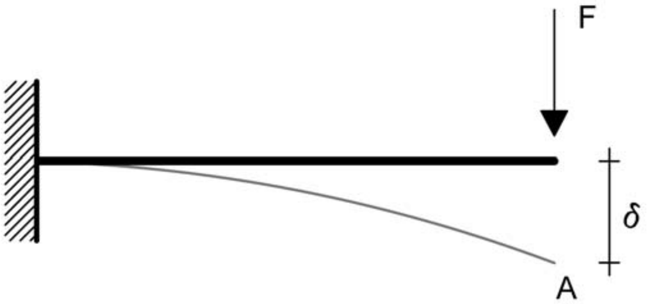
1) SULLA RIGIDEZZA

Quando una struttura è soggetta ad un carico, questo produce una serie di effetti: spostamenti, tensioni e deformazioni. Nel caso riportato in figura (1), la forza F produce la deformata disegnata. Tra tutti gli effetti, ce ne è uno prevalente: quello per cui la forza F compie lavoro. Nel caso di figura (1):



(1)

l'effetto prevalente è lo spostamento trasversale del punto di applicazione della forza, ossia (δ), che vale:

$$\delta = \frac{F l^3}{3EI}$$

Il legame tra (F) (causa) e (δ) (effetto) è lineare (ossia proporzionale) e può essere così riscritto:

$$F = \left(\frac{3EI}{l^3}\right)\delta \qquad F = k\delta \qquad k = \frac{3EI}{l^3}$$

ove (k) è la **rigidezza** dell'asta (in questo caso (A) **può ruotare)**. Posso anche definire l'inverso della rigidezza, che nomino **flessibilità**, e vale:

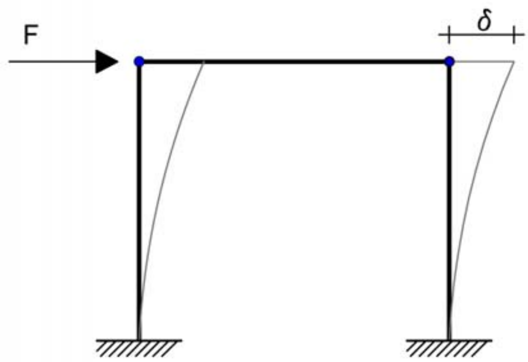
$$\frac{1}{k} = \mathcal{F} \qquad \mathcal{F} = \frac{l^3}{3EI}$$

Cos'è quindi la rigidezza? È la forza necessaria a produrre uno spostamento unitario:

$$F = \frac{3EI}{l^3}\ (\delta = 1) = \frac{3EI}{l^3} = k$$

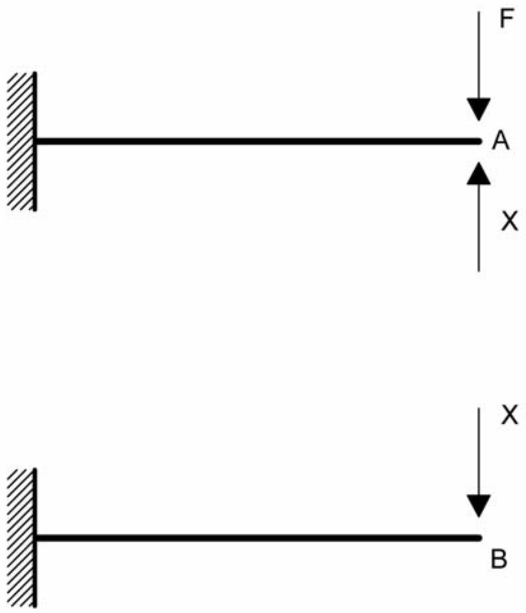
Quanto più grande è la rigidezza, tanto maggiore sarà la forza necessaria per produrre un dato spostamento.

Facciamo come secondo esempio il telaio riportato in figura (2), ponendoci anche in questo caso l'obiettivo di trovare la rigidezza del telaio, ossia il coefficiente di proporzionalità tra (F) e (δ):



(2)

Risolviamo il sistema una volta iperstatico (sono due mensole collegate da un pendolo) con il metodo delle forze. La reazione vincolare incognita sarà la reazione delle due cerniere interne che, per l'equilibrio del corpo A-B, sarà come mostrata in figura (3).



(3)

Il valore dell'incognita iperstatica sarà determinato da un'opportuna equazione di compatibilità cinematica, atta a ricordare al sistema strutturale che i punti A e B non possono spostarsi indipendentemente l'uno dall'altro. L'equazione di compatibilità sarà dunque:

$$V_{(A)} = V_{(B)}$$

ossia, di quanto si abbassa A di tanto si abbassa B (la deformabilità assiale del corpo A-B viene trascurata). L'equazione di compatibilità viene ora particolarizzata applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Infatti, lo spostamento di A è la somma dello spostamento dovuto ad F e di quello dovuto ad X, mentre quello di B è dovuto solo ad X. L'equazione diviene dunque:

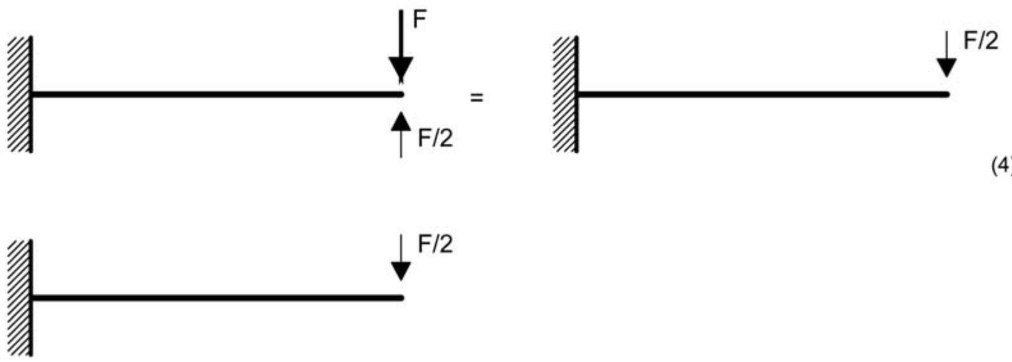
$$V_{(A)}\,(F) + V_{(A)}\,(x) = V_{(B)}\,(x)$$

$$\frac{Fl^3}{3EI} - \frac{xl^3}{3EI} = \frac{xl^3}{3EI}$$

$$\frac{Fl^3}{3EI} = \frac{2xl^3}{3EI}$$

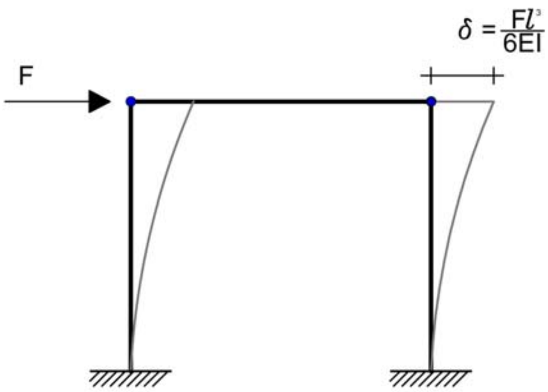
$$x = \frac{F}{2}$$

Quindi il sistema finale risulterà essere quello illustrato in figura (4), in cui risulta evidente che il corpo A-B ripartisce la forza F tra le due mensole, risultando queste caricate entrambe di F/2.



(4)

Pertanto lo spostamento orizzontale sarà pari allo spostamento di una sola mensola caricata in sommità della forza F/2, ovvero:

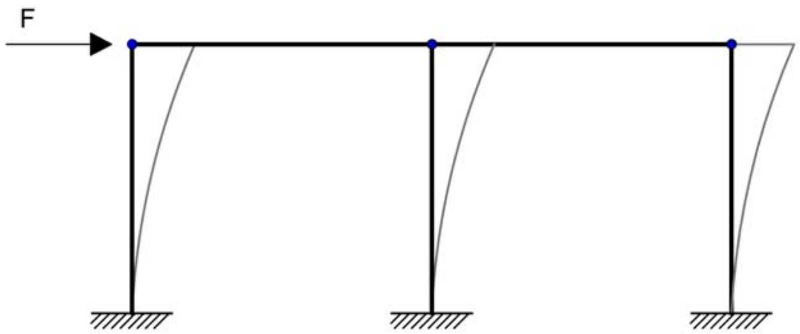


(5)

La **rigidezza traslante**, ossia quella che lega (F) e (d), del portale di figura (5) è pari dunque a:

$$F = \left(\frac{6EI}{l^3}\right)\delta = (k)\,\delta$$

Ovviamente, se andiamo a considerare un sistema ancora più complesso, il valore della rigidezza varierà. Per il telaio di figura (6), la forza F sarà ripartita tra i tre ritti in maniera paritaria (equivale all'ipotesi di traversi che non si deformano per effetto dello sforzo normale) e questo equivale a dire che lo spostamento orizzontale sarà pari allo spostamento di una delle tre mensole caricata con F/3:



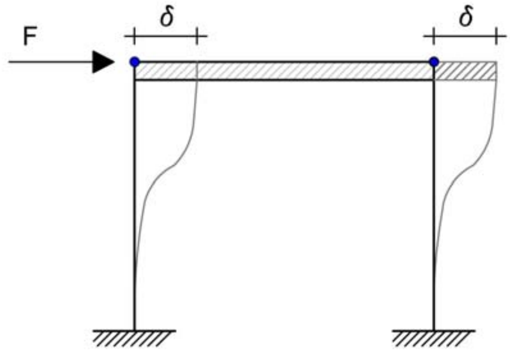
$$\delta = \frac{Fl^3}{9EI}$$

$$F = \delta\,\frac{9EI}{l^3}$$

$$F = \delta\,(k)$$

(6)

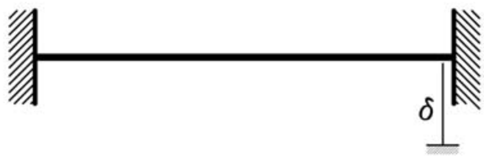
La situazione è diversa nel caso di un telaio **shear–type**, ossia un telaio con tutti nodi ad incastro e con la trave considerata infinitamente rigida flessionalmente rispetto ai pilastri.
Studiamo l'esempio di figura (7):



(7)

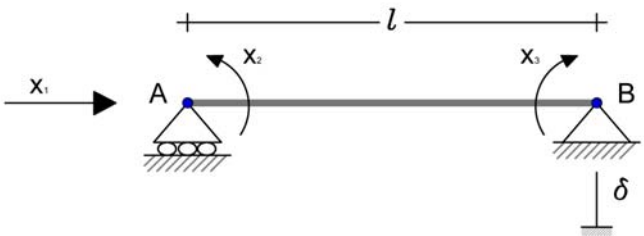
Anche in questo caso, la forza (F) sposta verso destra il traverso, trascinando con sé i ritti, ma la presenza dei nodi incastro e l'ipotesi di rigidezza flessionale infinita della trave, impone ai nodi del traverso una rotazione nulla. In questo caso, quanto vale il rapporto tra (F) e (δ)?

Il ritto si trova nella seguente situazione:



(8)

Ossia nella situazione di una trave doppiamente incastrata soggetta ad uno spostamento imposto in un vincolo (cedimento vincolare assegnato). La situazione del ritto è dunque di forte iperstaticità: il sistema è tre volte iperstatico. Un sistema isostatico equivalente al caso di figura (8) è il seguente:



(9)

ove le tre incognite iperstatiche sono esplicitate. Possiamo tuttavia ritenere nulla la forza (X_1) per l'assenza del benché minimo carico in asse alla trave. Rimangono quindi due incognite iperstatiche:

(10)

Per determinare le due incognite iperstatiche, devo ripristinare la compatibilità cinematica, ricordando al sistema che il A ed in B ci sono due vincoli che impediscono la rotazione della sezione. Pertanto le due equazioni seguenti:

$$\varphi\textbf{(A) = 0} \quad \text{e che} \quad \varphi\textbf{(B) = 0}$$

sono quelle che completano, aggiunte alla figura (10), la descrizione meccanica della trave. Le due equazioni di compatibilità cinematica vanno esplicitate, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. In tal caso, si ha:

$$\varphi_A(x_1) + \varphi_A(x_2) + \varphi_A(\delta) = 0$$
$$\varphi_B(x_1) + \varphi_B(x_2) + \varphi_B(\delta) = 0$$

I valori delle rotazioni in A ed in B dovuti rispettivamente ad X_1 ed X_2 sono determinati sullo schema isostatico per applicazione del teorema dei lavori virtuali e sono riportati nelle figure che seguono (11), (12).

$$\varphi^A(x_1) = \frac{x_1 l}{3EI} \qquad \varphi^B(x_1) = \frac{-x_1 l}{6EI} \qquad (11)$$

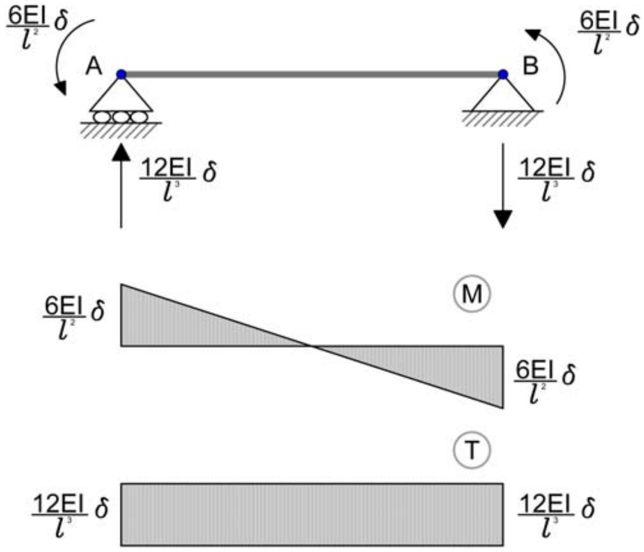
$$\varphi^A(x_2) = \frac{x_2 l}{6EI} \qquad \varphi^B(x_2) = \frac{-x_2 l}{3EI} \qquad (12)$$

Per quanto riguarda i valori delle rotazioni in A ed in B dovuti al cedimento δ queste sono uguali e pari alla rotazione rigida del corpo, dato che è regola generale (ed ovvia) che un cedimento vincolare applicato ad una struttura isostatica non induce deformazioni ma solo spostamento rigido. Il valore (unico) della rotazione rigida è indicato in figura (13):

$$\varphi^A(\delta) = -\frac{\delta}{l} \qquad \varphi^B(\delta) = -\frac{\delta}{l} \qquad (13)$$

A questo punto il sistema di due equazioni (di compatibilità cinematica) nelle due incognite iperstatiche X_1 ed X_2 assume la forma che segue ed ammette la seguente soluzione (unica):

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 l}{3EI} + \dfrac{x_2 l}{6EI} - \dfrac{\delta}{l} = 0 \\ \dfrac{x_2 l}{6EI} + \dfrac{x_1 l}{3EI} - \dfrac{\delta}{l} = 0 \end{cases} \qquad x_2 = -\frac{6EI}{l^2}\delta \qquad x_1 = \frac{6EI}{l^2}\delta$$



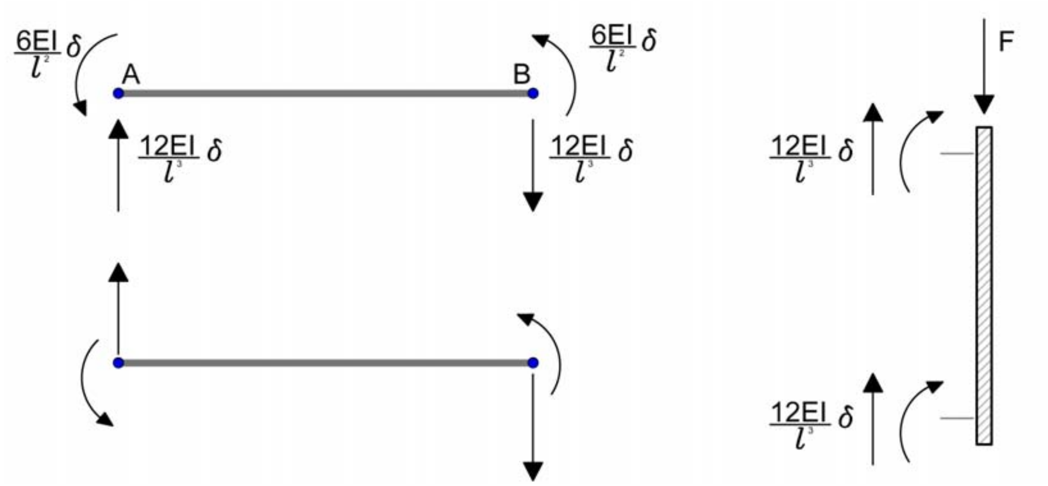
(14)

Le tensioni affioranti, ossia il taglio ed il momento flettente al bordo delle trave in esame (sezioni A e B)

(15)

sono da ovviamente le reazioni vincolari dello schema iperstatico risolto, ossia quello indicato in figura (8).

Ma non dobbiamo dimenticare che lo schema di figura (8) individua la situazione meccanica dei due ritti della figura (7) in cui i due ritti e la trave infinitamente rigida a flessione definiscono un telaio shear-type. Se il traverso si sposta di δ, abbiamo appena dimostrato che induce uno stato tensionale nei due ritti. Nelle sezioni in cui i ritti si innestano nel traverso, questo stato tensionale agirà (eguale ma opposto) sul traverso e contribuirà al suo equilibrio statico.



(16)

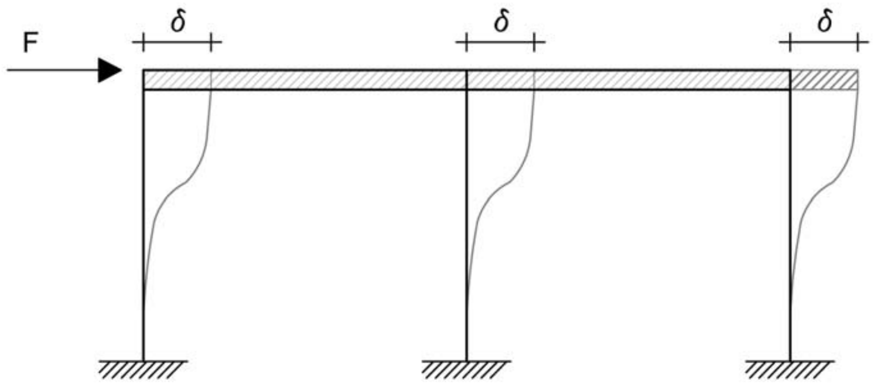
Dalla figura (16) evinciamo che l'equazione di equilibrio alla traslazione del traverso recita:

$$F = \frac{12EI}{l^3}\delta + \frac{12EI}{l^3}\delta = \frac{24EI}{l^3}\delta$$

Che è esattamente quanto volevamo inizialmente trovar, ossia il legame tra la forza F e lo spostamento δ, ossia la rigidezza del telaio shear-type (vedi figura (7)). Tale valore sarà quindi pari a:

$k = (24EI/l^3)$

In maniera del tutto analoga, determiniamo la rigidezza di un telaio shear type a tre ritti:

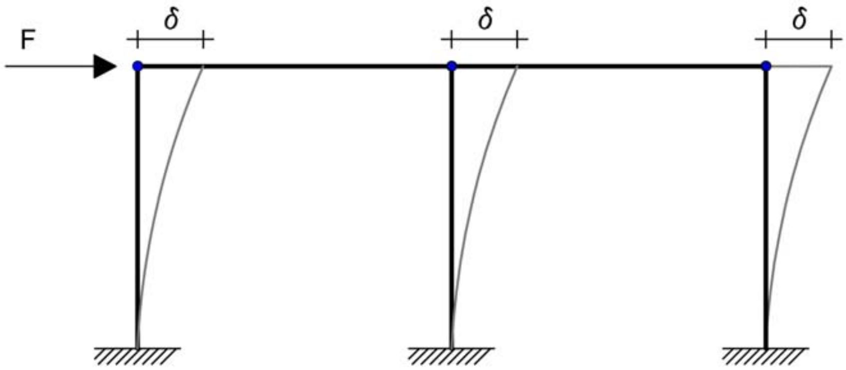


(17)

In cui ogni ritto contribuirà alla rigidezza traslante del telaio con un contributo pari a 12 EI δ/l^3.

$$F = \frac{12EI}{l^3}\delta + \frac{12EI}{l^3}\delta + \frac{12EI}{l^3}\delta = \frac{36EI}{l^3}\delta$$

Se confrontiamo il telaio di figura (17) con quello della figura (18), ci rendiamo conto che la rigidezza di un telaio shear-type è molto più elevata di quella di un telaio con traverso flessibile.



$$F = \delta\frac{9EI}{l^3}$$

(18)

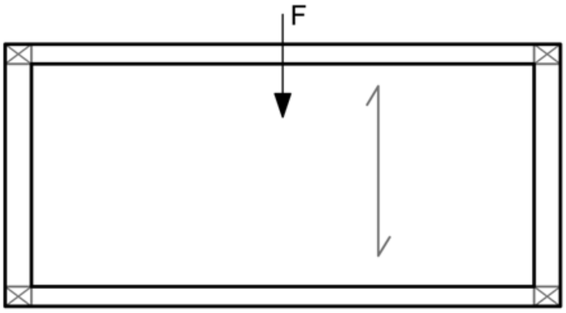
.

APPLICAZIONI

Di seguito sono riportati dei problemi di semplice risoluzione sul comportamento dei controventi rispetto ad un impalcato. È bene precisare che, perché un sistema di controventamento possa essere efficace, bisogna trovarsi nella situazione in cui gli impalcati possono essere considerati corpi rigidi sul proprio piano (al di fuori del quale si inflettono), per cui la forza orizzontale loro applicata tende a spostarli, ed i controventi contrastano questa azione grazie alla loro elasticità. Questo vuol dire, in termini meccanici, che un controvento, nel piano dell'impalcato, è un **appoggio cedevole elasticamente**.

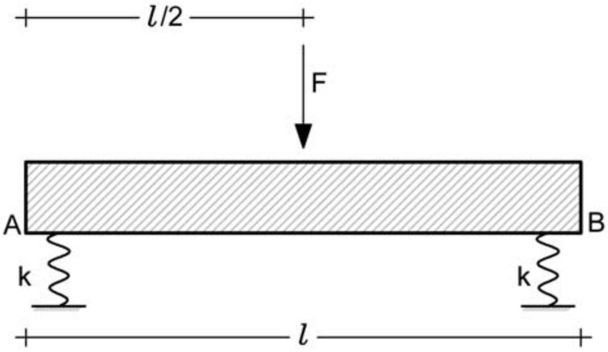
PROBLEMA 1

Prendiamo Il caso di un impalcato che quattro appoggi di sezione uguale (30x40), ed è sottoposto ad una forza orizzontale (F):



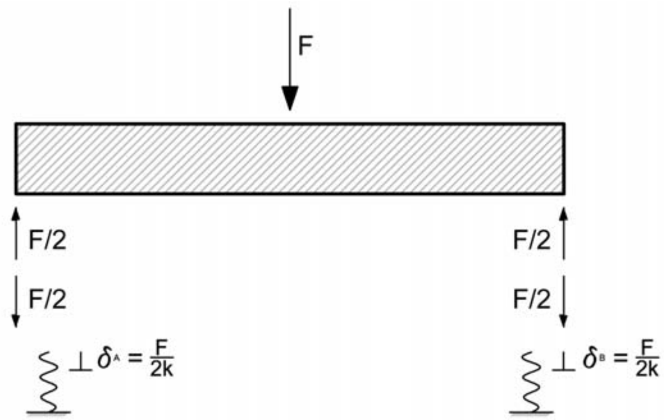
(1)

Posso ridurre il sistema ad uno schema meccanico in cui i **controventi vengono assimilati a molle** (perché si comportano in modo elastico), ed hanno una data rigidezza (k):



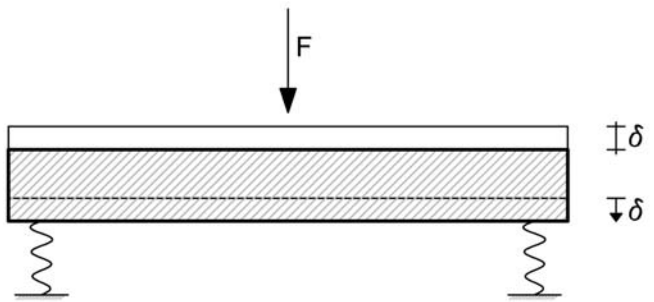
(2)

Osserviamo anzitutto che il sistema è isostatico, per cui posso calcolare le reazioni vincolari con le sole **equazioni di bilancio**. Ovviamente, essendo la forza esterna (F) l'unico contributo (ed essendo il sistema caricato simmetricamente) i due appoggi devono per forza di cose reagire in modo simmetrico:



(3)

Essendo gli appoggi delle molle, nel momento in cui generano una reazione vincolare, generano anche una forza uguale opposta che agisce sulle molle stesse inducendone l'accorciamento. In questo caso l'accorciamento è uguale per entrambe le molle perché per entrambe la rigidezza vale (k).
Vediamo quali sono gli effetti della forza (F):



(4)

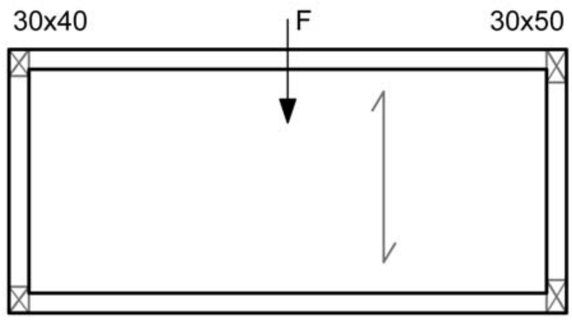
Il corpo trasla di una quantità (δ). Ricordando che ogni molla ha rigidezza pari a **k** , allora δ varrà il rapporto tra la forza agente sulla singola molla **(F/2)** e la sua rigidezza **(k):**

$$\delta = \frac{F}{2k}$$

Ma la medesima formula può essere interpretata come il rapporto tra la forza totale agente sul corpo **(F)** (e quindi sul sistema delle due molle) e la rigidezza totale **(2k)** (ossia la somma delle due rigidezze).

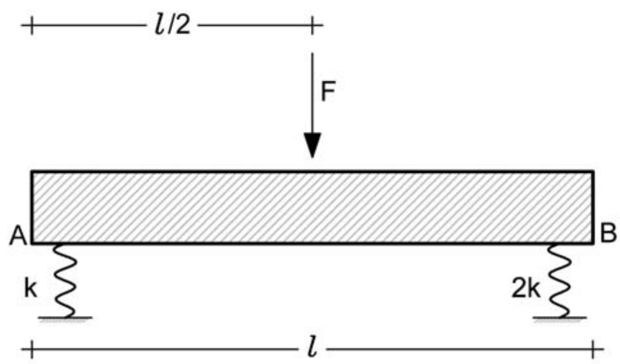
PROBLEMA 2 (a)

Sia dato un impalcato che poggia che ha quattro appoggi, due di sezione 30x40, e due di sezione 30x50, ed è sottoposto ad una forza orizzontale **F**:



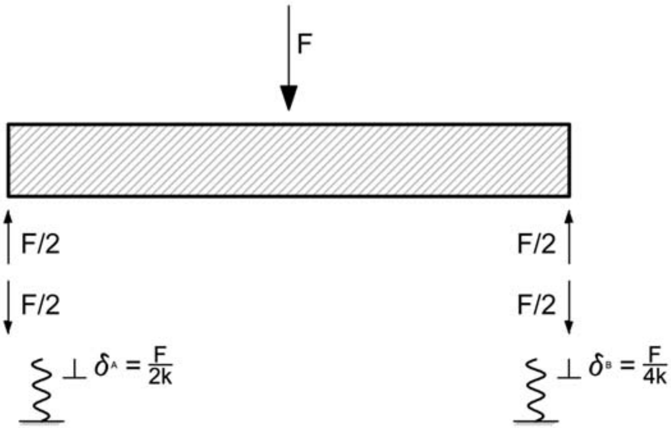
(1)

A livello meccanico posso rappresentare la condizione dell'impalcato come riportato in figura (2):



(2)

Notiamo subito che, **variando la sezione del pilastro**, **varia anche la rigidezza**, per cui nell'appoggio A la rigidezza è uguale a **k**, mentre nell'appoggio B la rigidezza vale **2k**.
Il problema in figura (2) è comunque isostatico, per cui le reazioni vincolari sono univocamente determinate dalle equazioni di bilancio. Come nel problema precedente, essendo il sistema simmetrico, nonché caricato simmetricamente, le reazioni vincolari si divideranno equamente il valore della forza applicata (F):

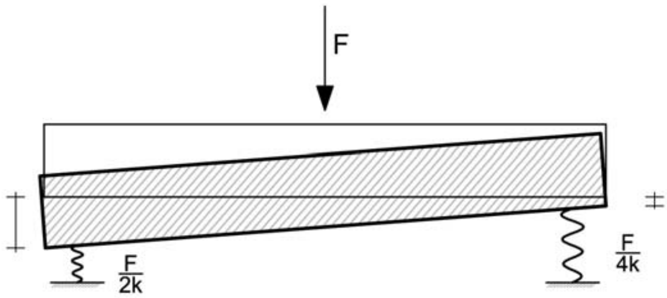


(3)

La forza (**F/2**) che agisce sulle molle ne induce l'accorciamento, ma le molle hanno diversi valori della rigidezza, da cui derivano accorciamenti differenti:

$$\delta_A = F/2K$$
e
$$\delta_B = F/4k$$

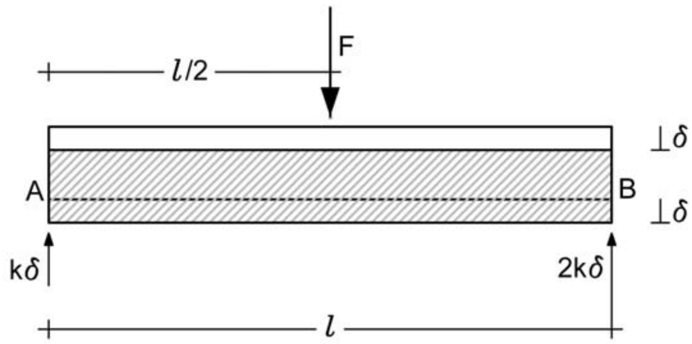
Questo vuol dire che il corpo ruota rigidamente:



(4)

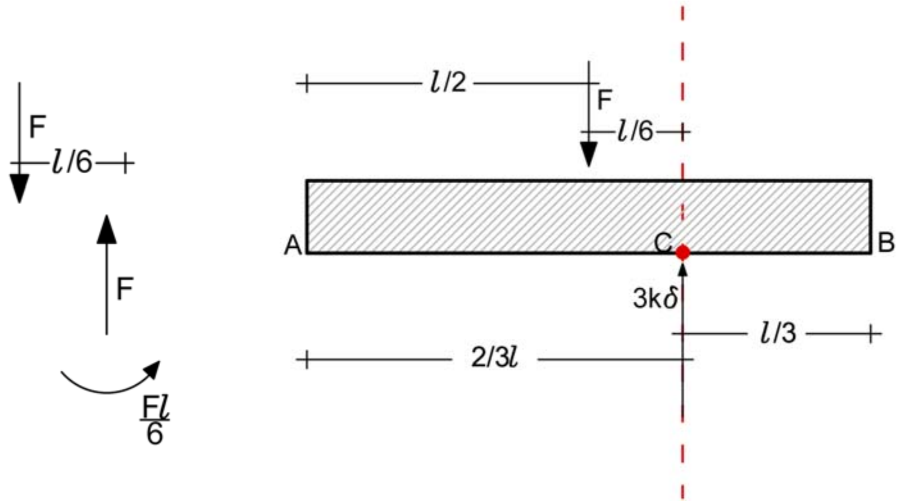
PROBLEMA 2 (b)

Analizziamo nuovamente il problema (2) per fornire una spiegazione diversa della rotazione del corpo. Ipotizziamo in prima istanza che il corpo non ruoti ma semplicemente trasli di una quantità **δ** ed analizziamo il sistema delle reazioni vincolari così ipotizzate:



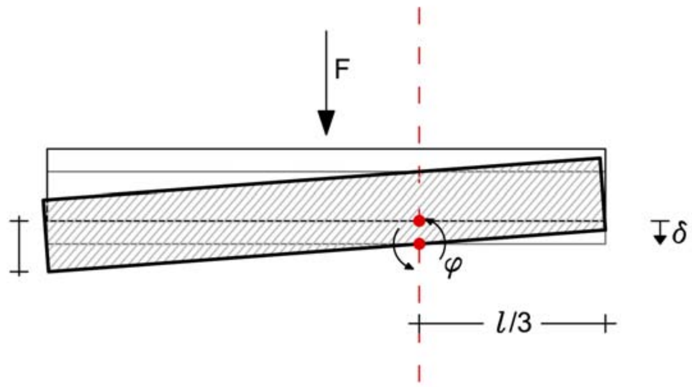
(5)

Chiediamoci: **dove si troverebbe l'asse centrale delle reazioni vincolari ipotizzate in figura (5)?**



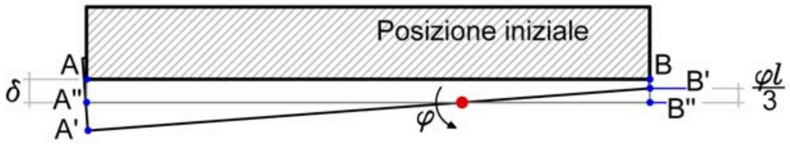
(6)

L'asse centrale si troverebbe nella posizione indicata in figura (6). In tal caso, le reazioni vincolari ipotizzate, potrebbero venire ridotte all'asse centrale, ossia sommate (**F = 3k**δ) ed applicate in C (vedi figura (6)). Ovviamente, in tal caso non sarebbe garantito il bilancio dei momenti, evidente dalla figura (6).Rimane infatti da bilanciare una coppia di forze antioraria di valore pari a **F**l**/6** che induce nel corpo una rotazione di pari segno intorno al punto (C):



(7)

Il corpo, oltre a traslare di una quantità δ, ruota intorno al punto C di una quantità φ. In particolare avremo:

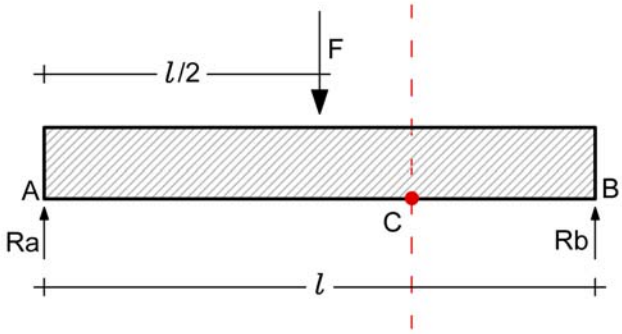


(8)

$$\delta_A = AA' = AA'' + A''A' = \delta + \varphi\ (2/3)\ l$$

$$\delta_B = BB' = BB'' + B''B' = \delta + \varphi\ (1/3)\ l$$

Le due molle, quindi, si accorciano di due quantità diverse e reagiscono con reazioni vincolari differenti:



(9)

$$Ra = k\delta_A = k\ (\ \delta + \frac{2}{3}\varphi l)$$
$$Rb = 2k\delta_B = 2k\ (\ \delta - \frac{1}{3}\varphi l)$$

Imponendo il bilancio dei momenti intorno a C, e sostituendo nell'equazione così ottenuta i valori di Ra e di Rb indicati in figura (9) otterremo:

$$\frac{Fl}{6} = Ra\frac{2l}{3} + Rb\frac{l}{3} \quad = k\ (\ \delta + \frac{2}{3}\varphi l\ )\frac{2l}{3} - 2k(\ \delta + \frac{1}{3}\varphi l\ )\frac{l}{3} = \quad = k\delta\frac{2l}{3} - 2k\delta\frac{l}{3} + k\left(\frac{2l}{3}\right)^2\varphi + 2k\left(\frac{l}{3}\right)^2\varphi =$$
$$\left[k\left(\frac{2l}{3}\right)^2\varphi + 2k\left(\frac{l}{3}\right)^2\right]\varphi = k_\varphi\ \varphi$$

Le due equazioni risolutive del problema sono quindi le seguenti:

$$F - 3k\delta = 0 \quad \leftarrow \quad \rightarrow \quad \frac{F}{3k} = \delta = \frac{F}{k\delta}$$

$$\frac{Fl}{6} - k_\varphi\ \varphi = 0 \quad \leftarrow \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{Fl}{6k_\varphi}$$

Risultano di importanza centrale le due grandezze $\mathbf{k}_\delta$ e $\mathbf{k}_\varphi$.
$\mathbf{k}_\delta$ è la somma delle rigidezze delle molle, che nel nostro caso vale:

$$\mathbf{k}_\delta = \mathbf{2k + k = k_2 + k_1 = 3k}$$

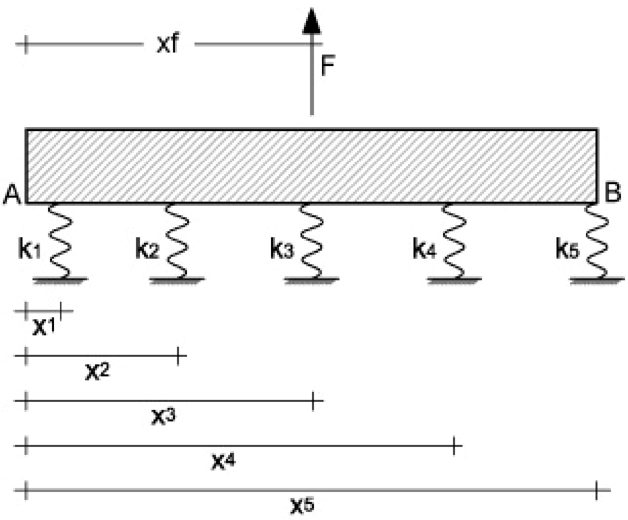
ed è la **rigidezza traslante del sistema di molle**. Per quanto riguarda $\mathbf{k}_\varphi$ invece avrò:

$$k_\varphi = \left[k\left(\frac{2l}{3}\right)^2 \varphi + 2k\left(\frac{l}{3}\right)^2\right] = k_1\, d_1^2 + k_2\, d_2^2$$

che assume il ruolo di rigidezza a rotazione del sistema di molle rispetto al punto C. Il punto C è detto **centro delle rigidezze del sistema di molle**. La rigidezza a rotazione $\mathbf{k}_\varphi$ è una sorta di rigidezza a torsione del sistema delle molle.

3) SISTEMI IPERSTATICI

Consideriamo ora un sistema iperstatico come quello riportato nella figura sottostante:



Il problema dell'equilibrio del corpo rigido in figura è tre volte iperstatico.
Anziché risolverlo con il metodo delle forze, lo risolviamo, generalizzando quanto fatto nel paragrafo precedente, con un metodo che veda alcuni parametri di spostamento quali incognite.

Partiamo anzitutto da una considerazione: **dato che il corpo è rigido e piano, la sua cinematica dipende solo da tre parametri**:

1. la traslazione orizzontale δ**o** (che, in questo caso, è zero)
2. la traslazione verticale δ**v**
3. la rotazione φ

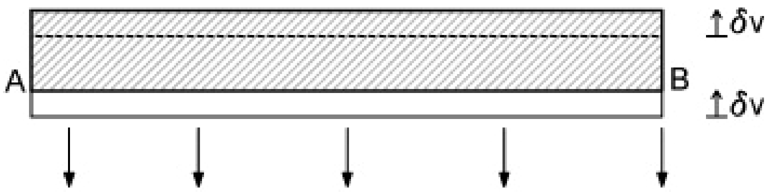
I tre parametri sono le incognite del problema. Infatti, se fossero noti, le reazioni di ognuna delle molle sarebbe conosciuta. Per determinare il valore di questi parametri abbiamo a disposizione le tre equazioni di equilibrio di corpo rigido relative al nostro problema.
Si tratta quindi di scrivere le tre equazioni di equilibrio del corpo rigido, facendo comparire in esse le tre incognite spostamento, δ**o**, δ**v** e φ.

Il procedimento proposto è il seguente: si ipotizza un parametro di spostamento per volta, registrando le azioni nelle molle che questo produce; poi, invocando il principio di sovrapposizione degli effetti, in ogni molla si somma il contributo dovuto ad ognuno dei tre parametri. In conclusione, si scrivono le tre equazioni di equilibrio e si ricavano i valori dei tre parametri.

Nel caso di figura non ci sono né forze né molle orizzontali, per cui sappiamo già che:

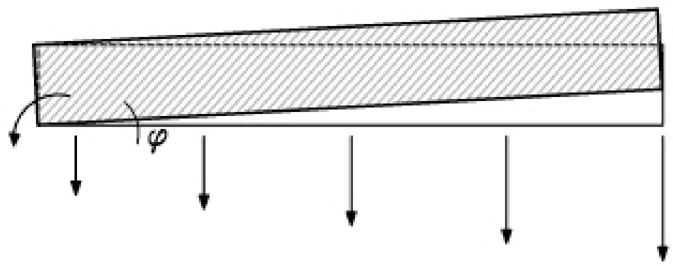
$$\delta \mathbf{o} = \mathbf{0}$$

Di conseguenza le incognite da determinare sono δ**v** e φ. Gli effetti che essi inducono sulle reazioni vincolari elastiche sono i seguenti:



ove

$$\mathbf{R_i^{(1)} = - k_i\, \delta v}$$



In cui

$$\mathbf{R_i^{(2)} = - k_i\, \varphi x_i}$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si avrà:

$$\mathbf{Ri = Ri^{(1)} + Ri^{(2)} = - k_i\, (\delta v + \varphi x_i)}$$

A questo punto vado a scrivere le equazioni di bilancio alla traslazione verticale ed alla rotazione:

$$\begin{cases} F + \sum_{i=1}^{5} R_i = 0 \\ F \cdot xf + \sum_{i=1}^{5} R_i\, x_i = 0 \end{cases}$$

Che risolvo:

$$F - \Sigma_i\, k_i\, (\delta v + \varphi x_i) = F - \delta v\, (\Sigma_i\, k_i) - \varphi\, (\Sigma_i\, k_i\, x_i) = 0$$

$$\mathbf{F = \delta v\, (\Sigma_i\, k_i) + \varphi\, (\Sigma_i\, k_i\, x_i)}$$

$$F\, x_f - \Sigma_i\, k_i\, (\delta v + \varphi x_i)\, x_i = F\, x_f - \Sigma_i\, k_i\, x_i\, \delta v - \Sigma_i\, k_i\, x_i^2\, \varphi =$$
$$= F\, x_f - \delta v\, (\Sigma_i\, k_i\, x_i) - \varphi\, (\Sigma_i\, k_i\, x_i^2)$$

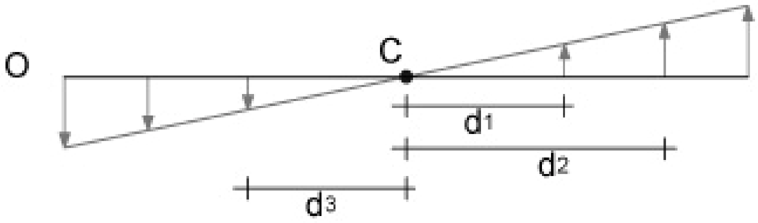
$$\mathbf{F\, x_f = \delta v\, (\Sigma_i\, k_i\, x_i) + \varphi\, (\Sigma_i\, k_i\, x_i^2)}$$

Posso riscrivere il sistema delle due equazioni in grassetto, mettendo in evidenza la matrice dei coefficienti, che prende il nome di **matrice di rigidezza**:

$$\begin{bmatrix} (\Sigma_i\, k_i) & (\Sigma_i\, k_i\, x_i) \\ (\Sigma_i\, k_i\, x_i) & (\Sigma_i\, k_i\, x_i^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_v \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Fxf \end{Bmatrix}$$

Arrivati a questo punto il problema è virtualmente risolto: si potrebbero valutare i coefficienti della matrice, risolvere il sistema 2x2 e, quindi, arrivare alla soluzione del problema meccanico. Dobbiamo notare che questa matrice dipende dalla scelta del punto **O**, perché è il punto attorno al quale abbiamo scelto di far agire φ ed effettuato il bilancio dei momenti; difatti, $\mathbf{x_i}$ è la distanza generica della molla dal punto **O**.

Ma se scegliessimo un punto **C** interno al corpo, come quello riportato in figura:



noteremmo che le distanze $\mathbf{d_i}$ delle molle da **C** non potrebbero avere lo stesso segno, in quanto conducono a spostamenti verticali, ma anche a reazioni vincolari di segno opposto, a seconda che la molla si trovi a destra o a sinistra di **C**.
Di conseguenza, nella sommatoria:

$$\sum_i \mathbf{k_i\ d_i}$$

alcuni contributi sono positivi, altri negativi. Se scelgo il punto **C** in modo tale che sia verificato che:

$$\sum_i \mathbf{k_i\ d_i = 0}$$

la matrice di rigidezza assumerà forma diagonale, ossia si annulleranno i termini fuori dalla diagonale prioncipale:

$$\begin{bmatrix} (\sum k_i) & 0 \\ 0 & (\sum_i k_i d_i^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_v \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Fdc \end{Bmatrix}$$

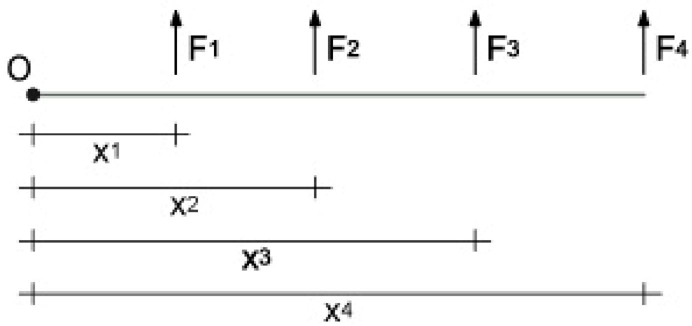
E la soluzione sarà immediata:

$$\delta\mathbf{v = F/} \sum_i \mathbf{k_i}$$

$$\varphi \mathbf{= F\ d_c /} \sum_i \mathbf{k_i\, d_i^2}$$

Il problema allora diventa la determinazione del punto **C**, che chiameremo **centro delle rigidezze**.

Come si determina? Esattamente nello stesso modo in cui si trova il centro di un sistema di forze parallele:



In questo caso:

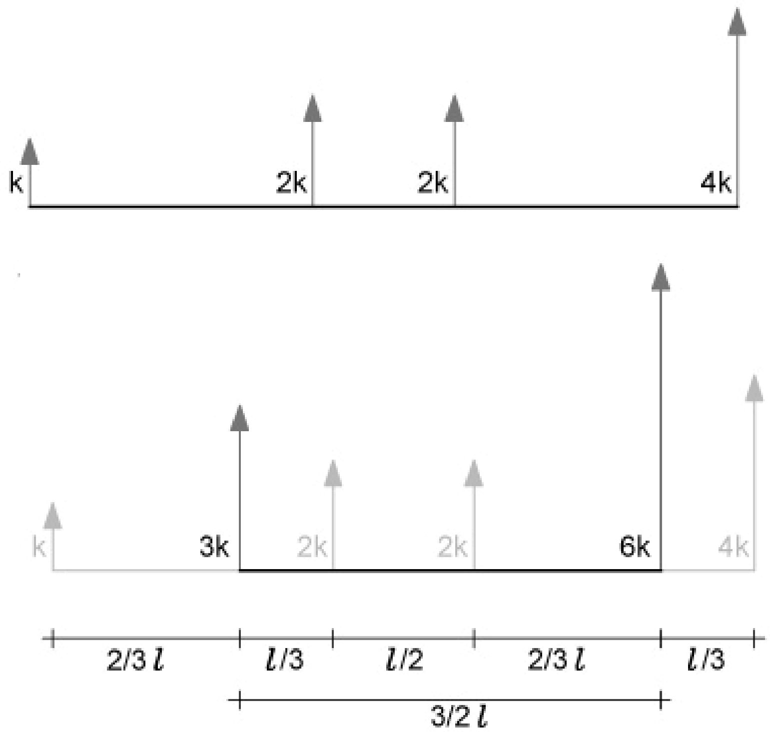
$$R = \sum_i F_i \qquad M_{(0)} = \sum_i F_i x_i$$

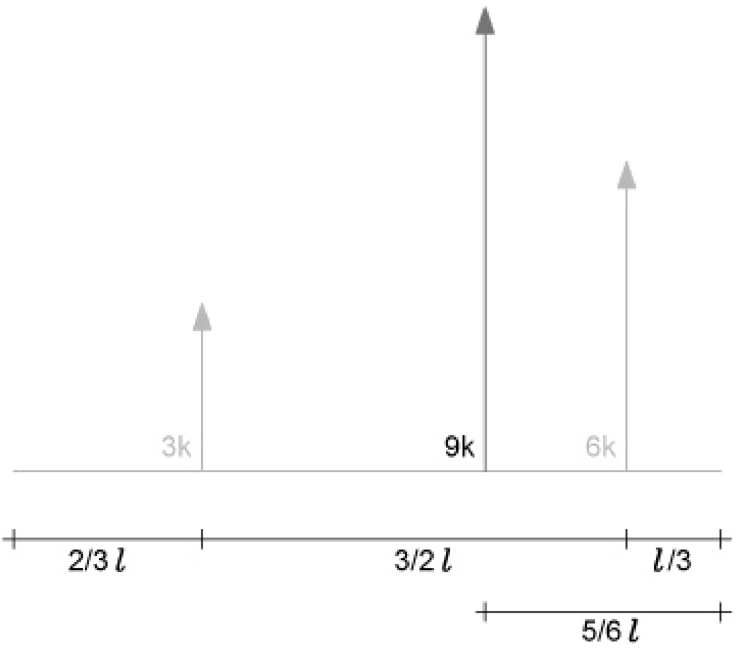
$$Xc = M_{(O)}/R = \sum_i F_i x_i / \sum_i F_i$$

Se voglio trovare il centro delle rigidezze, anziché (F_i) avrò (k_i), ma la struttura della formula sarà la medesima:

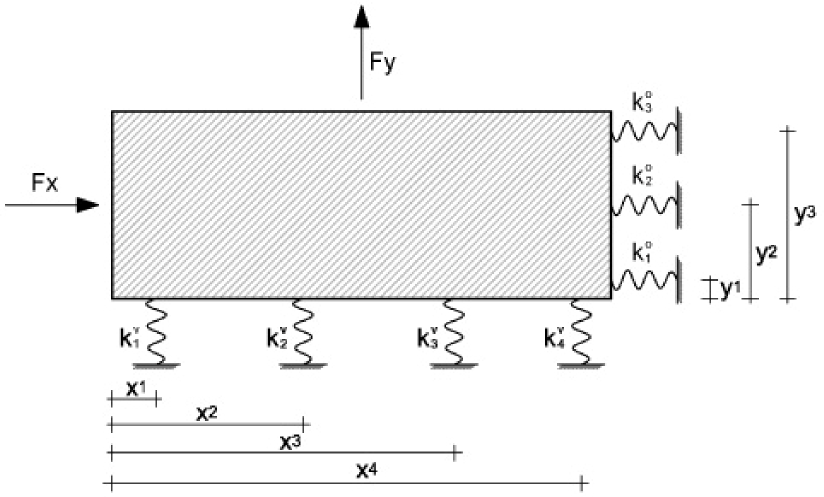
$$x_c = \frac{(\sum_i k_i x_i)}{(\sum_i k_i)}$$

Facciamo un esempio:

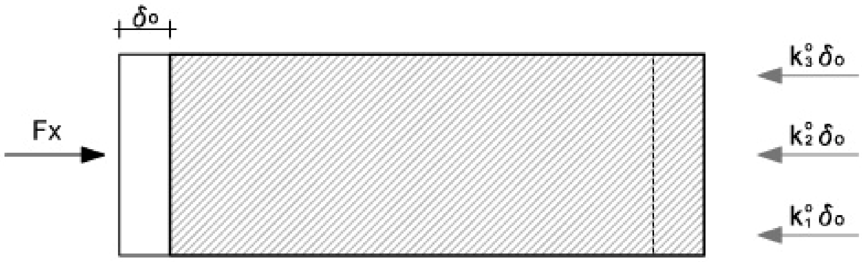


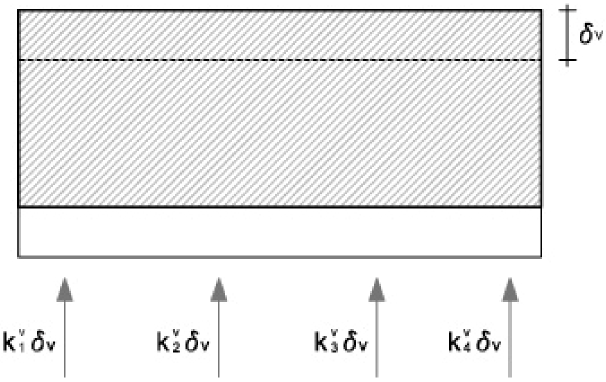


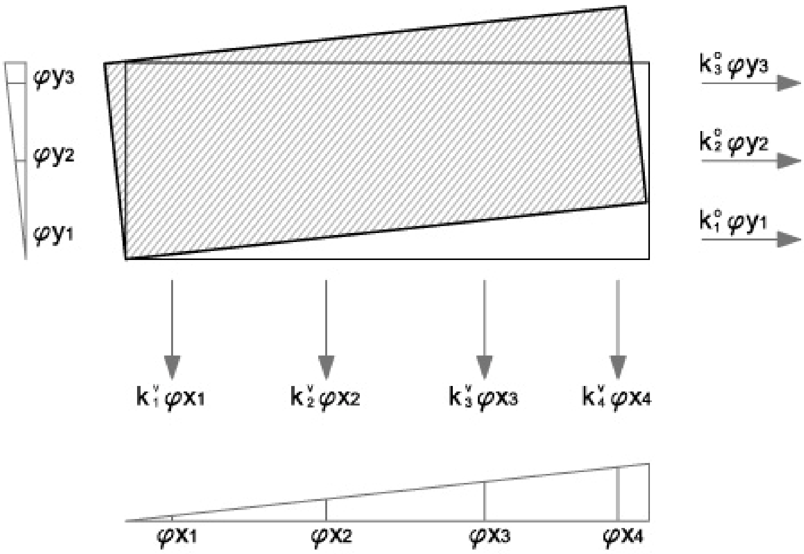
Andiamo ora risolvere un sistema sul quale agiscono sia forze orizzontali che verticali:



I parametri incogniti sono quindi: δ**o**, δ**v** e φ. Analizziamo singolarmente gli effetti che questi parametri hanno sul corpo rigido:







In cui:

$$R_1^v = - k_1^v\,(\delta v + \varphi x_1)$$
$$R_2^v = - k_2^v\,(\delta v + \varphi x_2)$$
$$R_3^v = - k_3^v\,(\delta v + \varphi x_3)$$
$$R_4^v = - k_4^v\,(\delta v + \varphi x_4)$$

$$\mathbf{R_i^v = - k_i^v\,(\delta v + \varphi x_i)}$$

$$R_1^o = - k_1^o\ \delta o + k_1^o\ \varphi y_1 = - k_1^o\,(\delta o + \varphi y_1)$$
$$R_2^o = - k_2^o\,(\delta o + \varphi y_2)$$
$$R_3^o = - k_3^o\,(\delta o + \varphi y_3)$$

$$\mathbf{R_i^o = - k_i^o\,(\delta o + \varphi y_i)}$$

In questo caso le equazioni di bilancio assumeranno la forma:

$$Fx + \textstyle\sum_i R_i^o = 0$$
$$Fy + \textstyle\sum_i R_i^v = 0$$
$$M^e(o) + \textstyle\sum_i R_i^v\, x_i - \sum_i R_i^o\, y_i = 0$$

In esse sostituiamo le espressioni di ($\mathbf{R}_i^v$) e ($\mathbf{R}_i^o$) ed otterremo:

$$\delta_o \sum_i K_i^o - \varphi \sum_i K_i^o y_i = \mathbf{Fx}$$

$$\delta_v \sum_i K_i^v - \varphi \sum_i K_i^v x_i = \mathbf{Fy}$$

$$\delta_v \sum_i K_i^v x_i - \delta_o \sum_i K_i^o y_i + \varphi (\sum_i K_i^v x_i^2 + \sum_i K_i^o y_i^2) = \mathbf{M^e(o)}$$

Questo è un sistema di tre equazioni nelle tre incognite δ_o, δ_v, φ, con tre termini noti **Fx**, **Fy** e $\mathbf{M^e(o)}$. In questo sistema di equazioni molti termini dipendono dalla scelta del punto **O**, in particolare tutti i coefficienti che contengono le distanze verticali (y_i) ed orizzontali (x_i) dei controventi da (o), ma anche il momento risultante M^e(o). Se si varia **O** questi coefficienti variano a loro volta.

Scegliendo come polo il punto *C* così definito:

$$x_c = \sum_i K_i^v x_i / \sum_i K_i^v$$

$$y_c = \sum_i K_i^o y_i / \sum_i K_i^o$$

le distanze dei controventi dal polo da **C** andranno ridefinite come segue:

1. $\underline{d}_i^v = x_i - x_c$
2. $\underline{d}_i^o = y_i - y_c$

in tal caso i seguenti coefficienti si annullano:

$$\sum_i K_i^v \underline{d}_i^v = \sum_i K_i^v (x_i - x_c) = \sum_i K_i^v x_i - \sum_i K_i^v x_c = 0$$

$$\sum_i K_i^o \underline{d}_i^o = \sum_i K_i^o (y_i - y_c) = \sum_i K_i^o y_i - \sum_i K_i^o y_c = 0$$

Inoltre il termine:

$$\sum_i K_i^v x_i^2 + \sum_i K_i^o y_i^2$$

Si trasforma in:

$$\sum_i K_i^v \underline{d}_i^v + \sum_i K_i^o \underline{d}_i^{o2}$$

Ed il momento si trasforma in $\mathbf{M^e(c)}$. In tal caso il sistema di equazioni si semplifica come segue:

$$\delta_o \sum_i K_i^o = \mathbf{Fx}$$

$$\delta_v \sum_i K_i^v = \mathbf{Fy}$$

$$\varphi (\sum_i K_i^v \underline{d}_i^v + \sum_i K_i^o \underline{d}_i^{o2}) = \mathbf{M^e(o)}$$

da cui posso ricavare le incognite che valgono:

$$\delta_o = Fx / \sum_i K_i^o$$

$$\delta_{\mathbf{v}} = Fy / \Sigma_i K_i^v$$

$$\varphi = M^e(o) / K_\varphi$$

dove

$$K_\varphi = (\Sigma_i K_i^v \underline{d}_i^v + \Sigma_i K_i^o \underline{d}_i^{o2})$$

Noti $\delta_{\mathbf{o}}$**,** $\delta_{\mathbf{v}}$**,** φ, posso determinare le reazioni elastiche di ogni controvento:

$$\mathbf{R_i^v} = K_i^v (\delta_v + \varphi\, \underline{d}_i^v)$$

$$\mathbf{R_i^o} = K_i^o (\delta_o + \varphi\, \underline{d}_i^o)$$