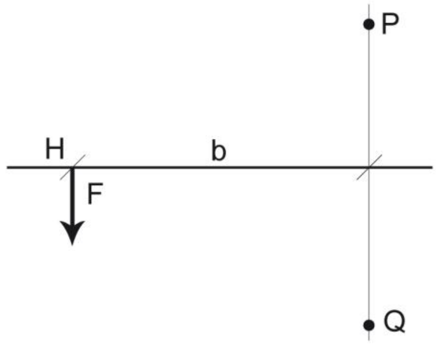
1) IL MOMENTO DI UNA FORZA

Nell'ambito dello studio dei sistemi di forze, diamo una definizione di momento**: il momento è un ente statico che provoca la rotazione dei corpi**. Le forze producono momenti se hanno **braccio**. Rendiamo il discorso più preciso con un esempio:

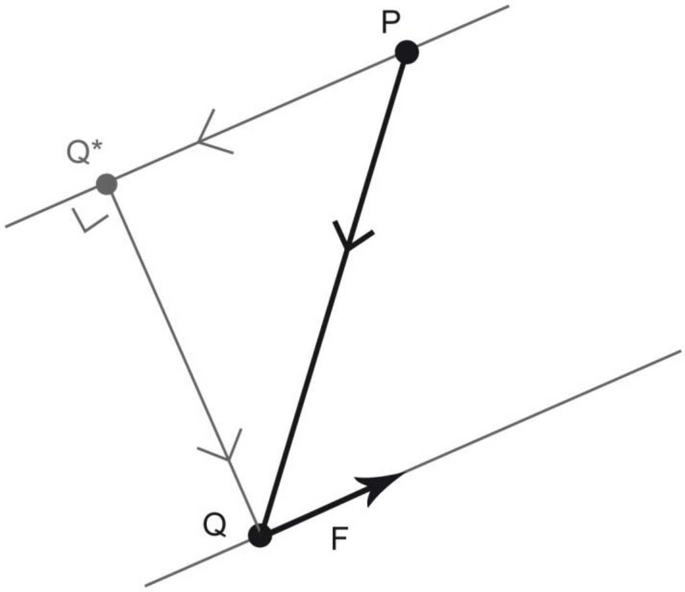


(1)

Nel caso in figura (1), posso calcolare i momenti della forza F rispetto ai due punti (Q) e (P), ricorrendo alla definizione vettoriale, e dimostrare che sono eguali:

$$\mathbf{M(P) = (H - P) \times F = (Q - P) \times F = M(Q)}$$

Per dimostrare questa eguaglianza, analizziamo la figura sottostante:



Il braccio (Q-P) può essere decomposto nella somma di due vettori:

$$\mathbf{(Q - P) = (Q^* - P) + (Q - Q^*)}$$

uno parallelo alla retta d'azione della forza F, l'altro perpendicolare. Ora ricorrendo alla definizione vettoriale del momento e alla decomposizione additiva del braccio, otterrò:

$$\mathbf{(Q - P) \times F = (Q^* - P) \times F + (Q - Q^*) \times F}$$

Ma il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è il vettore nullo, quindi:

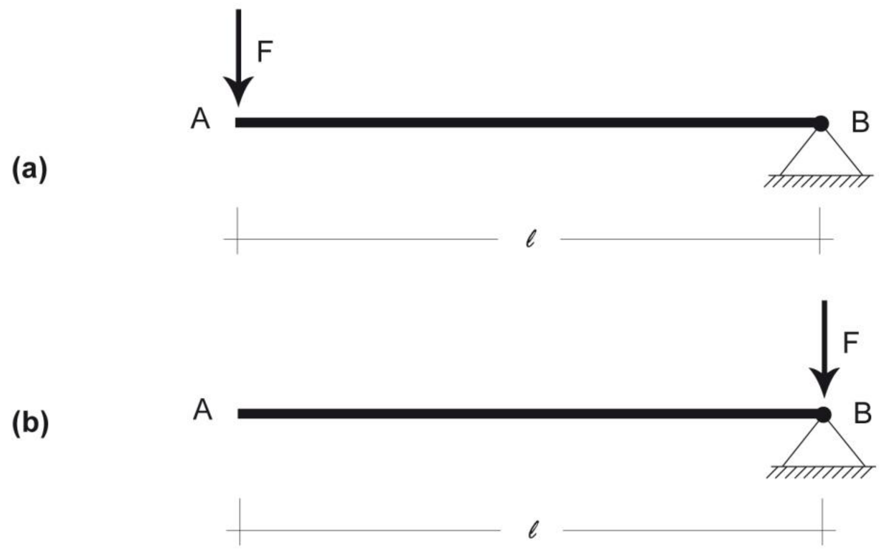
$$(Q^* - P) \times F = \underline{0}$$

Da cui:

$$(Q - P) \times F = (Q - Q^*) \times F$$

Dove (Q – Q*) è, appunto, il braccio perpendicolare alla forza (F), che è l'unico che ha valore nel calcolo del momento, poiché l'altro contributo si annulla. Ribadiamo quindi il seguente concetto, ossia che nel calcolo del momento generato da una forza (F) rispetto ad un punto (P), quello che conta è la componente del braccio perpendicolare alla direzione della forza (F), che sarà lungo quanto la distanza tra la retta d'azione della forza e la retta passante per il punto P e parallela alla suddetta retta d'azione di (F).

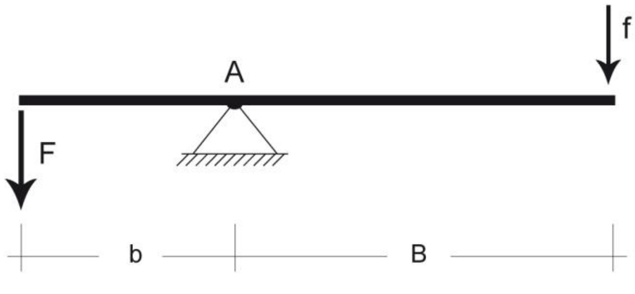
Osserviamo ora i casi riportati in figura (2):



(2)

Le due forze hanno effetti diversi perché diverso è il loro momento rispetto al punto B. La seconda forza ha momento nullo perché nullo è il suo braccio rispetto a (B). Quindi se sposto una forza alterando la sua retta d'azione, altero il momento della forza rispetto ad un punto qualsiasi e quindi produco effetti meccanici diversi. Nel caso (a) la forza induce una rotazione rigida antioraria, nel caso (b) non produce nulla. I due sistemi di forze non hanno lo stesso momento risultante, ma solo la stessa risultante, perché spostando la forza parallelamente, e non lungo, la sua retta d'azione, ne ho alterato il braccio, e quindi il momento.

Esaminando l'esempio riportato in figura (3), ricordiamo che la definizione di momento di una forza rispetto ad un punto è insita nell'equilibrio della **leva**.



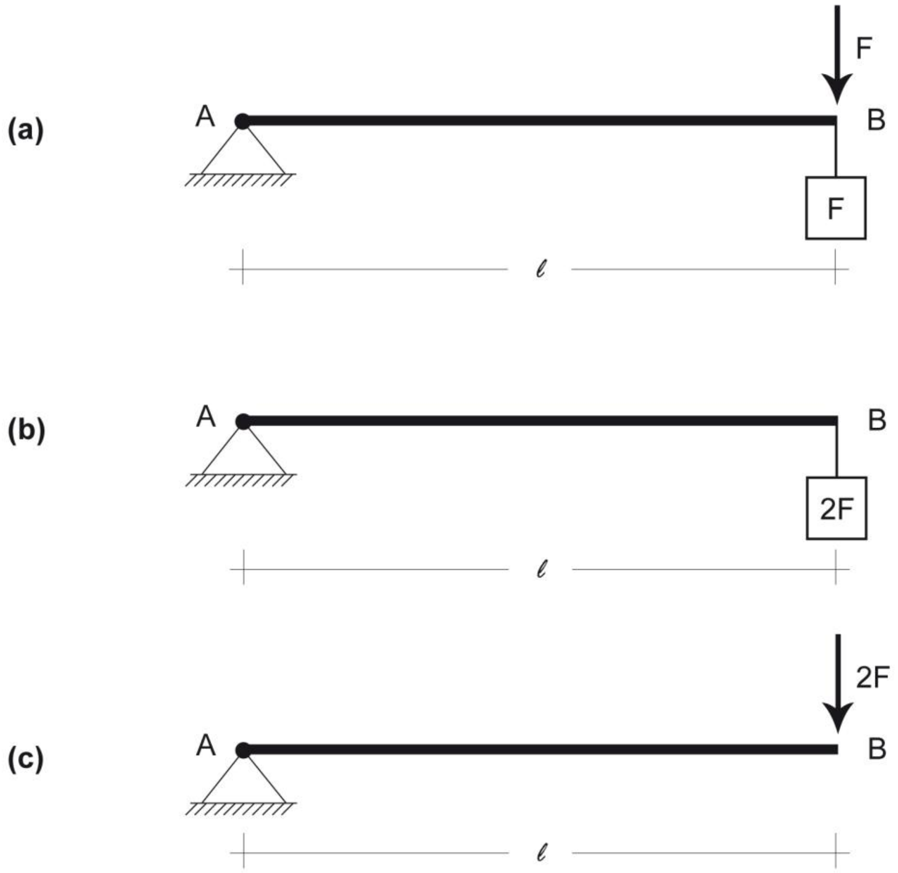
(3)

In quel caso, infatti (vedi figura (3)) il corpo rigido è in equilibrio solo se: **F b = f B (bilancio dei momenti)**.

Ne deriva che il punto di applicazione delle forze è fondamentale ai fini della determinazione del momento. Infatti, nonostante la forza (f) sia più piccola di (F), quello che conta per il bilancio dei momenti è che sia uguale il prodotto tra la forza ed il suo braccio, per cui, date le forze, anche se di diversa intensità, si può garantire l'equilibrio del sistema gestendo il loro contributo tramite il punto di applicazione, e quindi aumentando o diminuendo il loro braccio rispetto al centro di rotazione del corpo cui sono applicate.

2) EQUIVALENZA NEI SISTEMI DI FORZE

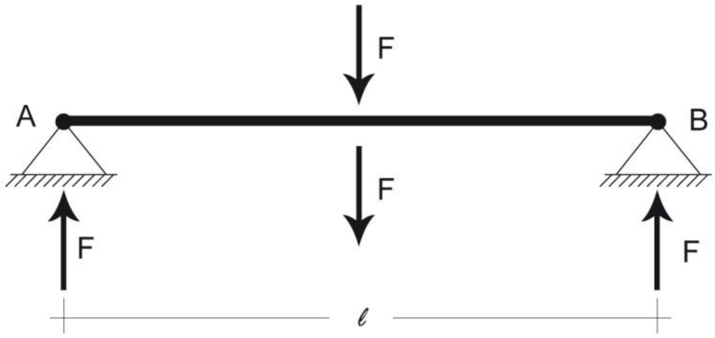
Nella meccanica del corpo rigido non ha significato la singola forza applicata al corpo, ma l'insieme di forze applicate. Una distinzione viene effettuata tra forze **attive** e **reazioni vincolari.**
L'insieme delle forze applicate ad un corpo rigido può essere semplificato senza modificarne gli effetti meccanici. Le immagini che seguono forniscono un esempio in cui alcune forze sono poggiate su di corpo, mentre altre sono appese:



(4)

I tre sistemi di forze sono equivalenti (sforzate l'intuito). Ricordando la definizione di sistemi di forze equivalenti,i tre sistemi in figura lo sono perché hanno la stessa risultante (= 2F i) e lo stesso momento risultante rispetto al punto (A) (= 2Fl j). Questo esempio sancisce che si può traslare una forza lungo la sua retta d'azione senza alterare gli effetti meccanici sul corpo rigido.

Gli effetti meccanici sul corpo rigido sono le reazioni vincolari nel caso di problemi statici, oppure la stesse accelerazioni (lineari o angolari) nel caso di corpo che ammetta qualche possibilità di movimento.



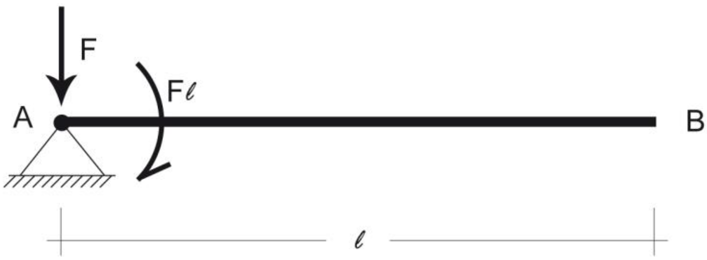
(5)

$$\text{Dove:}\quad \begin{cases} R_a + R_v = 0 \\ M_a + M_v = 0 \end{cases}$$

Quello che conta per il corpo rigido è quindi la risultante ed il momento risultante di un sistema di forze. Quindi è importante assimilare la nozione di equivalenza di un sistema di forze: **due sistemi sono equivalenti se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante**. Ad esempio:

(a)

(b)



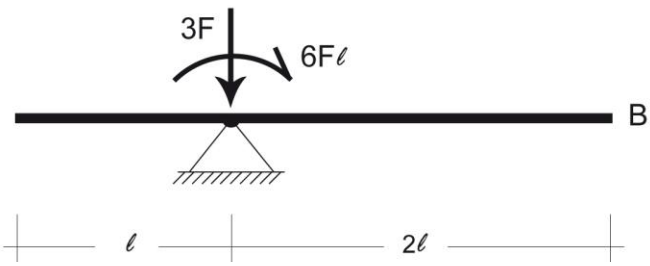
(6)

I sistemi (a) e (b) sono equivalenti poiché per entrambi vale:

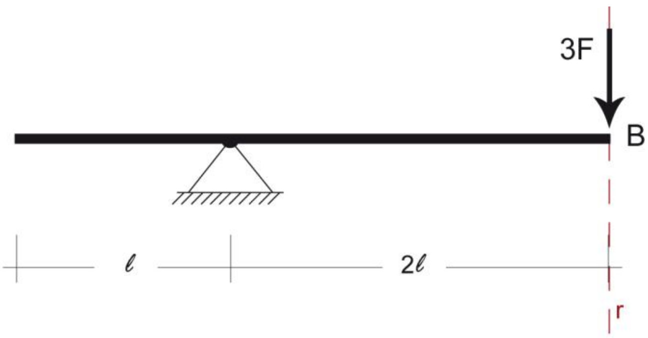
$$\begin{cases} R = -F\underline{j} \\ M(A) = -Fl\underline{k} \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

Ancora:

(a)



(7)

(b)  (7)

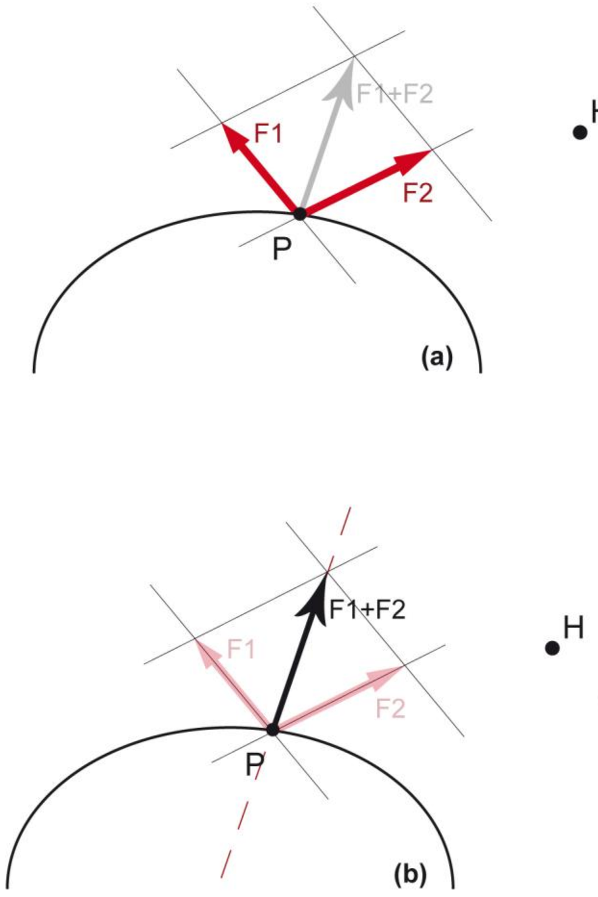
Il sistemi (a) e (b) sono equivalenti poiché per entrambi vale:

$$\begin{cases} R = -3F\,\underline{j} \\ M(B) = -6Fl + 6Fl = 0 \end{cases} \qquad (c)$$

Quando il sistema è costituito da una sola forza viene detto ridotto **all'asse centrale (r)**.

3) ANCORA SULL'EQUIVALENZA DEI SISTEMI DI FORZE

Andiamo a fare un esempio che richiama anche la regola del parallelogramma per la scomposizione delle forze:

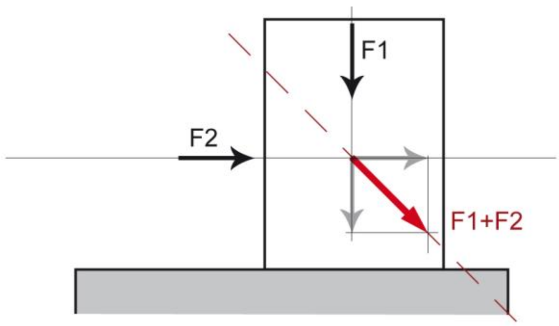


(1)

Se calcolo il momento rispetto al punto (H), considerando sia il sistema di forze in (a) che quello in (b):

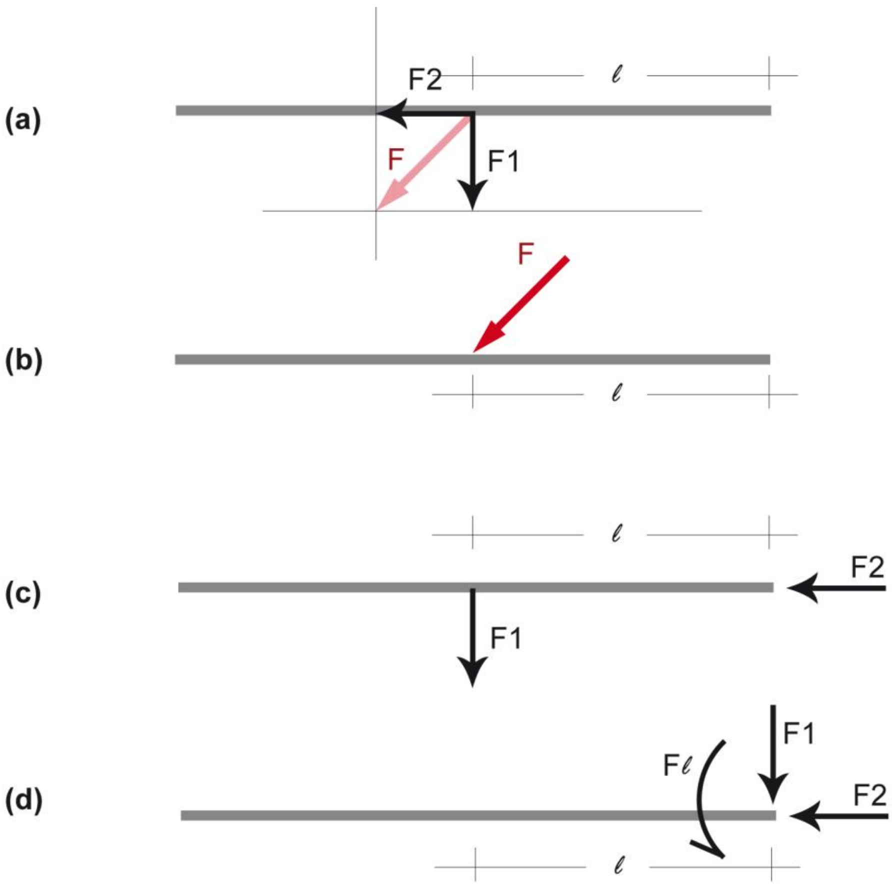
M(H) = (P - H) x F1 + (P - H) x F2 = (P - H) X (F1 + F2)

Per cui i due sistemi sono equivalenti.
Nell'esempio che segue ripetiamo una serie di operazioni grafiche con cui, applicando a ripetizione l'equivalenza di sistemi di forze, arriviamo a determinare l'asse centrale delle forze attive e a verificare se c'è possibilità di equilibrio statico per un corpo appoggiato su di un appoggio monolatero.
L'individuazione dell'asse centrale ci da modo di stabilire se il sistema è in equilibrio (poiché, nel caso in cui l'asse uscisse fuori dalla base di fondazione l'equilibrio non sarebbe più garantito):



(2)

Ovviamente vale anche l'inverso: sia che riduca un sistema di due forze alla loro risultante, sia che si scomponga una forza nelle sue due componenti, il sistema rimane equivalente. Ad esempio:

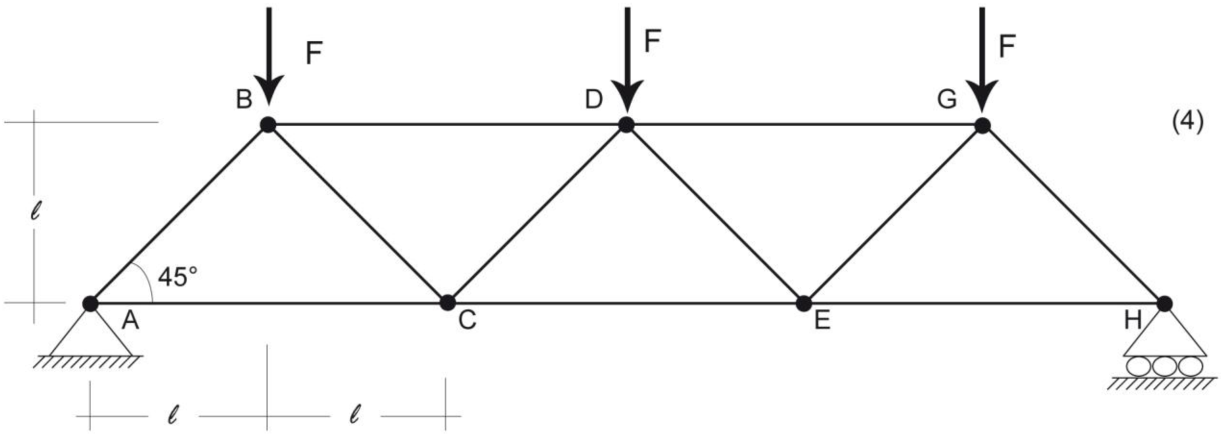


(3)

I sistemi di forze (a), (b), (c), e (d) di figura (3) sono tutti equivalenti. E' necessario ricordare che, se ho una forza e due direzioni, posso decomporre la forza lungo le due direzioni. Ma qualora le direzioni fossero tre, la forza non potrebbe essere scomposta ed il problema risulterebbe iperstatico.

4) SUL CALCOLO DELLE TRAVATURE RETICOLARI

I concetti fin qui affrontati possono essere applicati al calcolo di travature reticolari isostatiche, come ad esempio, quella di figura (4):



(4)

Anzitutto verifichiamo che la struttura sia isostatica: in un piano ogni corpo ha **tre gradi di libertà**, lo spostamento verticale, orizzontale, e la rotazione. Questo sistema è composto da 11 corpi, quindi 33 gradi di libertà. Perché la struttura sia isostatiche devo avere gli stessi gradi di vincolo. Per calcolare il grado di vincolo di ogni asta utilizzo la seguente formula:

2(n – 1)

dove **n** = numero di aste che confluiscono nel nodo

Ricordiamo inoltre che quando si parla di travi reticolari parliamo di strutture composte da aste che possono essere solo tese (**tiranti**) o solo compresse (**puntoni**), collegate tra di loro tramite **cerniere interne**.
Cominciamo dal punto (A): nel nodo confluiscono due aste, per cui avrò:

2 (2 – 1) = 2

Quindi 2 gradi di vincolo; ma il punto (A) è doppiamente vincolato dalla cerniera esterna, per cui ai suoi gradi di vincolo vanno aggiunti quelli della cerniera (che sono 2, relativi allo spostamento orizzontale e a quello verticale), ed ottengo complessivamente 4 gradi di vincolo. Nel punto (H) vale lo stesso discorso, per cui ripeto il calcolo aggiungendo il vincolo dovuto al carrello (ottenendone 3 totali). Nei nodi restanti convergono sempre solo 3 o 4 aste, per cui avrò:

2 (3 – 1) = 4

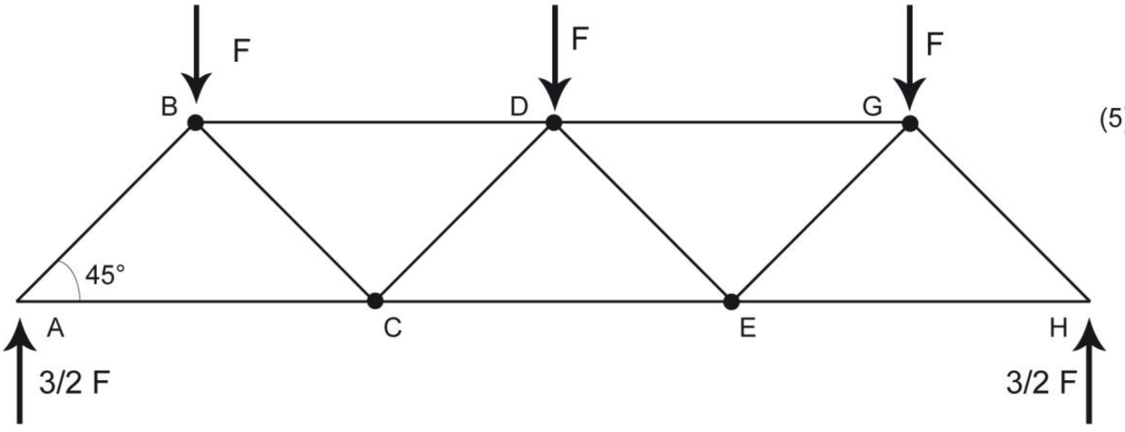
Per i nodi in cui arrivano tre aste, e:

2 (4 – 1) = 6

Per i nodi che ne collegano 4. Andando a sommare ottengo:

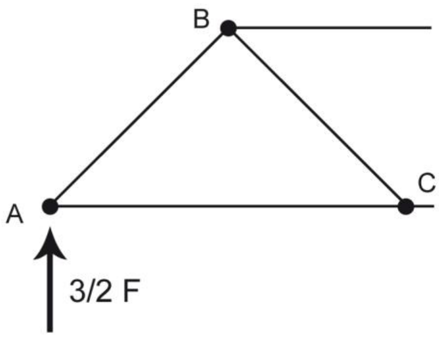
3x6(C, E, D) + 2x4 (B, G) + 4(A) + 3(H) = 33 = gradi di libertà

La struttura è **isostatica**. Come prima cosa vado a calcolare le reazioni vincolari; in questo caso le reazioni vincolari in (A) ed in (H) dovute alla cerniera ed il carrello, si calcolano semplicemente imponendo l'equilibrio alla traslazione verticale (come nel caso di una trave appoggiata) e data la simmetria del sistema i vincoli si ripartiscono equamente la reazione ai carichi applicati (**3F**) come rappresentato in figura (5):



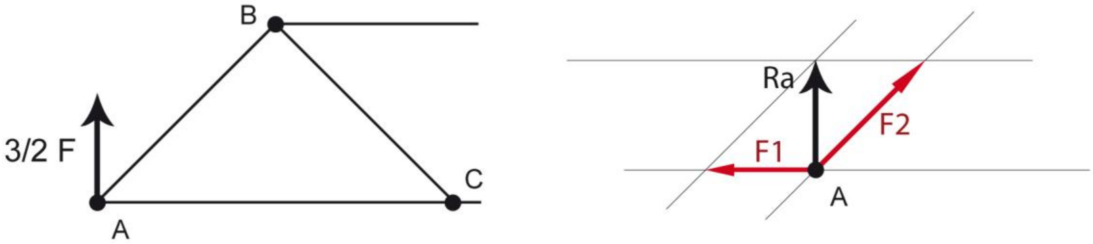
(5)

A questo punto vado a calcolare le forze lungo le aste mediante il **metodo dei nodi**. Questo metodo si basa sull'assunto che il modello tramite cui studiamo le travature reticolari considera le forze concentrate sui nodi; sapendo questo, e sapendo che le aste sono soggette al solo forzo normale, possiamo andare a studiare il sistema semplicemente utilizzando la regola del parallelogramma per la scomposizione delle forze.
Partiamo dal punto (A), poiché ho solo due aste e la forza dovuta alla reazione vincolare:



(6)

Ricordando che non modifico gli effetti meccanici se traslo una forza lungo la sua retta d'azione, posso ridisegnare i nodo come in figura (7), ed andarmi a costruire il parallelogramma con cui scomporre la forza (tenendo presente che le direzioni delle forze sono le direzioni delle aste, e che le aste sono inclinate a 45°, per cui ogni triangolo è un semiquadrato di lunghezza ($2l$) ed altezza (h) con l = h):

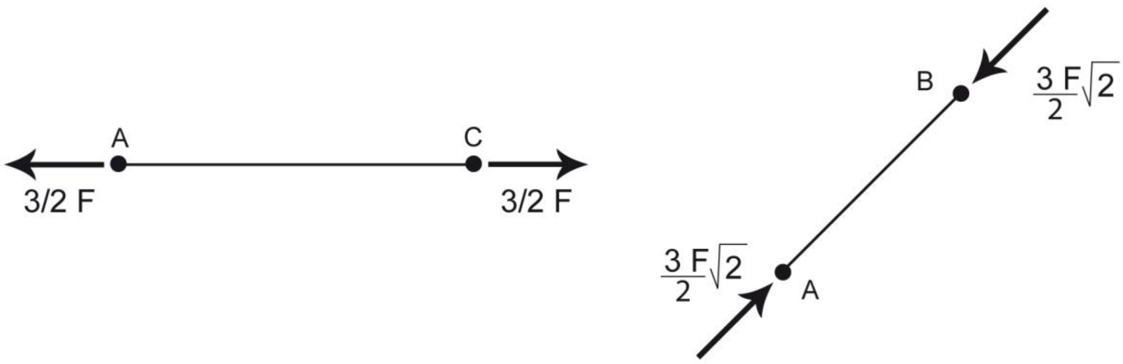


(7)

Sapendo che, dato il lato (l), la diagonale di un quadrato si trova come ($l\sqrt{2}$), avrò:

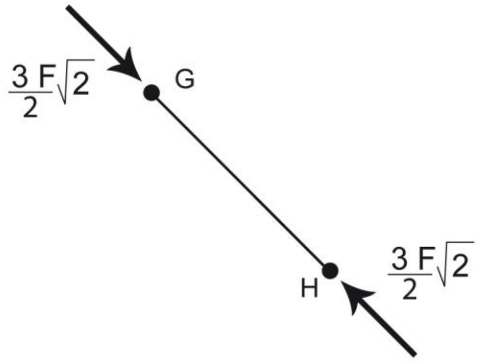
F1 = 3/2 F
F2 = 3/2 F√2

Quindi:

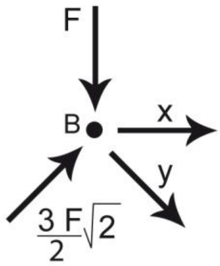


(8)

Dove l'asta (**AC) è un tirante**, mentre **(AB) è un puntone**. Ovviamente, essendo la struttura simmetrica, nonché caricata simmetricamente, otterrò lo stesso risultato partendo dal nodo (H) e procedendo da destra verso sinistra; avrò quindi:



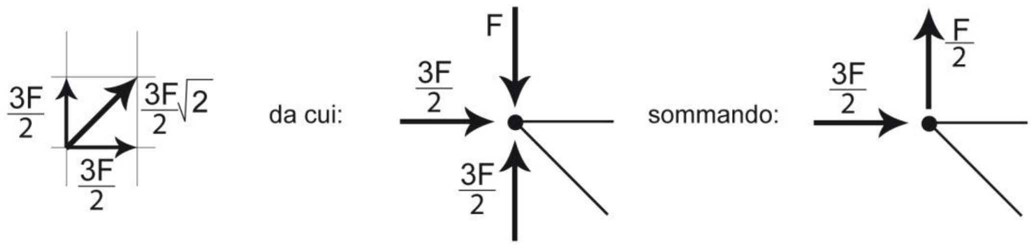
Passiamo al nodo in (B): devo considerare il contributo della forza esterna (F) ed il contributo dell’asta (AB); inoltre so che in (B) arrivano le aste (BD) e (BC), che a loro volta portano il contributo di due forze che chiameremo rispettivamente (x) ed (y), come rappresentato in figura (9):



(9)

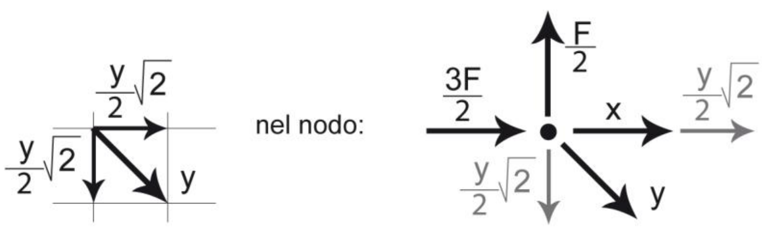
Per trovare i valori delle forze (x) ed (y) è possibile utilizzare due diverse metodologie di calcolo: l’**equilibrio al nodo,** oppure il **metodo geometrico**. Svolgiamo l’esercizio in entrambi i modi, tenendo in mente che ambedue i metodi devono portare allo stesso risultato; di conseguenza, utilizzare entrambe le procedure può essere anche uno strumento di verifica, poiché, qualora i risultati non coincidessero, sarebbe evidente la presenza di un precedente errore di calcolo.

Cominciamo con l’**equilibrio al nodo**: perché il nodo sia in equilibrio la risultante delle forze (sia verticali che orizzontali) deve essere uguale a zero. Scompongo la forza proveniente dall’asta (AB) e disegno il sistema equivalente:



(10)

Scompongo anche (y) e vado a scrivere l’equazione dell’equilibrio al nodo:



$$\begin{cases} \frac{F}{2} - \frac{y}{2}\sqrt{2} = 0 \\ \frac{3F}{2} + x + \frac{y}{2}\sqrt{2} = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

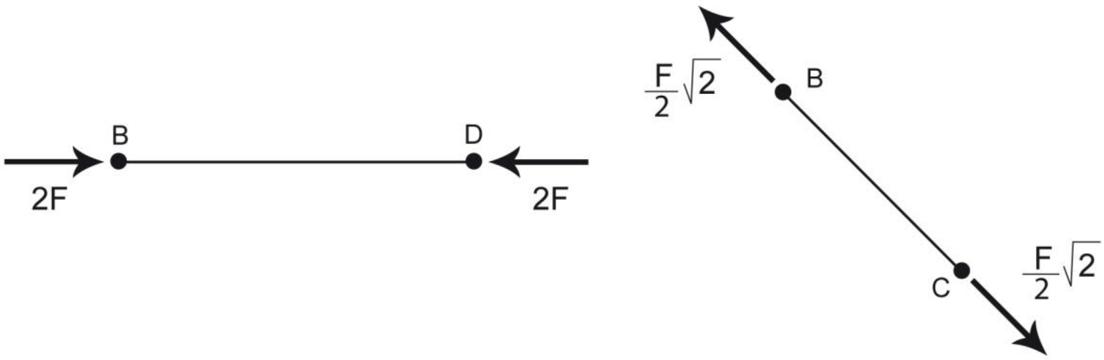
A questo punto vado a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{y}{2}\sqrt{2} = \frac{F}{2} \\ \frac{3F}{2} + x + \frac{y}{2}\sqrt{2} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = \frac{F}{2}\sqrt{2} \\ \frac{3F}{2} + x + \frac{F}{2} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = \frac{F}{2}\sqrt{2} \\ x = -\frac{3F}{2} - \frac{F}{2} \end{cases}$$

quindi ottengo:

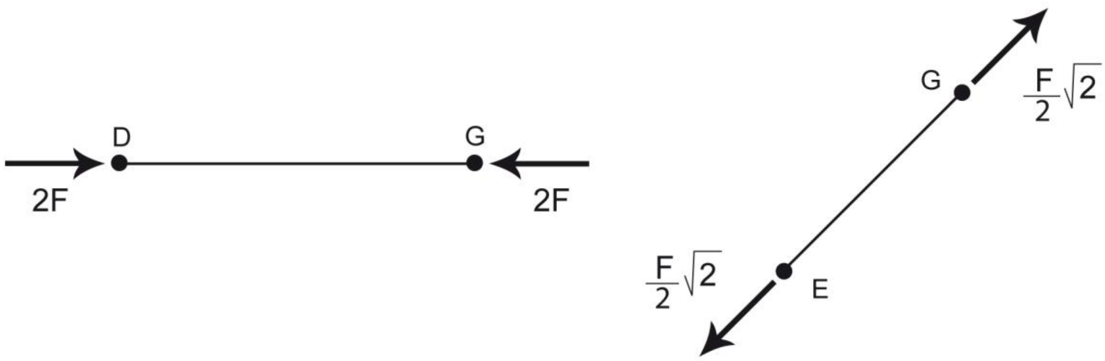
$$\begin{cases} y = \frac{F}{2}\sqrt{2} \\ x = -\,2F \end{cases}$$

Per cui l’asta **(BD) è un puntone**, mentre l’asta **(BC) è un tirante**, come rappresentato in figura (12):

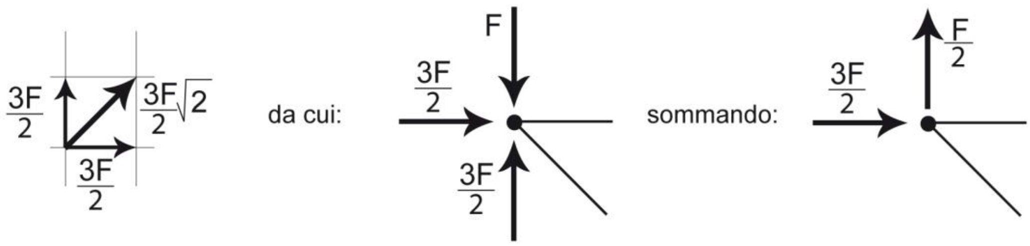


(12)

Anche in questo caso vale il discorso della simmetria della struttura, per cui conosco anche:

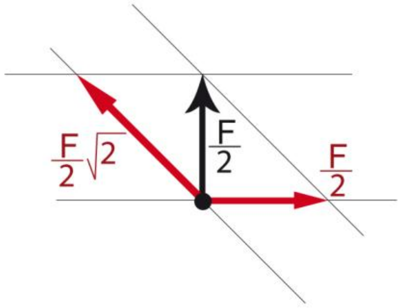


Andiamo a studiare lo stesso nodo tramite il metodo geometrico: questo metodo consiste nello scomporre tutte le forze che agiscono sul nodo tramite la regola del parallelogramma (sempre seguendo l’inclinazione delle aste della trave), una alla volta, e sommare quelli che risulteranno essere i contributi di diverse forze agenti lungo la stessa retta d’azione. Torniamo allora al nodo (B) rappresentato in figura (10), e ricordiamo che il risultato deve coincidere con quello appena ottenuto:

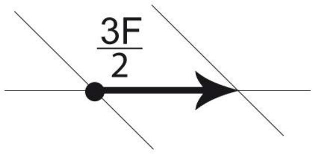


(10)

Scomponiamo prima la forza verticale (F/2), ottengo:



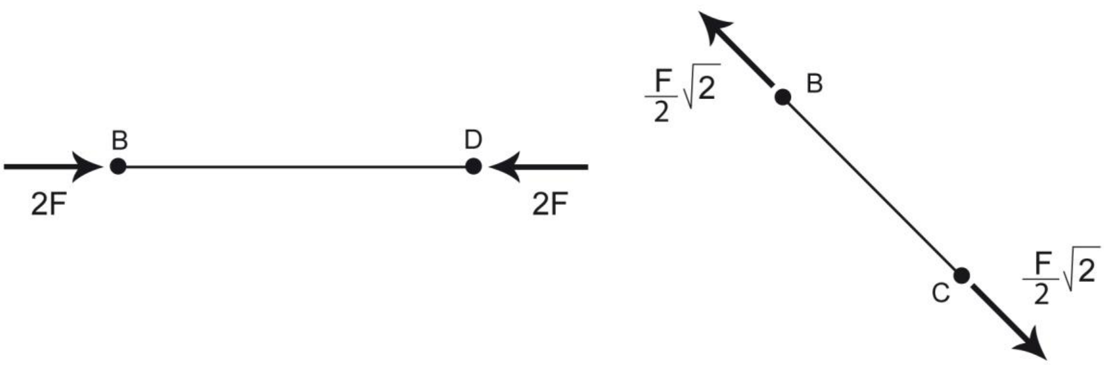
Vado quindi a scomporre la forza orizzontale (3F/2):



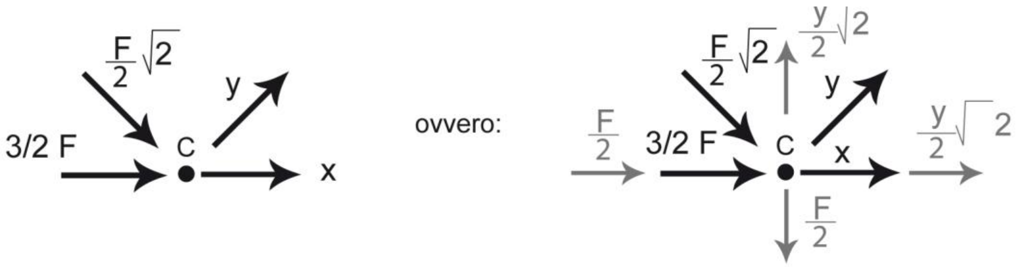
La forza non si può scomporre perché ha come retta d'azione una retta parallela ad un'asta, di conseguenza agisce lungo una delle direzioni su cui si deve costruire il parallelogramma.

Una volta trovate, queste componenti vanno sommate tra di loro. Osserviamo che nella scomposizione della forza verticale (**F/2**) abbiamo ottenuto una forza (**F/2√2**) che agisce su una retta d'azione lungo la quale la forza (**3F/2**) non ha alcun contributo, ossia lungo l'asta (**BC**); questo significa che per quanto riguarda l'asta relativa a quella retta d'azione, la componente a 45° di (**F/2**) è l'unica forza che conta.

Per quanto riguarda invece la componente orizzontale ricavata dalla scomposizione della prima forza (**F/2**), questa agisce lungo la stessa retta d'azione di (**3F/2**), per cui i loro contributi vanno sommati e si distribuiranno lungo l'asta orizzontale (**BD**). In sintesi, ottengo:



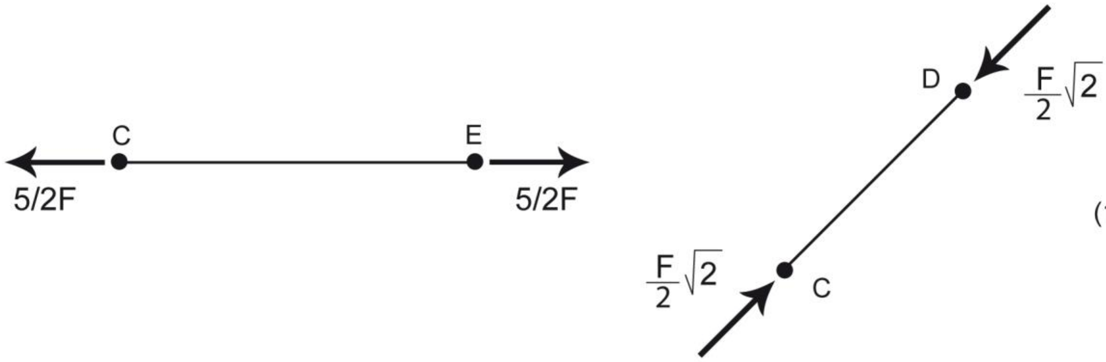
Che coincide con il risultato precedentemente ottenuto tramite il metodo dell'equilibrio al nodo.
Per completare il calcolo della struttura manca lo studio di un solo nodo che possiamo scegliere tra quello in (**C**) e quello in (**E**), sempre perché la struttura è simmetrica e caricata simmetricamente, per cui il risultato che otterrò per l'asta (**CD**) sarà uguale a quello che avrò nell'asta (**DE**).
Scegliamo di studiare il nodo (**C**) sempre utilizzando il metodo dell'equilibrio:



(13)

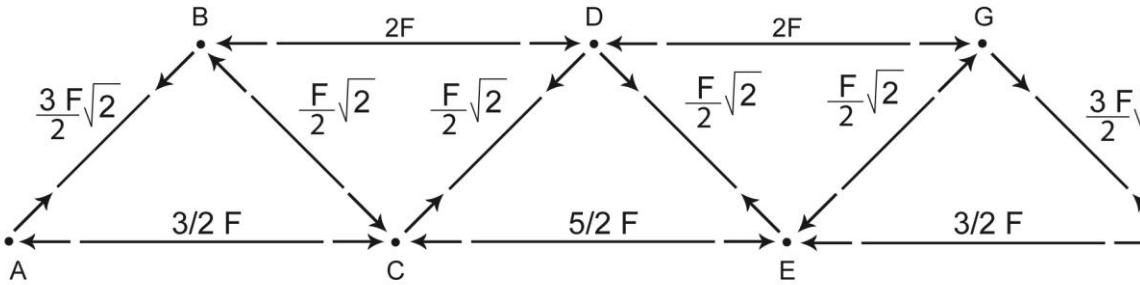
$$\begin{cases} \frac{y}{2}\sqrt{2} = \frac{F}{2} \\ \frac{3F}{2} + x + \frac{y}{2}\sqrt{2} + \frac{F}{2} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = \frac{F}{2}\sqrt{2} \\ x = -\frac{5F}{2} \end{cases}$$

Per cui **(CD) è un puntone**, mentre **(CE) è un tirante**, come possiamo vedere nella figura (14):



(14)

Una volta studiati tutti i nodi, possiamo andare a vedere la struttura nel suo complesso:



(15)