto il giunto è compresso, il taglio limite del singolo giunto di letto varrà:

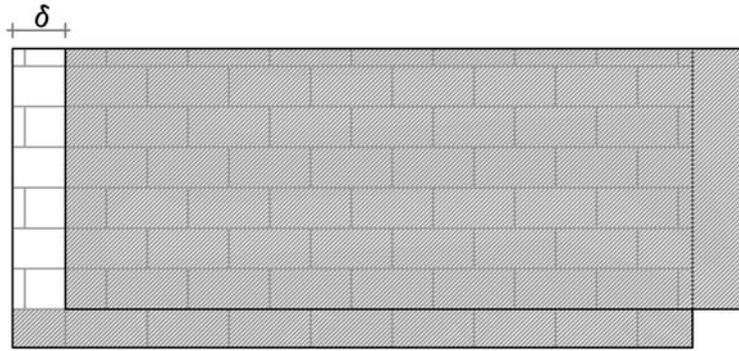
$$T_b = c b + \mu p_0 b = (c + \mu p_0) b$$

indipendentemente dal fatto che sul singolo giunto nasca anche un momento flettente per garantire l'equilibrio a rotazione della parte superiore del pannello.

Pertanto, se il pannello è largo  $(B)$ , il taglio limite del pannello varrà  $(N = p_0 B)$ :

$$T_y = c B + \mu N = (c + \mu p_0) B$$

Questo vale anche se la rottura del pannello per scorrimento dei giunti avviene secondo questa seconda modalità:



(12)

che si verifica quando i giunti di testa hanno un'adeguata resistenza a trazione e la compressione verticale è forte.