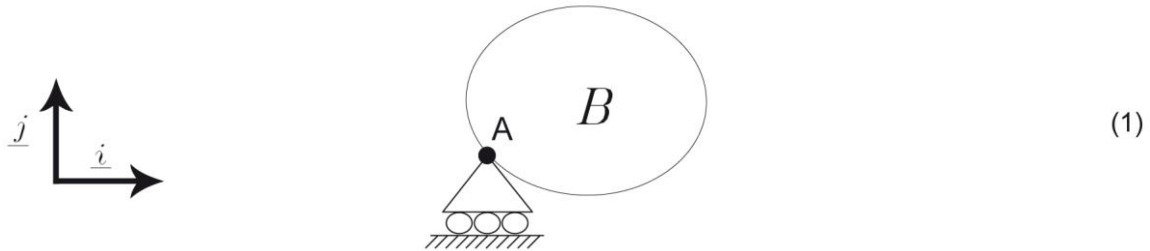


1) VINCOLI OLONOMI O BILATERALI

I vincoli fino ad ora considerati sono vincoli **olonomi**, o **bilaterali**, ossia quei **vincoli che possono essere espressi tramite equazioni**. Se prendiamo in esempio il carrello bilatero disegnato in figura (1):



Secondo quanto detto in passato, quel carrello esprime la circostanza cinematica che il punto (A) del corpo (B), a cui è applicato, non possa muoversi verticalmente, né dall'alto verso il basso e né dal basso verso l'alto.

Se lo spostamento di (A), che nel caso della figura (1) è un vettore in 2D, e viene espresso per componenti sulla base ortonormale standard (ovvero $V(A) = u(A) \underline{i} + v(A) \underline{j}$), il vincolo di cui sopra, si esprimerà algebricamente come segue:

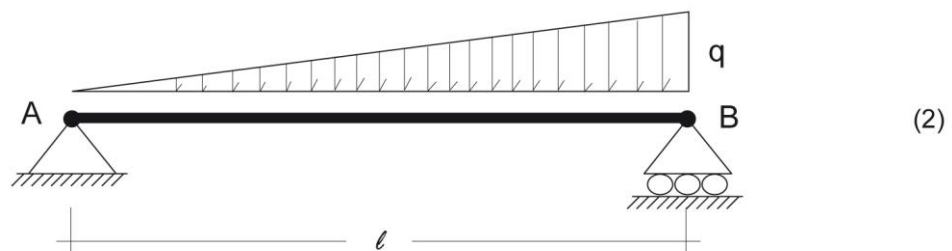
$$v(A) = 0 \quad (a)$$

(una sola equazione scalare)

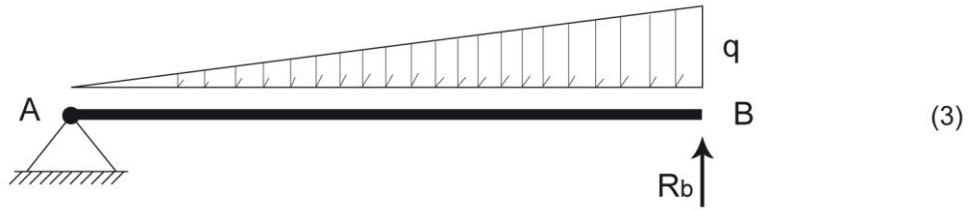
L'equazione (a) è **cinematica**, ma ha ovvie conseguenze nella caratterizzazione statica delle reazioni vincolari del carrello in questione. L'osservanza dell'equazione (a), significa che qualora, per effetto delle forze agenti sul corpo (B), il punto (A) tentasse di spostarsi verso il basso, il vincolo (non potendo consentirlo) reagirebbe con una forza (**reazione vincolare**) diretta verso l'alto e mirata a contrastare questo spostamento.

Viceversa, se il punto (A) tentasse di spostarsi verso l'alto, la reazione vincolare sarebbe verso il basso, nell'atto, cioè, di riportarlo nella posizione iniziale.

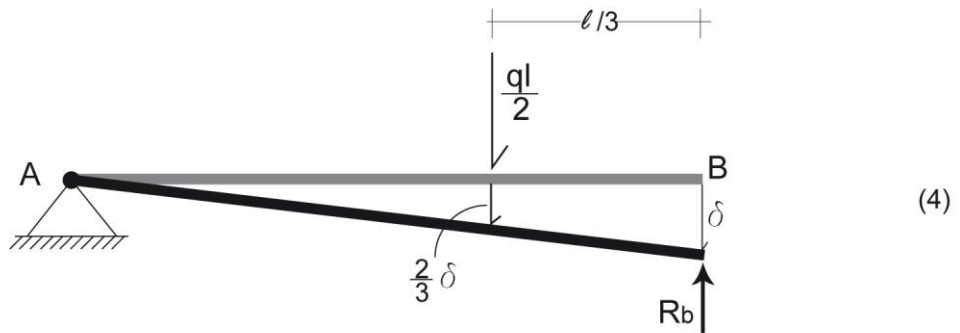
Quanto detto non è altro che la sceneggiatura del teorema della potenza virtuale, applicato al calcolo delle reazioni vincolari.



Se vogliamo calcolare (R_b), possiamo anzitutto passare a studiare la sua caratterizzazione statica, eliminando il carrello in figura, ed evidenziando la sua reazione vincolare:



Così facendo è più facile ipotizzare uno spostamento virtuale che faccia spendere lavoro ad (R_b) e ne includa il contributo nel lavoro virtuale totale.

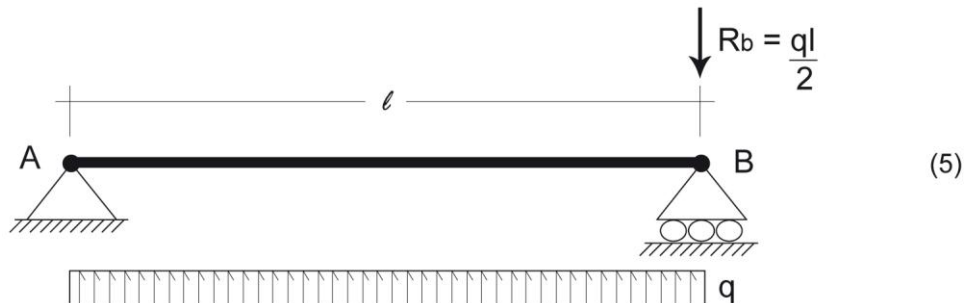


$$\delta L = \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{3} \delta - R_b \cdot \delta = 0 \quad \forall \delta \neq 0$$

$$\frac{ql}{3} - R_b = 0$$

$$R_b = \frac{ql}{3}$$

Viceversa, se la medesima struttura fosse caricata dal basso verso l'alto:

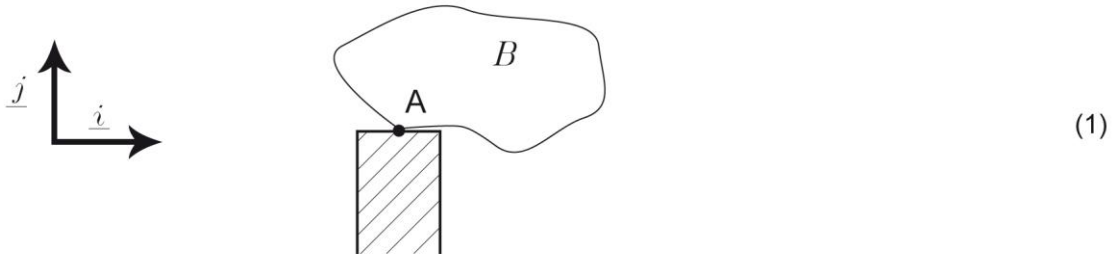


La reazione del vincolo sarebbe direzionata verso il basso (vedi figura (5)).

Il fatto che il vincolo sia bilaterale è evidente nella sua capacità di reagire ai carichi, sia che questi spingano dal basso verso l'alto, sia che spingano dall'alto verso il basso.

2) VINCOLI MONOLATERI O ANOLONOMI

Accanto ai vincoli bilaterali, ci sono i vincoli **monolaterali**, o **unilaterali**, altrimenti detti **anolonomi**, ossia **vincoli esprimibili tramite disequazioni**. La differenza con i vincoli bilaterali è che questi funzionano in due direzioni, mentre i monolateri lavorano in una direzione soltanto. Il più importante di questi, per la sua rilevanza applicativa, è l'**appoggio monolatero**, che indichiamo con questo simbolo:



Spieghiamone anzitutto il funzionamento **cinematico**. Se un corpo (B) ha nel punto (A) un appoggio monolatero come quello in figura (1), il punto (A) non potrà abbassarsi ulteriormente (oltre cioè la posizione indicata), ma potrà alzarsi, distaccandosi dall'appoggio, ossia perdendo il contatto.

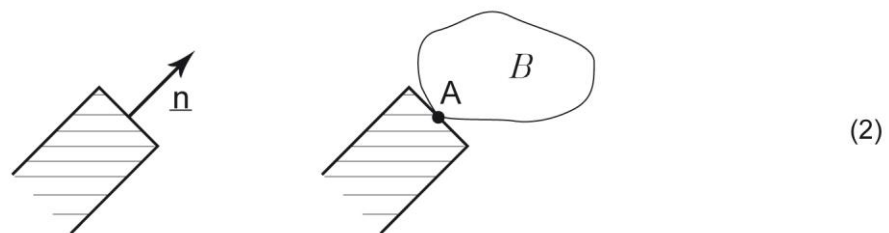
Se il vettore $\underline{V}(A)$ viene espresso nelle sue componenti sulla base ($\underline{i}; \underline{j}$), ovvero:

$$\underline{V}(A) = u(A)\underline{i} + v(A)\underline{j} \quad (a)$$

Il vincolo cinematico si esprime con una disequazione, ovvero:

$$v(A) \geq 0 \quad (b)$$

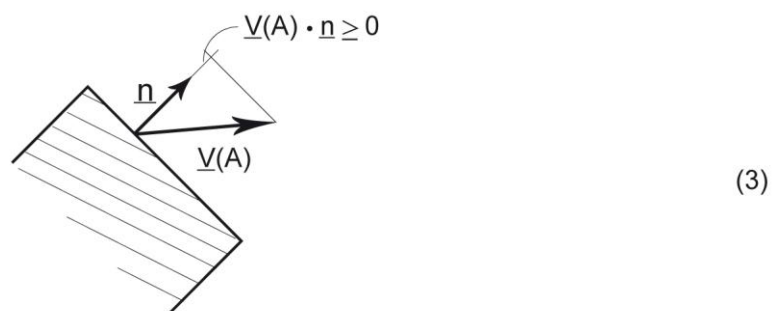
Un vincolo monolatero ha sempre un **versore privilegiato**, poiché rappresenta una superficie al di là della quale non si può andare. In generale, per un appoggio monolatero diretto in maniera generica, ad esempio:



Nella figura (2), l'equazione del vincolo è:

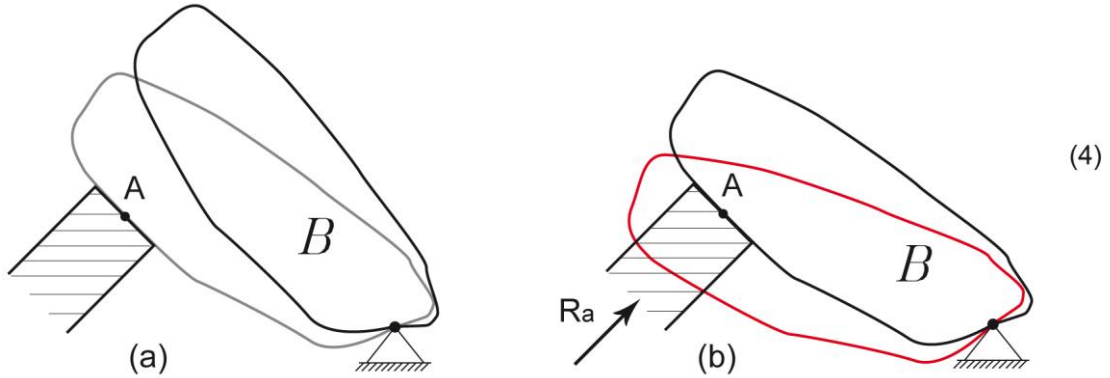
$$\underline{V}(A) \cdot \underline{n} \geq 0 \quad (c)$$

L'equazione (c) esprime la circostanza che la proiezione ortogonale dello spostamento $\underline{V}(A)$ sul versore (\underline{n}) deve essere positiva, o al più nulla. Graficamente:



Sia \underline{n} che $\underline{v}(A)$ si trovano dalla stessa parte della superficie che non si può oltrepassare.

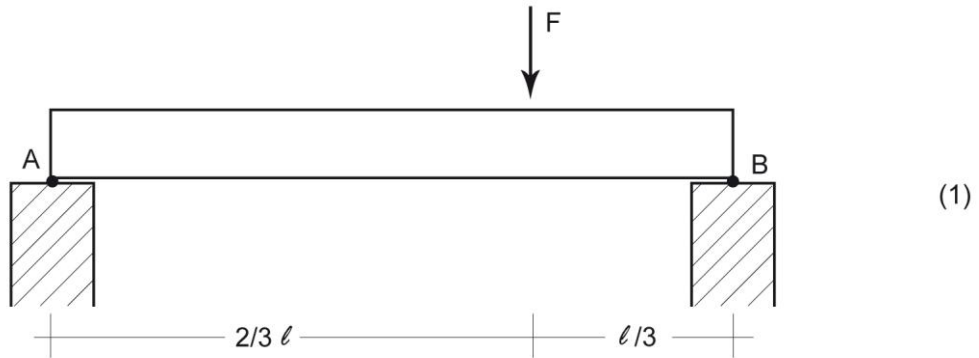
Questa **caratterizzazione cinematica** ha evidenti conseguenze sulla **reazione vincolare**. Intuitivamente, se il vincolo consente il distacco, vuol dire che non è capace di reagire ad esso; viceversa, se il vincolo non ammette la compenetrazione, vuol dire che ad essa reagirà con una reazione vincolare atta ad impedirlo (vedi figura (4), a e b):



La reazione vincolare possibile ha un solo verso, ossia quello concorde con il versore \underline{n} (vedi figura (2)). Varrà pertanto:

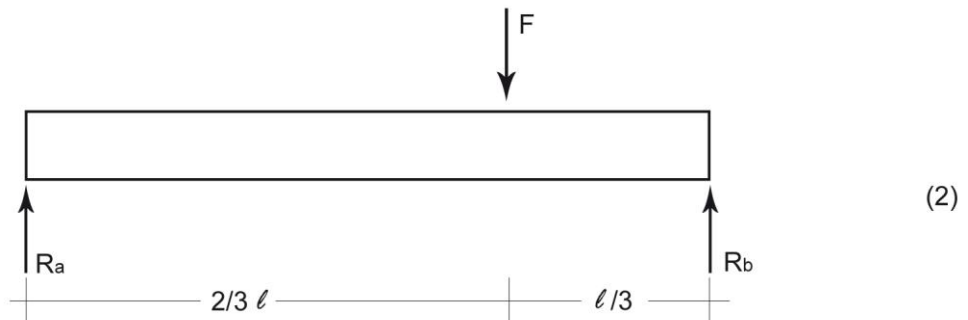
$$R_a \cdot \underline{n} \geq 0 \quad (d)$$

ESEMPIO 1: TRAVE APPOGGIATA CON CARICO PUNTUALE



(A) e (B) sono appoggi monolateri, per cui le uniche reazioni vincolari possibili sono dirette all'esterno della superficie del vincolo; nel caso della figura (1), vanno in direzione verticale.

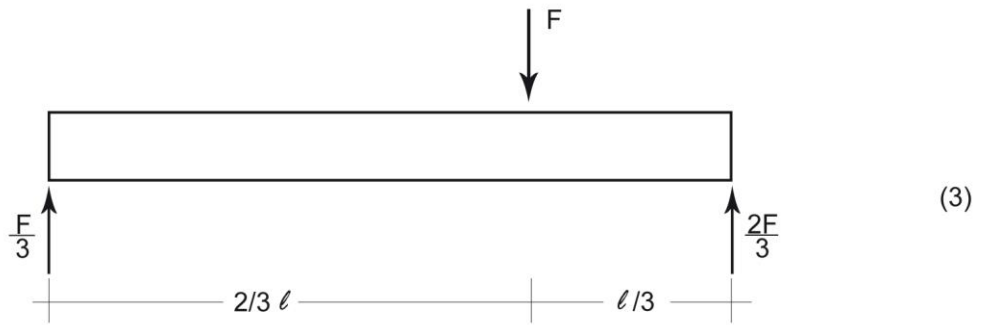
Scriviamo le equazioni di bilancio:



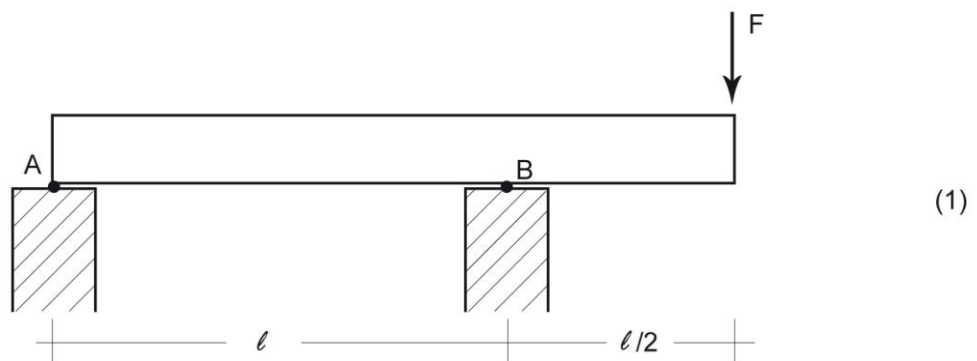
$$\begin{cases} R_a + R_b = F \\ \frac{Fl}{3} + R_a l = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} R_b = \frac{2F}{3} \\ R_a = \frac{F}{3} \end{cases} \quad (a)$$

Quindi

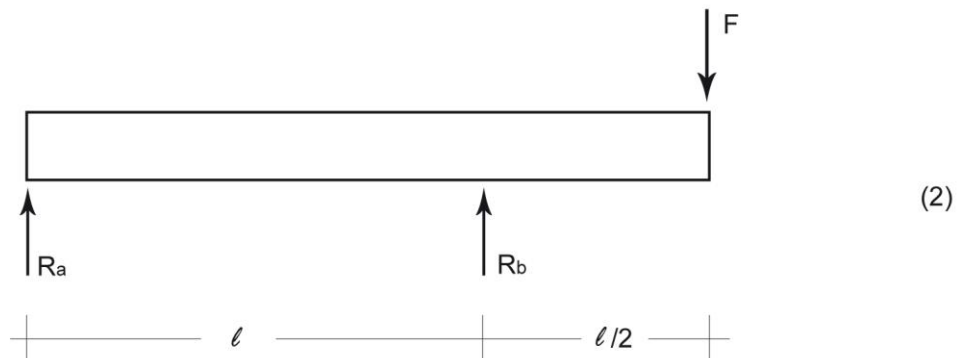
ottego come risultato:



ESEMPIO 2: TRAVE CONTINUA APPOGGIATA CON UNO SBALZO

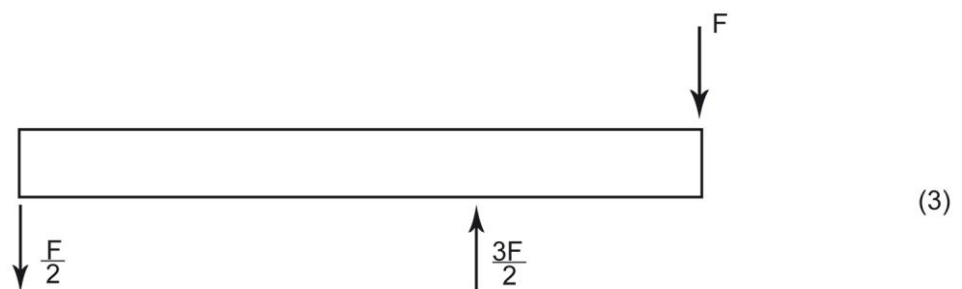


(A) e (B) sono appoggi monolateri, per cui le uniche reazioni vincolari possibili sono dirette all'esterno della superficie del vincolo, nel caso della figura (1), vanno in direzione verticale. Scriviamo le equazioni di bilancio:

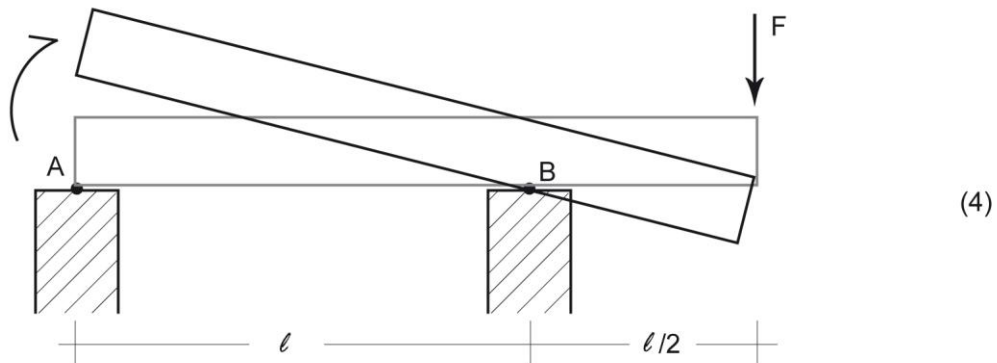


$$\begin{cases} R_a + R_b = F \\ -\frac{3F}{2} + R_b l = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} R_b = \frac{3F}{2} \\ R_a = -\frac{F}{2} \end{cases} \quad (a)$$

Ovvero:



Le equazioni di bilancio ci dicono che il solo modo per garantire l'equilibrio è che il vincolo in (A) reagisca con una forza diretta verso il basso (vedi figura (3)), ma questo, data la monolateralità del vincolo, non è possibile. In una configurazione come quella in figura (1), quindi, l'equilibrio non è garantito, e la conseguenza dell'applicazione della forza (F) è la seguente:

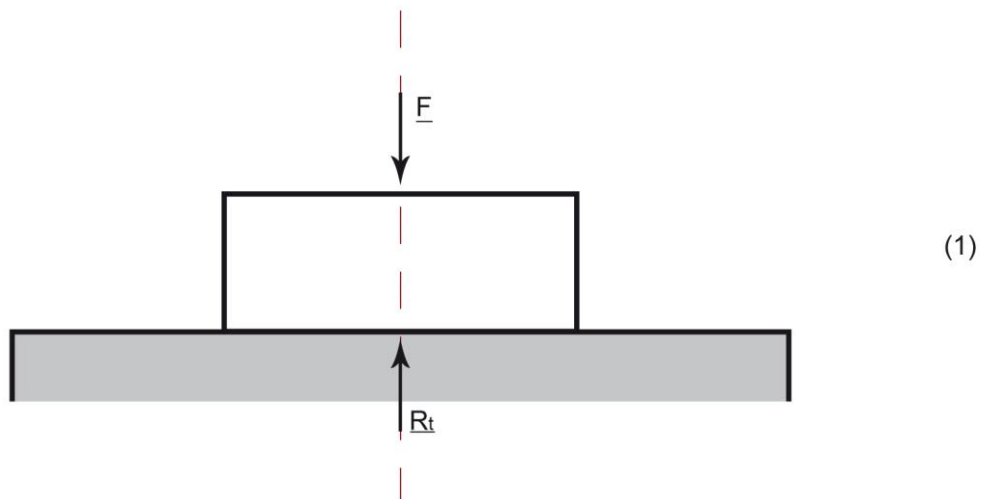


ESEMPIO 3: APPOGGIO SUL TERRENO

Quando si appoggia un corpo sul terreno (stiamo parlando di **appoggio** e non di infissione) si ritrovano le tematiche dei vincoli monolateri. Poggiare un corpo sul terreno, come avviene con tutti i tipi di fondazioni superficiali, significa non aspettarsi che il terreno reagisca ad un tentativo di distacco del corpo. Il terreno può dunque reagire solo dal basso verso l'alto, esercitando sul corpo una pressione dal basso, ed essendo, a sua volta, premuto dall'alto verso il basso.

Dal momento che stiamo, per ora, trattando di tematiche di **solo equilibrio**, e quindi non stiamo considerando le eventuali caratteristiche elastiche del terreno, la trattazione è ovviamente limitata, ma richiama concetti interessanti di "Fondamenti di Meccanica".

Partiamo da un esempio semplice di un corpo rigido appoggiato sul terreno e soggetto ad una forza (F):

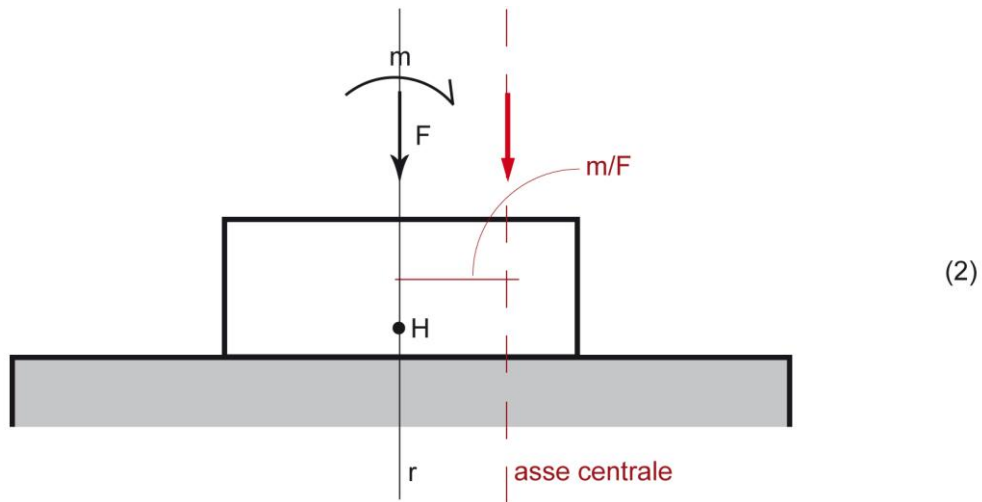


E' ovvio che il corpo sia in equilibrio; il terreno deve garantire al corpo una reazione vincolare uguale ed opposta ad (F) e, soprattutto, che sia diretta lungo la medesima retta d'azione.

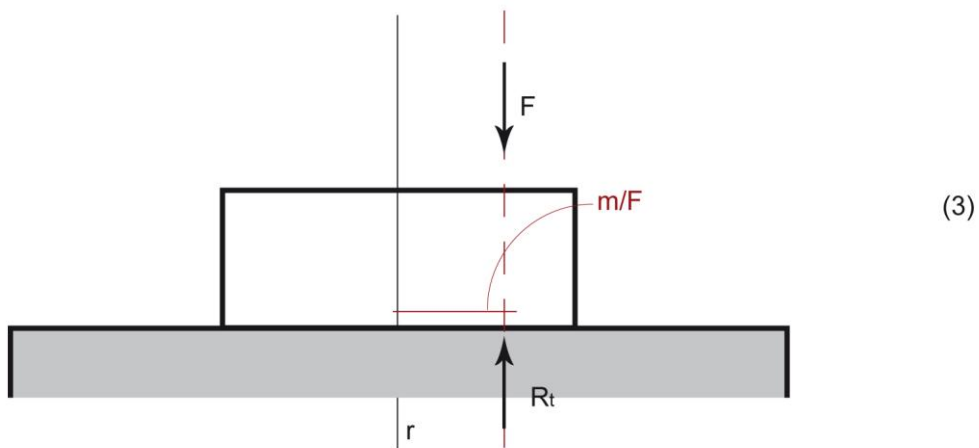
Una prima considerazione da fare è che il corpo non poggia in un punto, né su di un'area ristretta che potrebbe essere a sua volta assimilabile ad un punto (come nel caso degli appoggi di un ponte a travata semplice), ma su di un'area estesa.

Quindi, pur non avendo ancora un modello meccanico raffinato del terreno, possiamo ipotizzare che, a contatto con il corpo rigido, sia tutto il terreno a reagire dal basso verso l'alto, e che (Rt) sia solo la risultante di questa reazione, applicata all'asse centrale.

Ipotizziamo che il corpo rigido si trovi in una nuova configurazione come quella in figura (2):

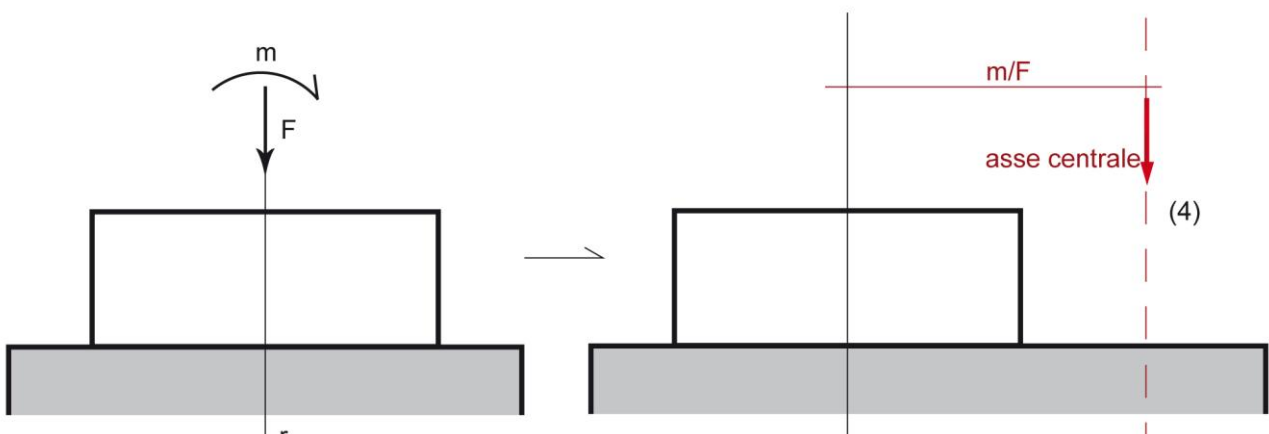


Dobbiamo anzitutto porci il problema di dove sia l'asse centrale del sistema composto dalla forza (F), e dalla coppia di forze (m). Ricordiamo che l'asse centrale di un sistema di forze è il luogo dei punti rispetto ai quali il momento risultante del sistema è nullo; nel nostro caso è ovvio che l'asse centrale non può essere la retta (r), in quanto: $[M(H) = -m]$, ma sarà spostato da (r) di una quantità pari a ($m/F = \text{coppia/forza} = \text{braccio}$). Quindi il sistema di forze può essere ridotto come segue:

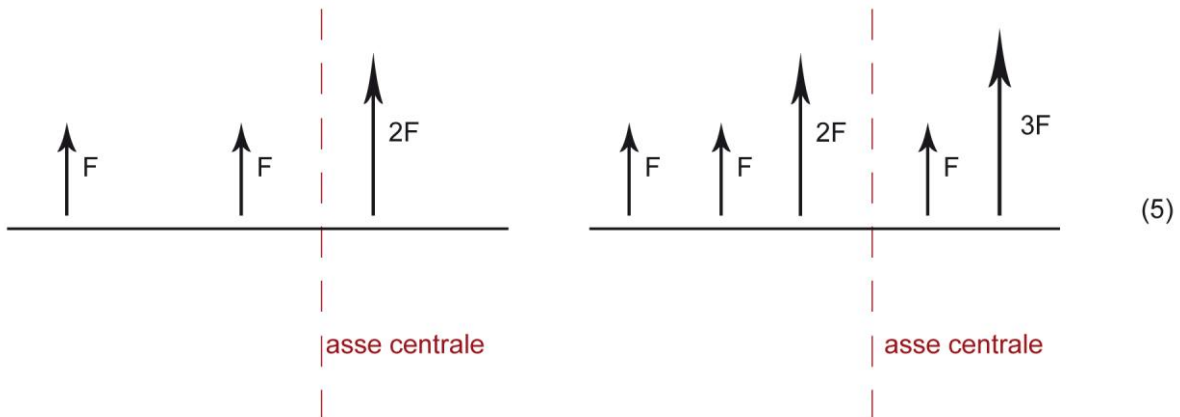


In questo modo è facilmente bilanciato dalla reazione (R_t) del terreno. Non sappiamo per ora come la pressione sul terreno si distribuisca per fornire al corpo una reazione (R_t) che abbia la medesima retta d'azione di (r) (per rispondere a questa domanda dobbiamo ipotizzare un modello meccanico più raffinato del presente).

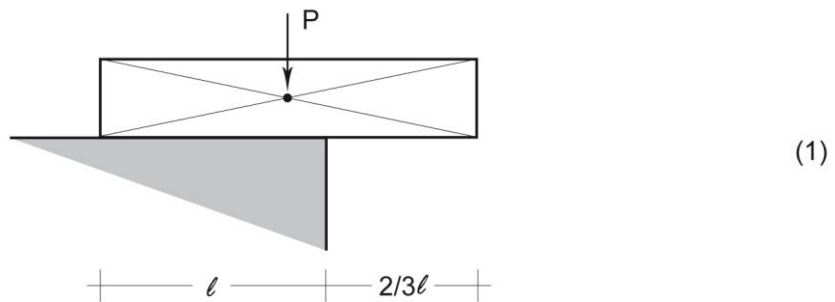
Se invece il rapporto (m/F) è talmente grande da fare in modo che la retta d'azione di (F) cada fuori dall'area di contatto tra il corpo e il terreno, l'equilibrio risulta impossibile:



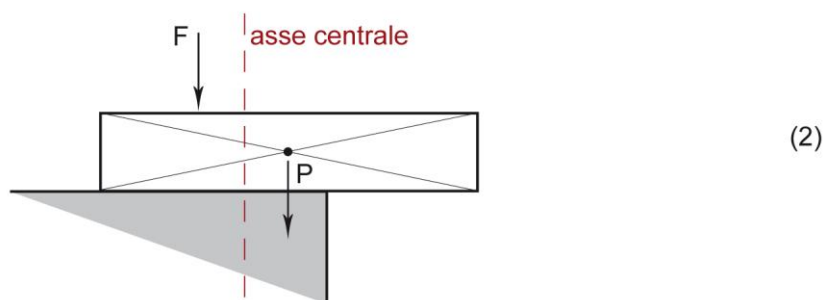
Questo perché, dato che il terreno può reagire solo dal basso verso l'alto, e **solo a contatto con il corpo**, la reazione del terreno è meccanicamente un sistema di forze parallele (distribuito o ripartito) tutte con lo stesso verso. In questo caso l'asse centrale è sempre all'interno del sistema, non può, cioè, uscire fuori; facendo un esempio:



ESEMPIO : CORPO PARZIALMENTE APPOGGIATO



Supponiamo di avere un corpo omogeneo, ma a sbalzo, ossia parzialmente appoggiato su un appoggio monolatero distribuito (terreno). Nel caso della figura (1), il peso (P) può immaginarsi concentrato nel centro geometrico e l'equilibrio con la reazione del terreno (R_t) è possibile. Se però noi aggiungiamo una nuova forza, questa influirà sulla possibilità che il corpo permanga nel suo stato di quiete. Se la forza viene aggiunta a sinistra di (P), l'asse centrale viene spostato verso sinistra e l'equilibrio è certamente possibile (vedi figura (2)):



Ma se la forza viene disposta a destra di (P), l'equilibrio può non essere possibile poiché l'asse centrale potrebbe cadere all'esterno dell'area di contatto tra corpo e terreno (vedi figura (3)).

