

1. PREMESSA

Le strutture si possono classificare in due gruppi a seconda di come esse reagiscono alle azioni esterne: un primo gruppo funziona per *massa*, un secondo gruppo per *forma*. Appartengono al primo gruppo le travi, che rispondono alle sollecitazioni in relazione al valore del momento d'inerzia della sezione, o i muri, che reagiscono con il proprio peso. Gli archi, invece, appartengono al secondo gruppo, sopportando i carichi esterni per opera della loro forma geometrica. A questo stesso gruppo appartengono le travature reticolari. Una delle caratteristiche delle strutture che lavorano per forma è che sono strutture ottimizzate. Esse, difatti, tendono a lavorare solo a sforzo normale centrato, e questa loro caratteristica consente un'ottimizzazione del materiale, a differenza delle strutture inflesse.

A tal proposito, si consideri una trave soggetta ad una densità di carico q :

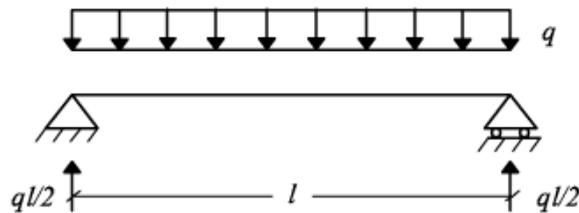


Fig. 1.1

La simmetria della geometria accompagnata alla simmetria del carico implica la nascita delle due reazioni vincolari uguali che, per effetto del braccio, generano insieme al carico esterno un momento in mezzeria di valore noto. Questo momento flettente deve essere sopportato dalla sezione. Il diagramma delle tensioni, mostrato in Fig. 1.2, varia linearmente lungo l'altezza della sezione in accordo con la formula di Navier: $\sigma(y) = \frac{M}{J} y$

Dove

M = momento esterno

J = momento d'inerzia intorno all'asse x

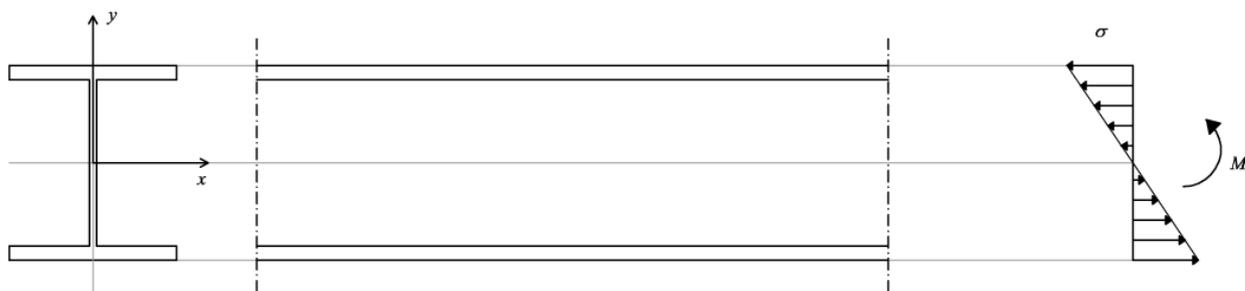


Fig. 1.2

E' ovvio che in tal caso, i punti della sezione più distanti dal centro geometrico della stessa siano i più sollecitati e, quindi, i primi a raggiungere un eventuale valore di crisi della tensione medesima, ovviamente funzione del materiale utilizzato. Questa considerazione tende ad evidenziare che in una struttura progettata per opporsi alla flessione, il materiale concentrato alle estremità della sezione lavora molto, mentre il materiale prossimo al centro geometrico sopporta valori bassi della tensione. Questo significa anche che la sezione ha riserve di resistenza, dato che la crisi di un punto del materiale non coincide con la crisi di tutta la sezione. L'utilizzo di profili IPE, nel caso dell'acciaio, con un'anima sottile ed ali spesse tende ad ottimizzare l'uso del materiale, concentrando materia solo laddove veramente serve.

Viceversa, una struttura che lavori soprattutto a trazione o a compressione (Fig. 1.3), risulta fortemente ottimizzata, perché l'intera sezione lavora allo stesso stato tensionale. Nello sforzo normale centrato, il diagramma delle tensioni è costante su tutta la sezione ed il valore della

tensione è pari a $\sigma = \frac{N}{A}$.

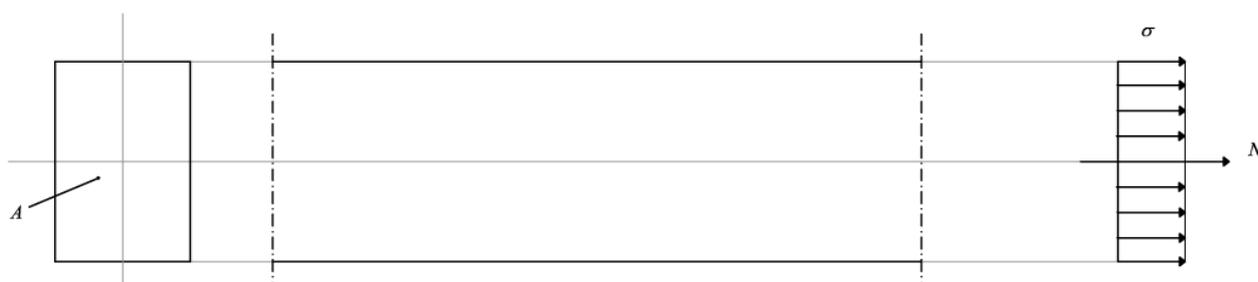


Fig. 1.3

In questo caso tuttavia la sezione non ha riserve di resistenza e la crisi di un punto equivale alla crisi di tutta la sezione. Se poi l'elemento strutturale ha sezione costante e sforzo normale costante, la crisi della sezione coincide con la crisi dell'elemento stesso.

2. LA STRUTTURA AD ARCO

L'arco è una struttura che trasforma i carichi *prevalentemente* in sforzo normale o, in casi particolari di seguito esposti, solo in sforzo normale. Generalmente le sollecitazioni dovute a taglio e momento flettente sono presenti in minima parte.

Leonardo definì l'arco come *la somma di due debolezze* intese come le due travi sagomate di cui era formato (Fig. 2.1).

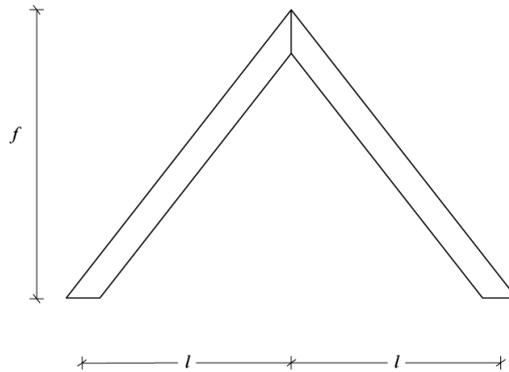


Fig. 2.1

Le due travi prese singolarmente presentano uno schema statico in cui il peso proprio (P) viene bilanciato dal terreno (che esercita sulla trave un vincolo monolatero) con una forza uguale ed opposta (Fig. 2.2).

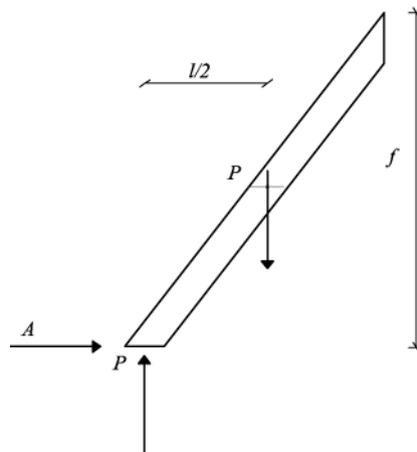


Fig. 2.2

Queste due forze formano però una coppia di braccio non nullo che tende a ribaltare la trave. Questo momento deve essere equilibrato, affinché risulti soddisfatto l'equilibrio a rotazione.

Il terreno, con la sua reazione orizzontale dovuta all'attrito, può fornire uno delle due forze che concorrono a formare la coppia equilibrante. L'altra forza è necessariamente quella esercitata da una seconda trave, uguale e appoggiata alla prima, che funzioni in modo speculare (Fig. 2.3).

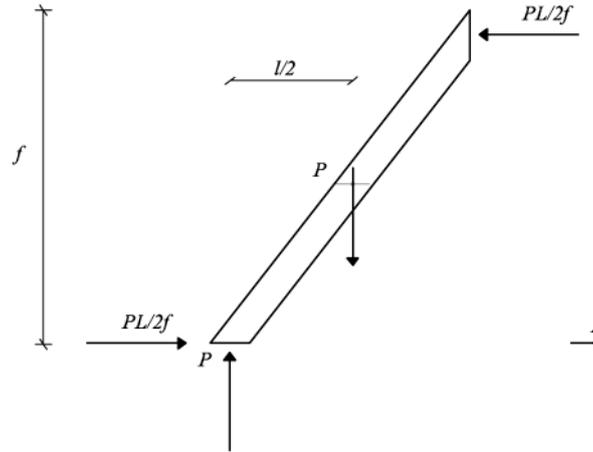


Fig. 2.3

2.2 Arco a tre cerniere

L'arco a tre cerniere è una struttura isostatica se i vincoli sono ben posti ovvero se le cerniere non sono allineate (in tal caso, l'arco si dice degenere). Dall'analisi dei gradi di vincolo e dei gradi di libertà, essendo costituito da due corpi, risulta che $v=l=6$.

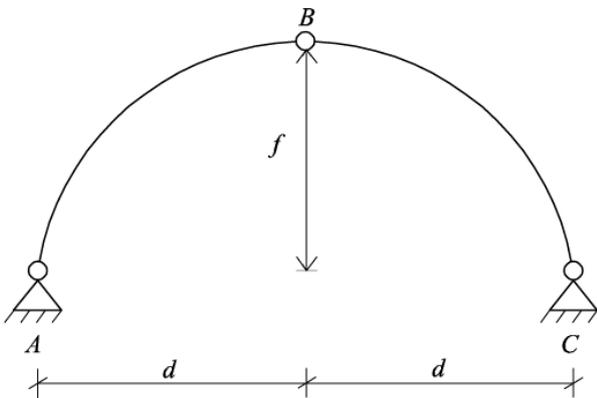


Fig. 2.4 Arco a tre cerniere

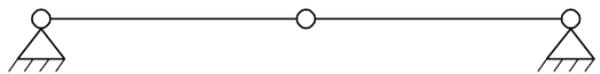


Fig. 2.5 Arco degenere

Fig. 2.6

Nel caso in figura Fig. 2.6 le equazioni di bilancio sono sufficienti a risolvere il problema dell'equilibrio della struttura.

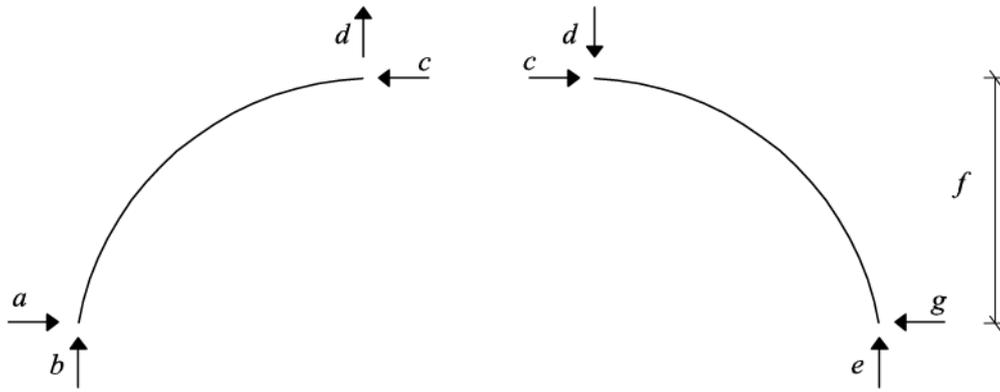


Fig. 2.7

Dato che in una struttura isostatica, le reazioni vincolari dipendono solo dai punti di applicazione delle forze, sia attive che reattive, ai fini del ragionamento che segue è possibile considerare l'arco in Fig. 2.8. Esso è composto da due travi rettilinee e caricato con una densità di carico (q) per unità di lunghezza proiettata sull'orizzontale la cui risultante vale quindi $q \cdot 2l$.

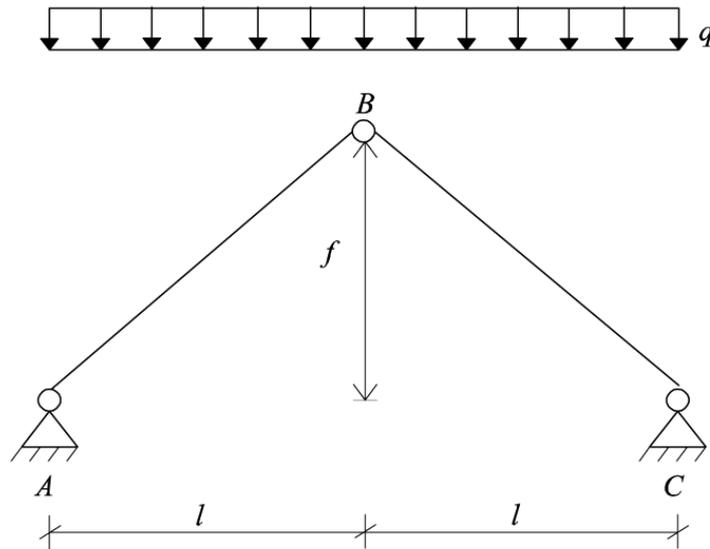


Fig. 2.8

Il problema dell'equilibrio statico si risolve, sfruttando la simmetria (che impone $d=0$) e calcolando le ulteriori reazioni vincolari dalle tre equazioni di equilibrio di uno dei due corpi. Scrivendo ad esempio l'equazione di equilibrio a rotazione rispetto al centro del vincolo esterno, si ottiene:

$$dc - cf - \frac{ql^2}{2} = 0 \rightarrow c = \frac{ql^2}{2f}$$

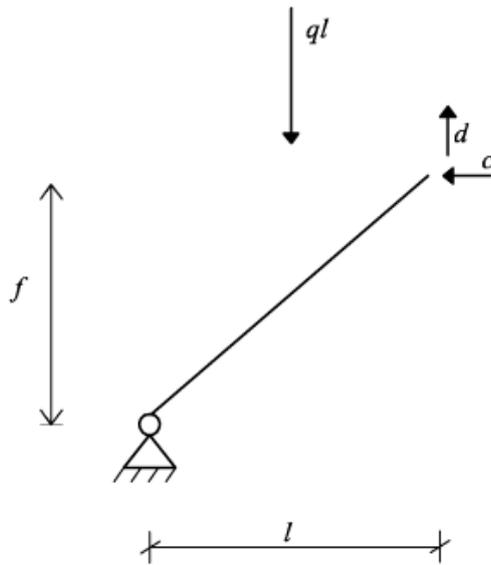


Fig. 2.9

La soluzione si estende anche alle reazioni vincolari del secondo corpo, data la simmetria.

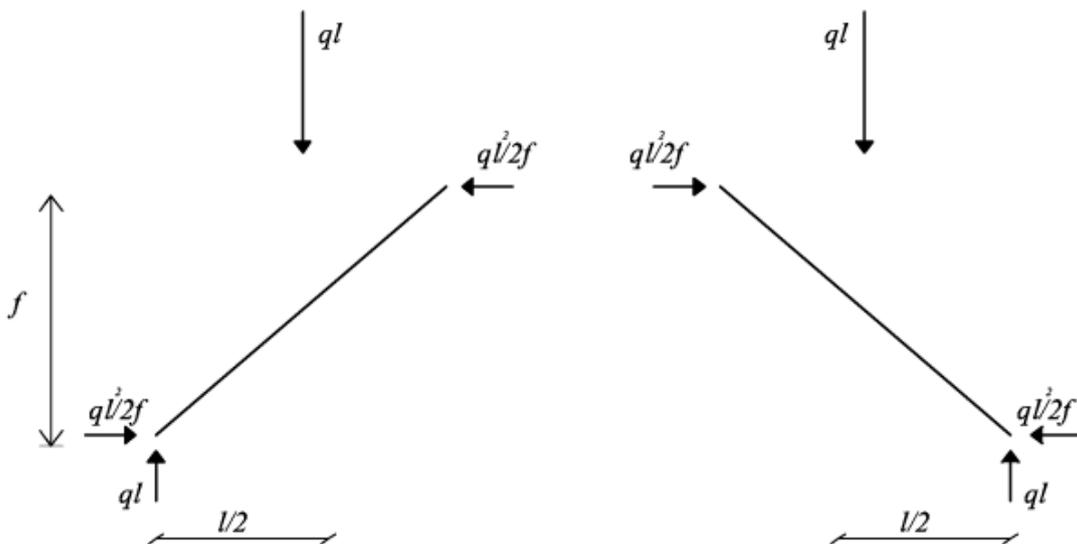


Fig. 2.10

Le reazioni verticali della cerniera interna (d) risultano nulle perché asimmetriche rispetto all'asse di simmetria del problema.

2.3 *La spinta*

Dal calcolo delle reazioni vincolari (Fig. 2.10) risulta che il vincolo cerniera esterna esercita sull'arco una forza orizzontale pari a $b = \frac{ql^2}{2f}$. Il vincolo in questione rappresenta un corpo esterno (il terreno, una trave di fondazione, un piedritto ecc) che esercita un'azione sull'arco in esame. Per il principio di azione e reazione, esiste una forza uguale ed opposta (H) che l'arco scarica sul corpo esterno in questione. Questa forza è la *spinta* dell'arco:

$$H = \frac{ql^2}{2f} \rightarrow [H] = \frac{[F]}{[L]} \cdot \frac{[L]^2}{[L]} = F$$

Il valore della spinta (H) è inversamente proporzionale alla freccia (f) dell'arco. Ne consegue che più un arco è ribassato, maggiore è la spinta che genera. Si dimostrerà nel seguito che a spinta maggiore corrispondono sforzi normali maggiori e valori più contenuti di taglio e momento flettente. In questo senso il valore della spinta orizzontale può essere ritenuto la misura di quanto un arco si comporti veramente da arco, ovvero si distingua dal comportamento di una trave. Laddove verrebbe spontaneo credere che archi più ribassati abbiano un comportamento strutturale più simile a quello di una trave (perché più simili geometricamente ad una trave), in realtà accade esattamente il contrario. Viceversa ad archi meno ribassati corrispondono spinte minori, valori più consistenti di tagli e momento flettente e valori più contenuti di sforzo normale.

In ogni caso, la spinta che un arco esercita sul corpo esterno deve essere messa in conto come problema progettuale. *L'eliminazione o l'assorbimento della spinta* si pone dunque come problema di importanza fondamentale nella progettazione di strutture ad arco.

Da un punto di vista strutturale l'arco svolge la stessa funzione di una trave, ossia scarica i carichi verticali su due punti d'appoggio distanti tra loro, ma con un diverso funzionamento statico rispetto alla trave. Mentre la trave è una struttura non spingente (scarica cioè il peso solo in verticale), l'arco genera invece spinte orizzontali. Questo ha come vantaggio una più efficiente trasmissione dei carichi, permettendo la copertura di luci più ampie rispetto a quelle gestibili con una trave, mentre presenta come svantaggio una costruzione più complessa e la necessità di predisporre metodi per controbilanciare le spinte laterali.

2.4 *Arco a tutto sesto*

L'arco a tutto sesto è definito geometricamente con la freccia (f) uguale alla semiluce (l), entrambe uguali al raggio dell'arco.

In un arco è conveniente descrivere le azioni di contatto in funzione di un angolo (α) che individua la generica sezione dell'arco e rappresenta l'ascissa curvilinea con cui descrivere la linea dell'asse.

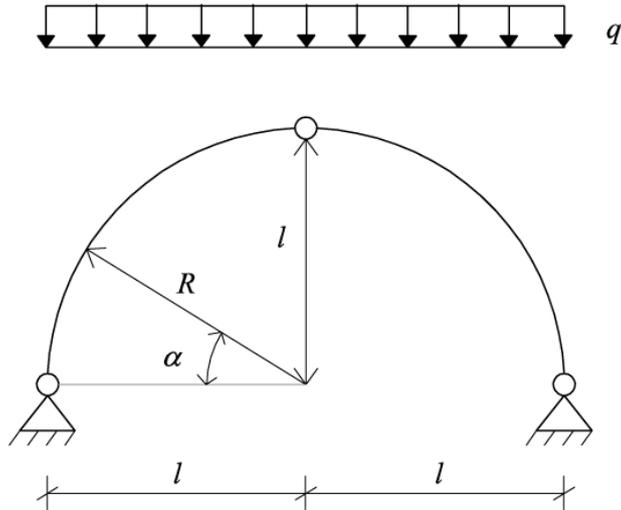


Fig. 2.11 Arco a tutto sesto

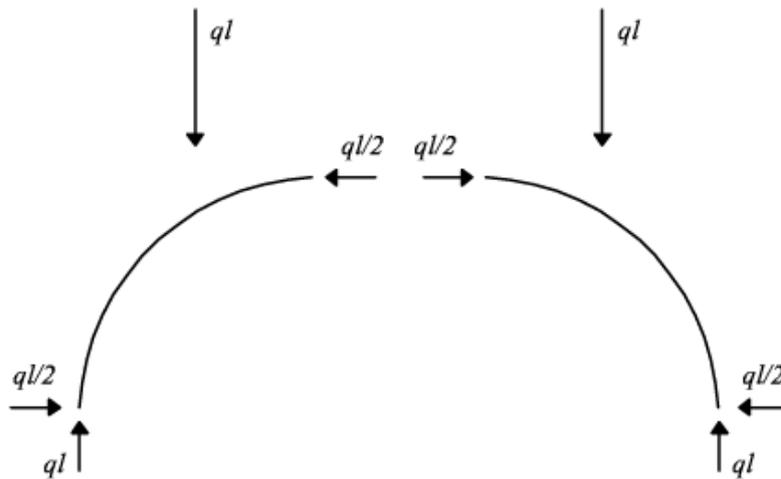


Fig. 2.12 Arco a tutto sesto: equilibrio statico e determinazione della spinta

Si utilizza di seguito il *metodo delle parti* per determinare le equazioni che descrivono l'andamento delle funzioni $N(\alpha)$, $T(\alpha)$, $M(\alpha)$ nella porzione di arco definita $0 < \alpha < 90$. La soluzione sarà uguale per simmetria nella porzione di arco definita $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Il valore della spinta nella sezione $\alpha = 0$ è pari a $ql/2$, essendo $f=l$. E' comunque pari al valore della funzione taglio nella sezione stessa, per un'ovvia condizione al bordo di natura statica (Fig. 2.12). Scriviamo ora le equazioni di equilibrio delle forze agenti sulla parte compresa tra 0 ed α . Tutte queste forze sono mostrate in Fig. 2.13.

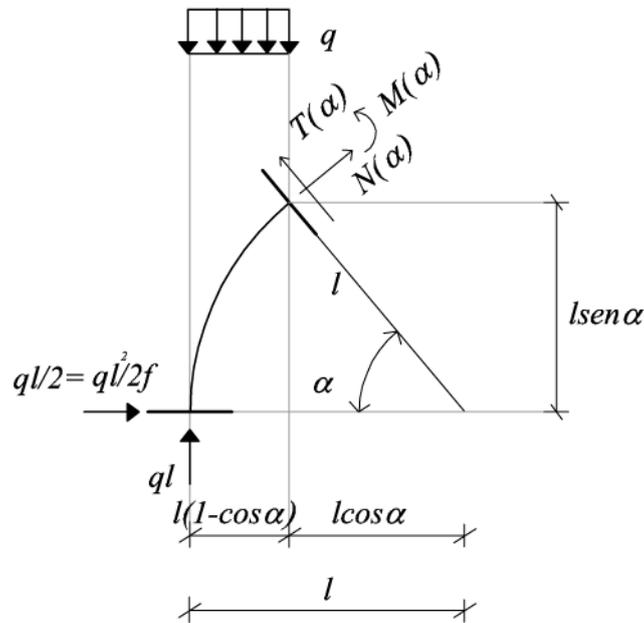


Fig. 2.13

Le azioni di contatto $N(\alpha)$ e $T(\alpha)$ verranno decomposte in accordo con la Fig. 2.14:

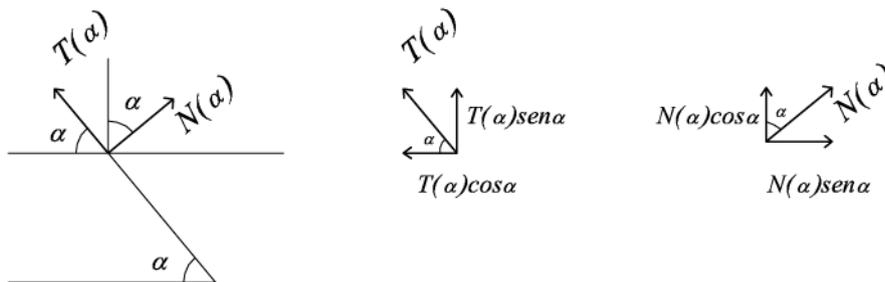


Fig. 2.14

Date queste premesse, le equazioni di bilancio della parte generica assumono la seguente espressione:

$$\frac{ql}{2} + N(\alpha) \sin \alpha - T(\alpha) \cos \alpha = 0$$

$$ql + N(\alpha) \cos \alpha + T(\alpha) \sin \alpha - ql(1 - \cos \alpha) = 0$$

$$M(\alpha) - ql^2(1 - \cos \alpha) + \frac{ql^2}{2} \sin \alpha + ql^2 \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2} = 0$$

Risolvendole in termini delle tre incognite $N(\alpha)$, $T(\alpha)$, $M(\alpha)$ si otterrà:

$$N(\alpha) = \frac{ql}{2} \sin(\alpha) - ql + ql \sin^2(\alpha)$$

$$T(\alpha) = -\frac{1}{2} \cos(\alpha) ql (-1 + 2 \sin(\alpha))$$

$$M(\alpha) = \frac{1}{2} ql^2 (1 - \cos(\alpha))^2 - \frac{ql^2}{2} \sin^2(\alpha) + ql^2 (1 - \cos(\alpha))$$

2.5 Arco circolare ribassato

Nell'arco circolare a tutto sesto, il raggio ha lo stesso valore di metà della luce (la luce è la distanza tra le due sezioni di imposta) mentre nell'arco circolare ribassato (Fig. 2.15), è necessario effettuare il calcolo del valore del raggio(R) in funzione della freccia (f) e della luce ($2l$).

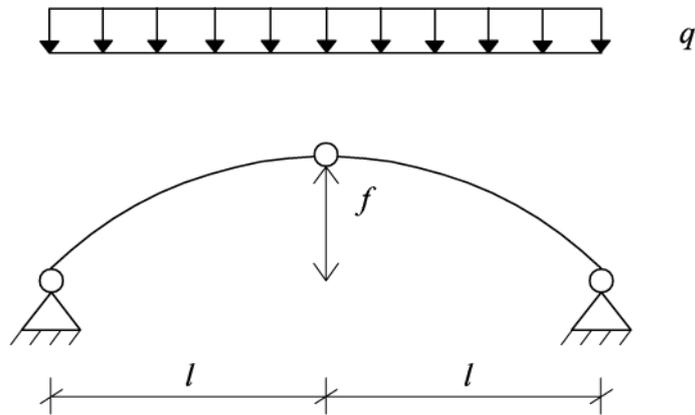


Fig. 2.15 Arco circolare ribassato

E' parimenti necessario calcolare il valore dell'angolo che rispetto al centro della circonferenza individua la sezione di imposta (Fig. 2.16).

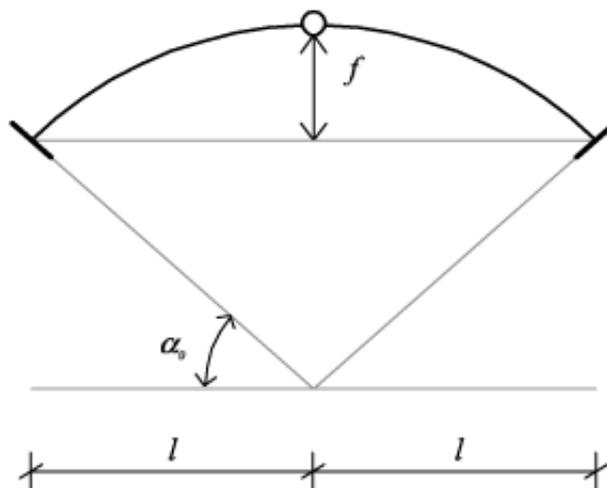


Fig. 2.16 Sezioni di imposta

Questo valore di α sarà detto α_0 mentre la sezione generica sarà individuata da α (Fig. 2.17), tale che:

$$\alpha_0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

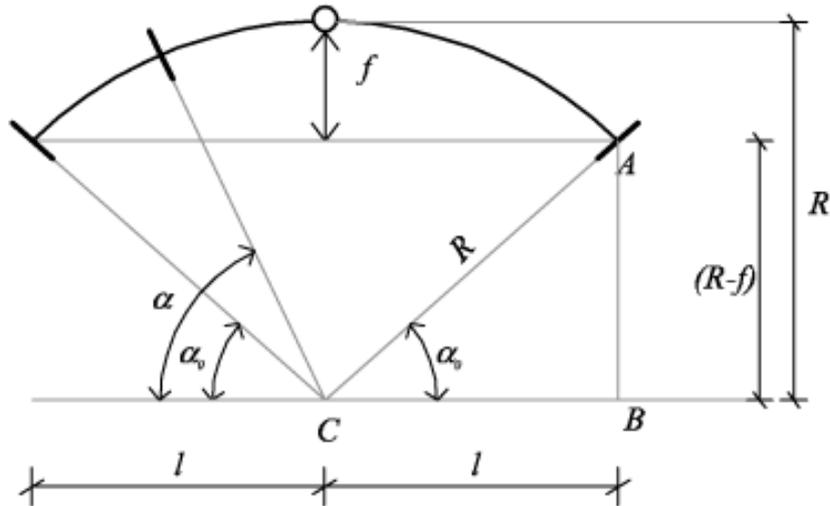


Fig. 2.17

Si guardi la Fig. 2.17: il raggio (R) è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC . I due cateti AB e BC del suddetto triangolo valgono rispettivamente $CB=l$ ed $AB=R-f$ e dal teorema di Pitagora l'ipotenusa $AC=R$ varrà:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$$

$$R^2 = (R-f)^2 + l^2 = R^2 + f^2 - 2Rf + l^2$$

$$f^2 + l^2 = 2Rf \rightarrow \boxed{R = \frac{f^2 + l^2}{2f}}$$

Da relazioni trigonometriche si ricava α_0 :

$$R-f = R \operatorname{sen} \alpha_0$$

$$\operatorname{sen} \alpha_0 = \frac{R-f}{R}$$

$$\alpha_0 = \arccos \frac{R-f}{R}$$

La Fig. 2.18 mostra la soluzione dell'equilibrio statico ottenuta dal calcolo delle reazioni vincolari, tra cui la determinazione della spinta.

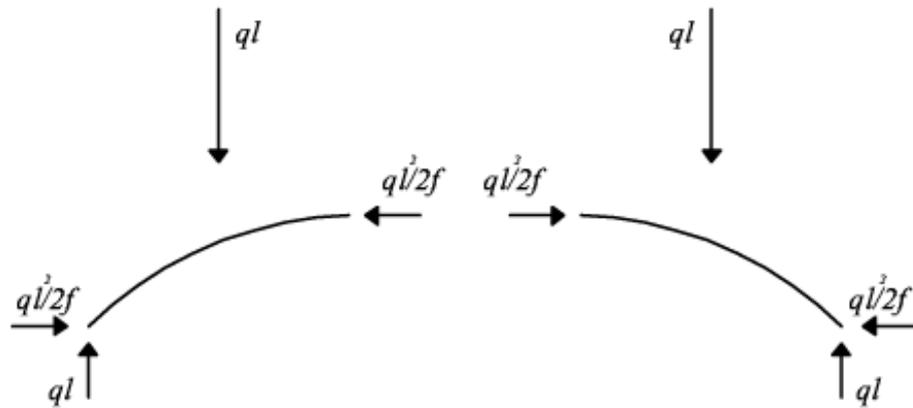


Fig. 2.18

Richiamiamo le condizioni al bordo di natura statica nella sezione al colmo:

$$N\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{pl^2}{2f}$$

$$T\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$M\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

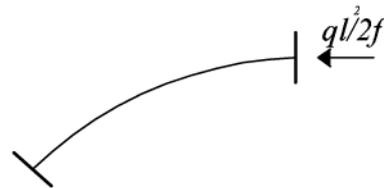


Fig. 2.19

Determiniamo ora le azioni di contatto agenti sulla sezione generica. Dal bilancio parte messo in evidenza in della Fig. 2.20 si ricava:

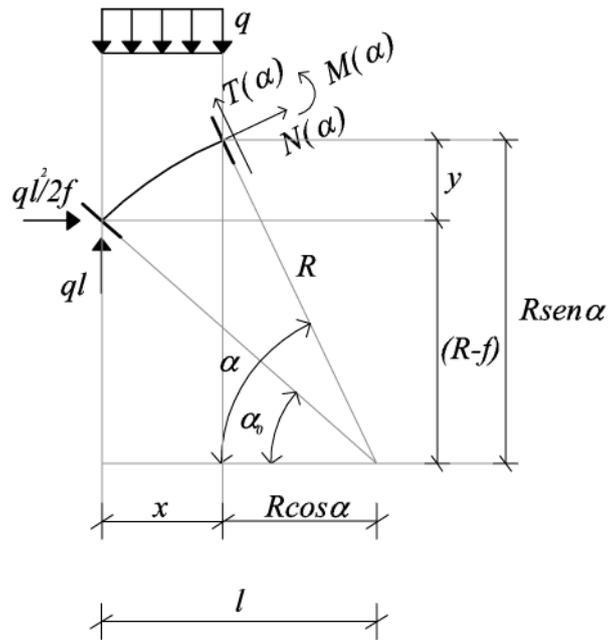


Fig. 2.20

$$\frac{ql^2}{2f} + N(\alpha)\text{sen}\alpha - T(\alpha)\text{cos}\alpha = 0$$

$$-qx + N(\alpha)\text{cos}\alpha + T(\alpha)\text{sen}\alpha + ql = 0$$

$$M(\alpha) - ql \cdot x + \frac{ql^2}{2f} \cdot y + q \frac{x^2}{2} = 0$$

Per risolvere le equazioni in termini di α è necessario determinare il valore di x ed y utilizzando considerazioni trigonometriche. A partire dalla figura suddetta si ottiene

$$x = l - R\text{cos}\alpha$$

$$y = R\text{sen}\alpha - (R - f)$$

Sostituendo il valore di x nelle equazioni di bilancio, si determinano le funzioni $N(\alpha)$, $T(\alpha)$, $M(\alpha)$, che ovviamente valgono solo per $\alpha_0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

2.6 Un confronto numerico tra i due archi

Due archi circolari, l'uno a tutto sesto e l'altro ribassato, mostrati geometricamente nella figura che segue vengono analizzati allo scopo di confrontarne la spinta e le azioni di contatto.

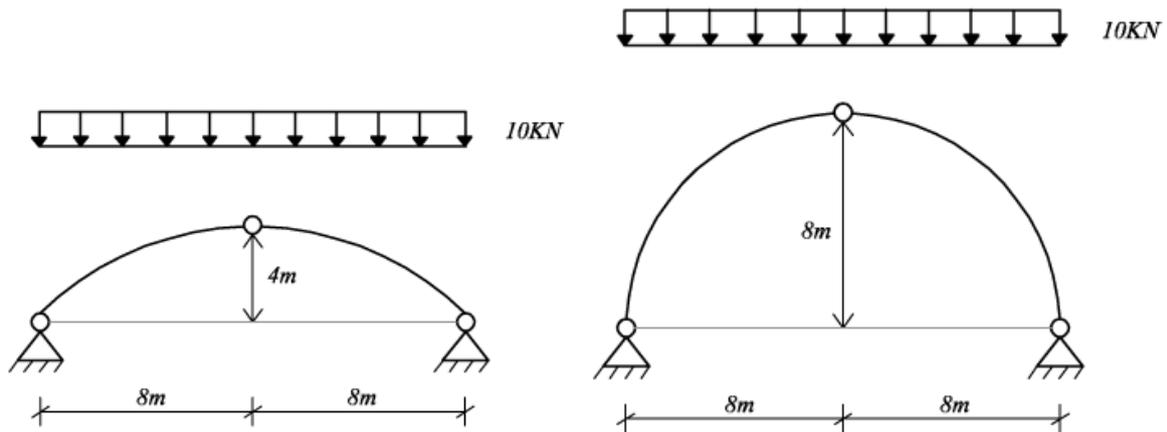


Fig. 2.21

Sostituendo i valori numerici all'interno delle espressioni corrispondenti, verifichiamo che la spinta nell'arco circolare a tutto sesto è la metà della spinta dell'arco circolare ribassato. Inoltre, si ottengono i seguenti diagrammi delle azioni di contatto:

2.6.2 Arco circolare ribassato isostatico

Dati:

p = carico uniformemente ripartito sulla proiezione orizzontale positivo verso il basso = 10 kN/m

l = metà luce dell'arco = 8 m

f = freccia = 4 m

Pertanto:

$$\tan \alpha_0 = \frac{R - f}{l} = \frac{10 - 4}{8} = \frac{2}{4}$$

da cui:

$$\alpha_0 \cong 37^\circ = 0,64 \text{ rad}$$

Risultati:

$$H = \frac{pl^2}{2f} = \frac{10 \cdot 8^2}{2 \cdot 4} = 80 \text{ kN}$$

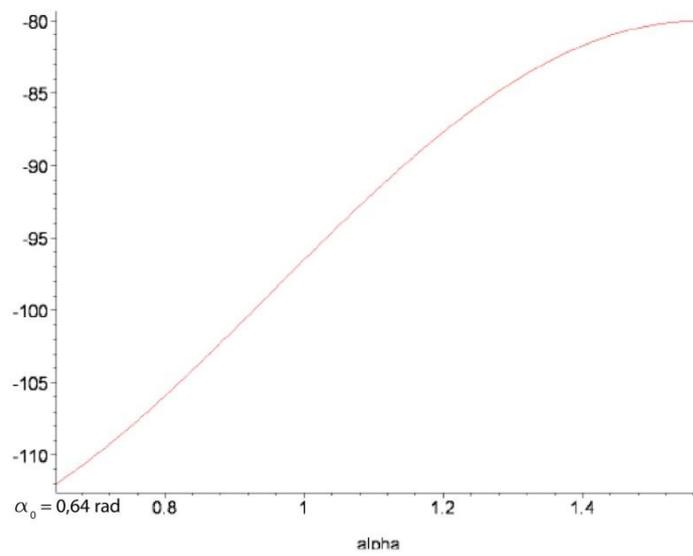


Fig. 2.22 Diagramma della funzione sforzo normale (Nmax=115 KN).

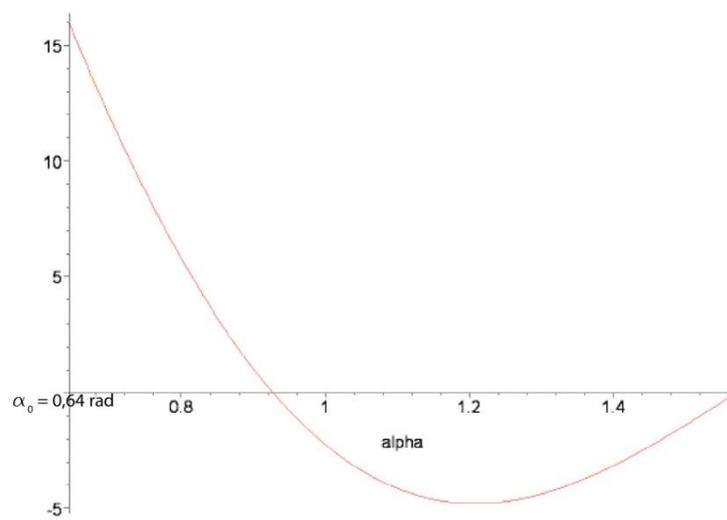


Fig. 2.23 Diagramma della funzione taglio (Tmax=15KN).

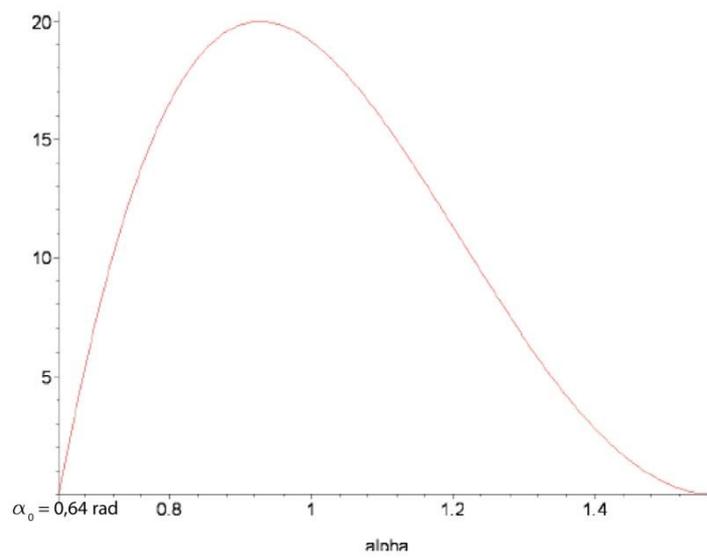


Fig. 2.24 Diagramma della funzione momento flettente ($M_{\max}=20 \text{ KNm}$).

2.6.3 Arco circolare a tutto sesto isostatico

Dati:

p = carico uniformemente ripartito positivo verso il basso = 10 KN/m

l = altezza dell'arco (pari a metà della luce), raggio = 8 m

f = freccia = 8 m

Risultati:

$$H = \frac{pl}{2} = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40 \text{ KN}$$

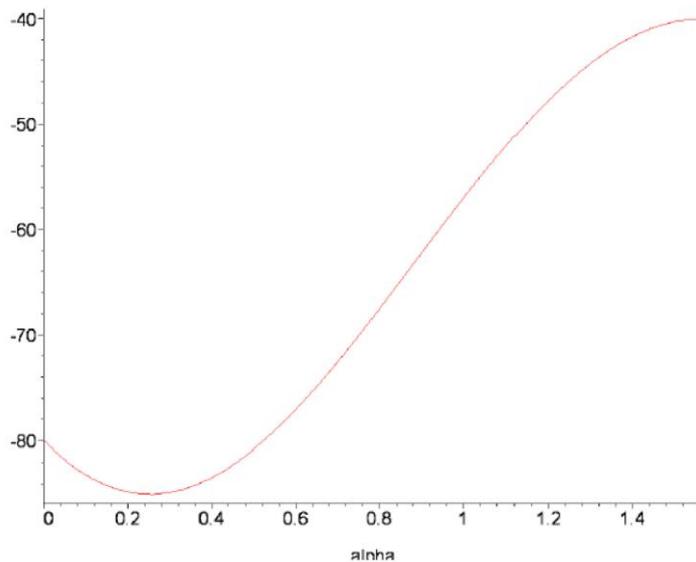


Fig. 2.25 Diagramma della funzione sforzo normale ($N_{\max} = -80 \text{ KN}$).

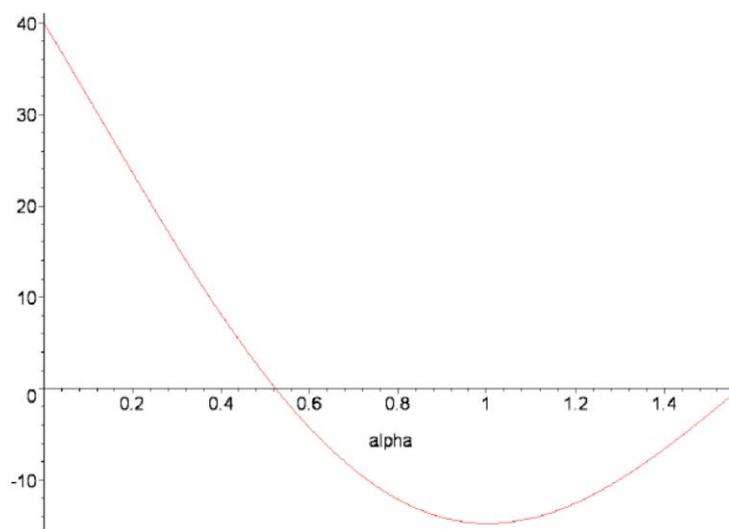


Fig. 2.26 Diagramma della funzione taglio ($T_{\max} = 40 \text{ KN}$).

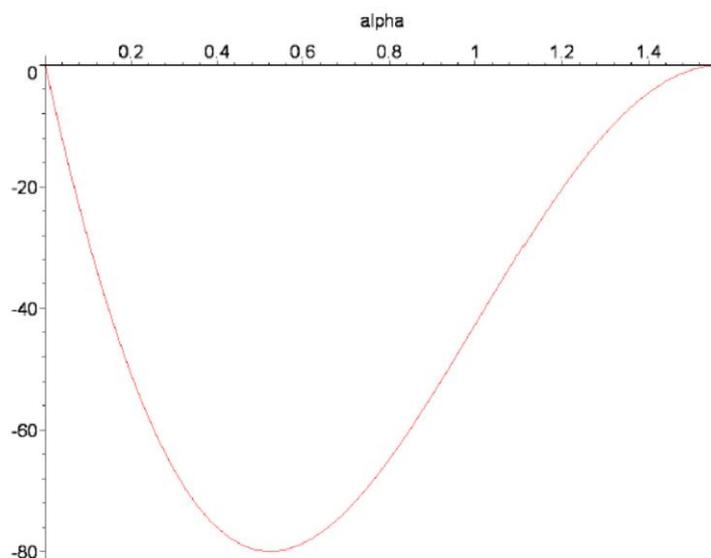


Fig. 2.27 Diagramma della funzione momento flettente ($M_{max}=80\text{KNm}$).

Osservandone in dettaglio i valori numerici, si vede che nell'arco circolare ribassato, il valore dello sforzo normale è di molto superiore al valore che ha nell'arco a tutto sesto che insiste sulla stessa luce ed è soggetto alle stesse condizioni di carico. Inoltre nell'arco ribassato si osserva una riduzione notevole (fino a 4 volte inferiori) del valore del taglio e del momento flettente.

Questo semplice esempio dimostra che, a parità di altre condizioni, il rapporto tra la freccia (f) e la luce (l) condiziona fortemente il comportamento meccanico dell'arco.

2.7 Arco parabolico

Il caso di un arco parabolico isostatico soggetto ad una densità di carico costante sulla proiezione orizzontale è emblematico, in quanto funicolare del carico stesso. Ovvero, l'arco parabolico trasforma il carico ripartito uniformemente sull'orizzontale in sforzo normale puro all'interno della sua sezione generica. Si dimostrerà nel seguito, dall'applicazione delle equazioni di bilancio, che soltanto la funzione $N(\alpha)$ sarà diversa da zero, mentre le funzioni $T(\alpha)$, $M(\alpha)$ saranno uguali a zero. Si consideri ora l'arco parabolico

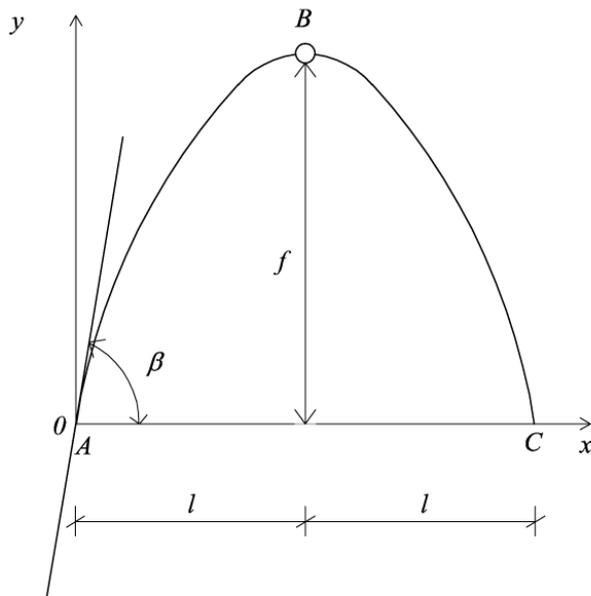


Fig. 2.28 Arco parabolico

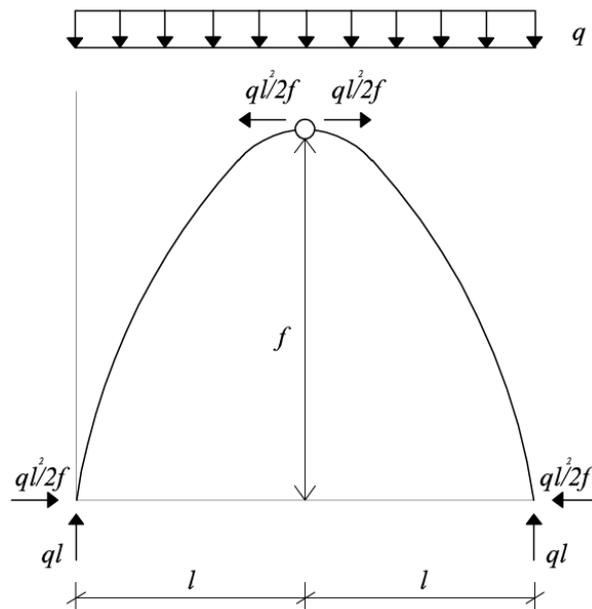


Fig. 2.29 Soluzione dell'equilibrio statico

Il nostro primo sforzo sarà rappresentarlo con un'equazione algebrica. Data l'equazione di una parabola generica con asse di simmetria parallelo all'asse y:

$$y = ax^2 + bx + c$$

questa rappresenterà una famiglia di ∞^3 parabole. Pertanto è necessario imporre l'appartenenza ad essa dei punti A, B, C indicati in Fig. 2.28 perché l'equazione descriva proprio la parabola in figura.

A \in parabola $\Leftrightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$; da questa condizione si ricava l'equazione $c = 0$

B \in parabola $\Leftrightarrow x = l \rightarrow y = f$; da questa condizione si ricava l'equazione $al^2 + bl + c = f$

C \in parabola $\Leftrightarrow x = 2l \rightarrow y = 0$; da questa condizione si ricava l'equazione $4al^2 + 2bl + c = 0$

Le condizioni di appartenenza dei punti A,B,C alla parabola individuano quindi il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} al^2 + bl + c = f \\ c = 0 \\ 4al^2 + 2bl + c = 0 \end{cases}$$

Che fornisce la seguente soluzione (unica):

$$\begin{cases} a = -\frac{f}{l^2} \\ c = 0 \\ b = 2\frac{f}{l} \end{cases}$$

L'equazione della parabola che passa per i tre punti dati è la seguente:

$$y(x) = -\frac{f}{l^2}x^2 + 2\frac{f}{l}x$$

Per individuare la generica sezione di un arco parabolico, conviene utilizzare le coordinate cartesiane (x, y) dal momento che non si riesce a determinare una ascissa curvilinea che semplifichi le equazioni in gioco. La funzione sarà dunque individuata dalla variabile x. Per calcolare il valore delle funzioni N(x), T(x), M(x) sarà comunque necessario decomporre lo sforzo normale e lo sforzo di taglio nelle sue componenti orizzontali e verticali. Quindi risulterà necessario determinare, tramite la derivata, la tangente trigonometrica dell'angolo β indicato in figura:

$$tg(\beta) = \frac{sen\beta}{cos\beta} = -\frac{2fx}{l^2} + \frac{2f}{l}$$

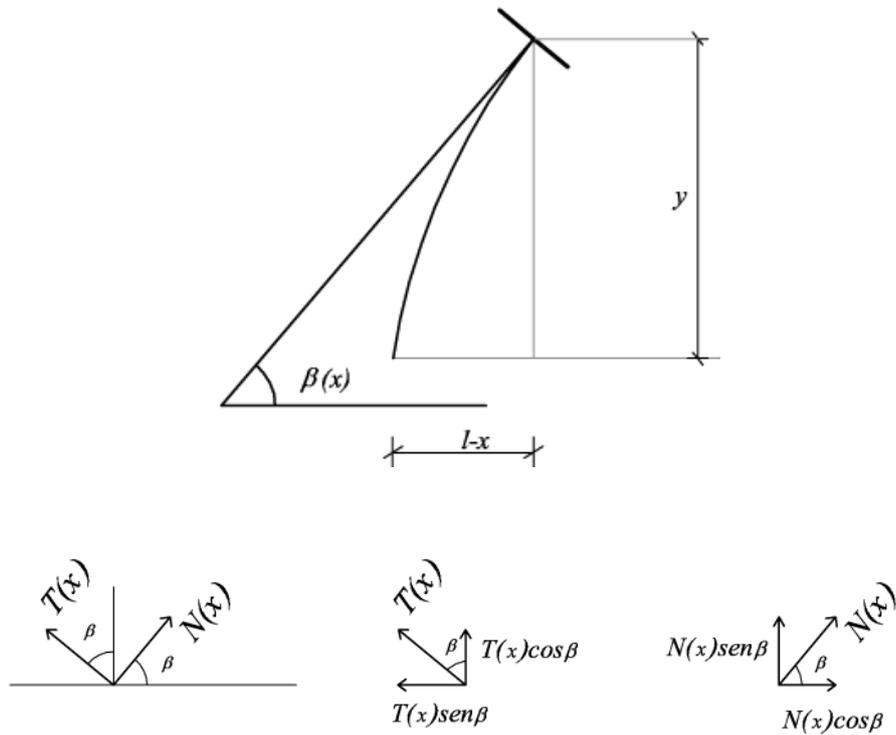


Fig. 2.30

Determinato il valore delle reazioni vincolari con le equazioni di bilancio, si procede al calcolo del valore delle funzioni $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$ col metodo delle parti:

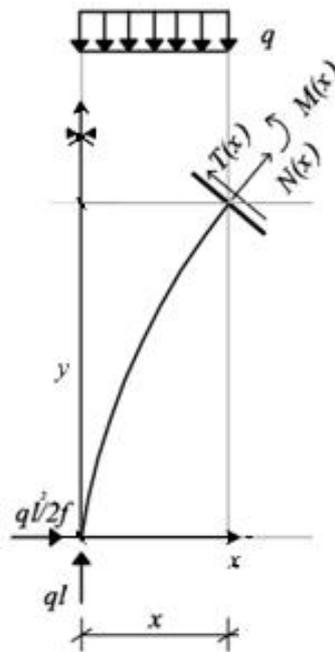


Fig. 2.31

Si scrivono le equazioni di equilibrio della parte:

$$\begin{cases} \frac{ql^2}{2f} + N(x)\cos\beta - T(x)\sin\beta = 0 \\ ql + N(x)\sin\beta + T(x)\cos\beta - q(l-x) - qx = 0 \\ M(x) - ql \cdot x + \frac{ql^2}{2f} \cdot y + q\frac{x^2}{2} = 0 \end{cases}$$

Dalla prima si ricava

$$N(x) = T(x) \tan\beta - \frac{ql^2}{2f} \cdot \frac{1}{\cos\beta}$$

Sostituendo nella seconda equazione il valore di $N(x)$ nella seconda equazione si avrà:

$$ql - qx + \left(T(x) \tan\beta - \frac{ql^2}{2f} \cdot \frac{1}{\cos\beta} \right) \sin\beta + T(x) \cos\beta = 0$$

$$ql - qx + T(x)(\tan\beta \sin\beta + \cos\beta) + \frac{ql^2}{2f} \tan\beta = 0$$

$$ql - qx + T(x) \left(\frac{\sin^2\beta + \cos^2\beta}{\cos\beta} \right) + \frac{ql^2}{2f} \left(-\frac{2f}{l^2}x + \frac{2f}{l} \right) = 0$$

$$T(x) \frac{1}{\cos\beta} = 0$$

Da cui

$$T(x) = 0 \forall x$$

Dal bilancio dei momenti si avrà::

$$\begin{aligned} M(x) &= -\frac{qx^2}{2} - \frac{ql^2}{2f} y + qlx = \\ &= -\frac{qx^2}{2} - \frac{ql^2}{2f} \left(-\frac{f}{l^2}x^2 + \frac{f}{l}x \right) + qlx = 0 \end{aligned}$$

Da cui

$$M(x) = 0 \forall x$$

Verificato che per ogni valore di x il valore delle funzioni $M(x)$ e $T(x)$ è identicamente nullo, si conclude affermando che la forma parabolica per un arco così caricato, è quella che ottimizza di più il materiale facendolo lavorare soltanto a compressione.

3. METODI DI ASSORBIMENTO DELLA SPINTA

Il problema dell' assorbimento della spinta che le strutture ad arco trasmettono ai supporti su cui insistono, risale al tempo degli antichi romani.

L'arco difatti trasmette ai supporti, una forza verticale diretta verso il basso ed una spinta orizzontale rivolta verso l'esterno (Fig. 3.1).

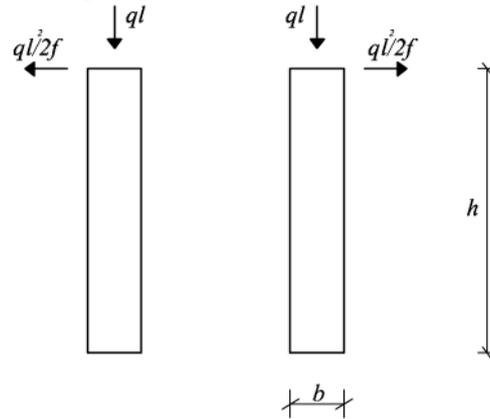


Fig. 3.1

La spinta orizzontale tende a ribaltare i supporti che sorreggono l'arco. Nell' antichità erano i piedritti. Concentrando l'attenzione sull'equilibrio dei piedritti, essendo soggetti ad un vincolo monolatero (un vincolo cioè che funziona in un' unica direzione), se la forza orizzontale trasmessa dall'arco (F_0) è fosse molto grande, il piedritto tenderebbe a ribaltarsi (Fig. 3.2)

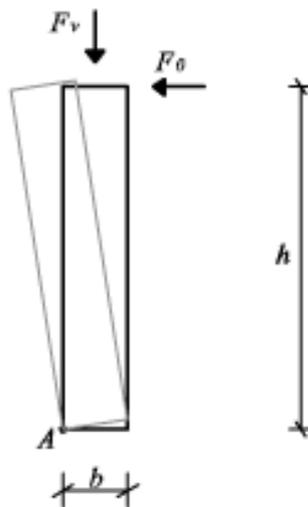


Fig. 3.2

Scrivendo l'equazione di equilibrio a rotazione rispetto al punto A (fig 2b), compaiono due contributi di segno opposto: $F_0 \cdot h$ che chiameremo *momento ribaltante* (M_R) ed $F_v \cdot \frac{b}{2}$ che chiameremo *momento stabilizzante* (M_S). Affinché non si inneschi il meccanismo di ribaltamento quindi deve essere verificata la seguente condizione:

$$M_s > M_R$$

Qualora la verifica a ribaltamento non fosse soddisfatta, dovremmo aumentare il valore del momento stabilizzante.

Per aumentare il valore di M_S , è necessario aumentare il valore di b allargando la base (creando ad esempio dei contrafforti) oppure aumentare il valore di F_v , aggiungendo dei pesi in sommità.

Nel caso di un portico formato da una successione di archi (Fig. 3.3), il problema dell'assorbimento della spinta si porrà soltanto nei supporti posti alle estremità, mentre quelli posti all'interno saranno in equilibrio per un meccanismo di compensazione (Fig. 3.4).

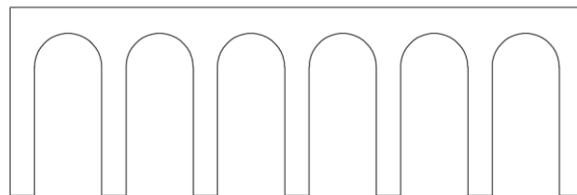


Fig. 3.3

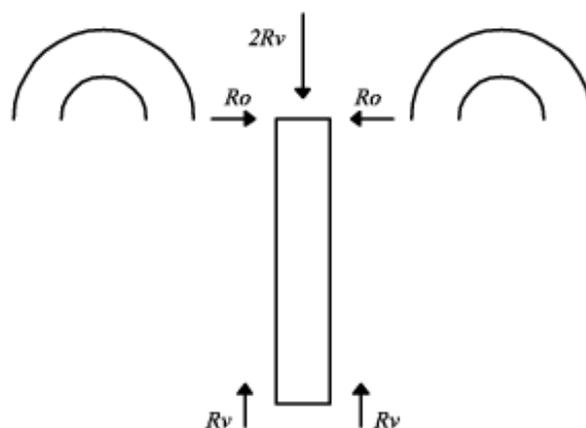


Fig. 3.4

Un altro metodo per risolvere il problema, è quello di costruire *archi a spinta eliminata* realizzando delle *catene* che collegano le due sezioni di imposta.
 Confrontiamo di seguito il comportamento meccanico dei due archi in figura di cui uno con la catena:

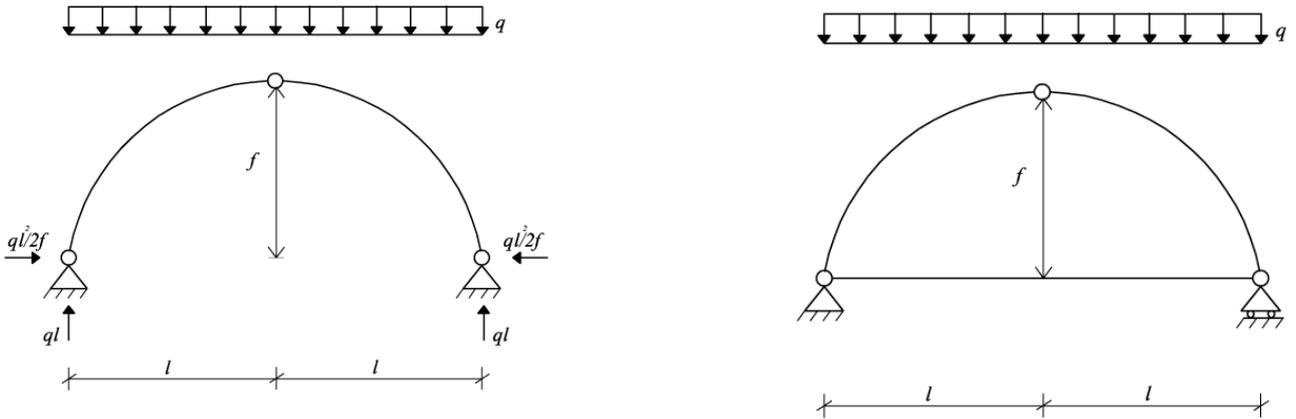


Fig. 3.5

La prima differenza tra i due archi è che l'arco a tre cerniere è *esternamente iperstatico* ($v=4$), l'arco con la catena invece è *esternamente isostatico* ($v=3$). L'equilibrio statico dell'arco a tre cerniere è quello in Fig. 2.10. Per l'equilibrio è necessaria un'interazione con l'esterno di valore opposto alla spinta. Il secondo caso invece va approfondito. Risolviamo il problema dell'equilibrio dell'arco nella fig. che segue. Essendo esternamente isostatico, le tre equazioni di equilibrio consentono di determinare il valore delle reazioni vincolari esterne che risultano essere:

$b=0$
 $a=c=ql$

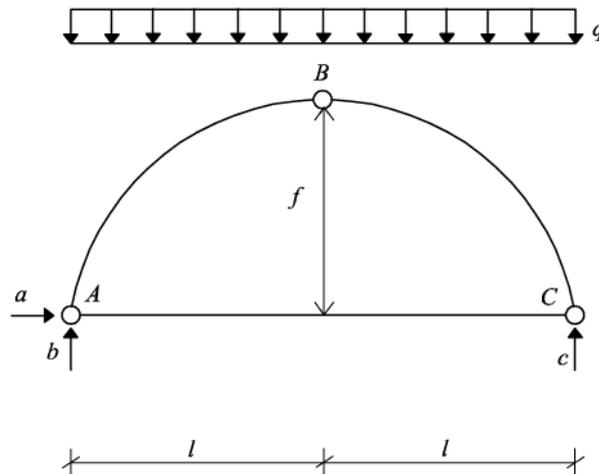


Fig. 3.6

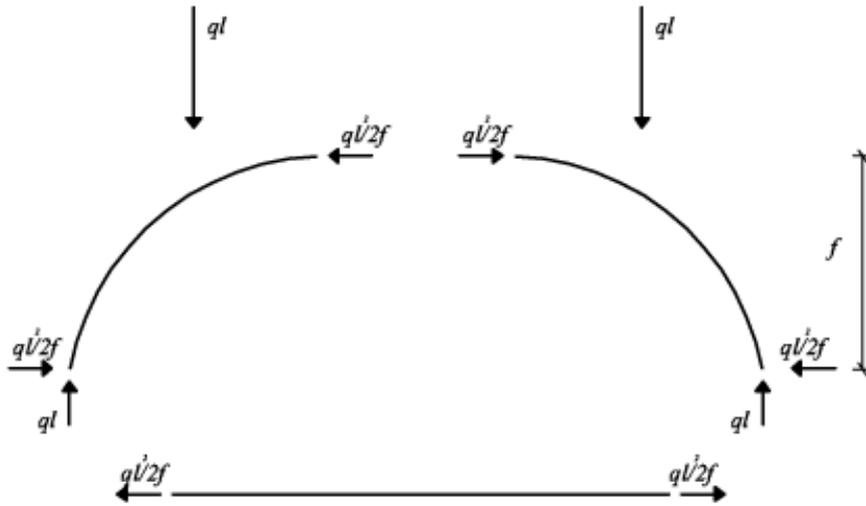


Fig. 3.7 Arco con catena equilibrio statico

Fig. 3.8

La situazione che si crea internamente è assimilabile a quella di una trave trapezoidale (Fig. 3.9).

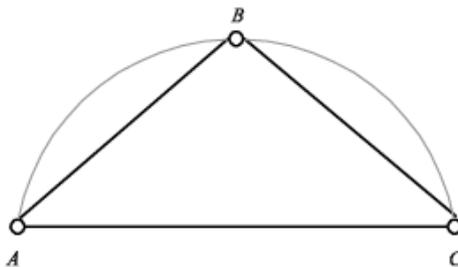


Fig. 3.9

Esaminiamo un esploso dei corpi collegati di cui è costituito l'arco con catena (Fig. 3.10): Dall'esterno arrivano le forze attive e le reazioni vincolari tutte del valore pari a ql .

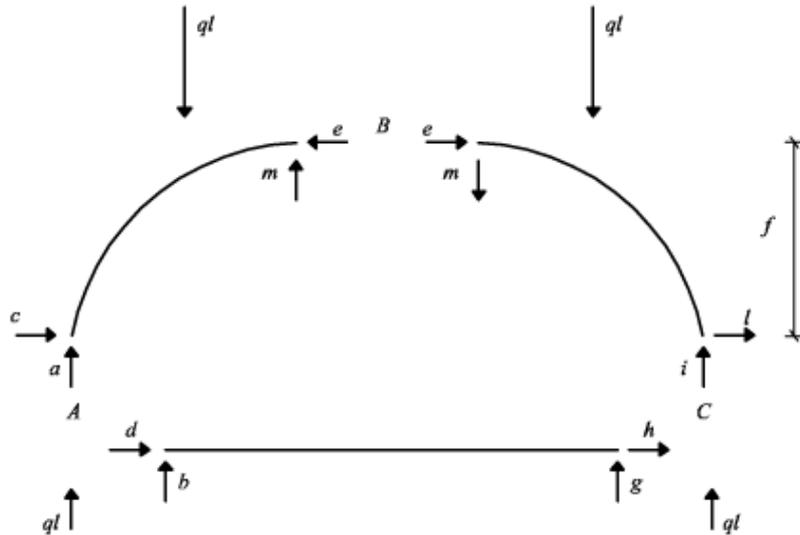


Fig. 3.10

La reazione vincolare esterna ql si ripartisce tra i corpi collegati in modo che sia soddisfatto l'equilibrio del nodo su cui agisce. Per esempio l'equilibrio del nodo A garantisce:

$$ql = a + b$$

$$c + d = 0 \rightarrow c = -d$$

Analogamente l'equilibrio del nodo C si traduce nelle seguenti equazioni:

$$ql = i + g$$

$$l + h = 0 \rightarrow l = -h$$

Dall'equilibrio della catena risulta:

$$b = 0$$

$$g = 0$$

$$d = -h$$

Il problema si risolve a questo punto scrivendo le equazioni di equilibrio per gli altri due corpi e si ricava :

$$m = 0$$

$$l = \frac{ql^2}{2f}$$

$$i = a = ql$$

$$c = \frac{ql^2}{2f}$$

Pertanto l'equilibrio dell'arco risulta illustrato nella figura che segue:

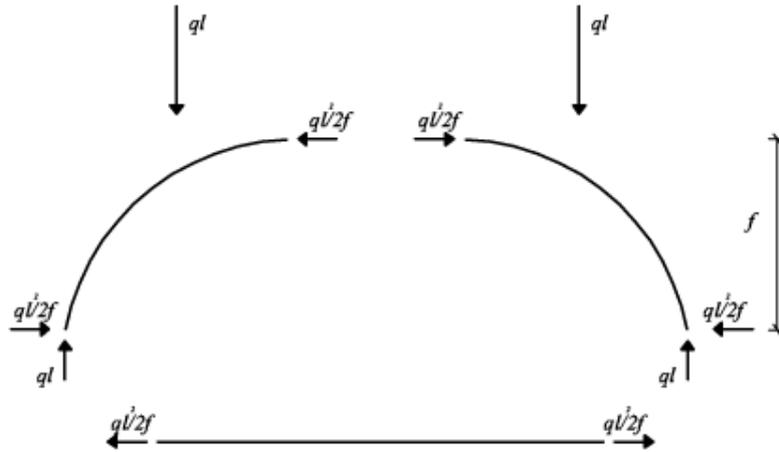


Fig. 3.11

La situazione meccanica dei due archi è profondamente diversa. La differenza consiste nel senso da attribuire alla forza $\frac{ql^2}{2f}$ che nell'arco a tre cerniere, essendo una reazione vincolare esterna, è una

forza che si scarica su un corpo esterno (il supporto), mentre nell'arco con catena essendo una reazione vincolare interna, viene assorbita da un elemento interno (la catena).

Ancora oggi costruire gli archi con la catena rappresenta uno dei metodi utilizzati per assorbire la spinta. Pensiamo ad esempio ad una situazione in cui un arco debba fungere da collegamento per esempio tra due aree archeologiche su cui non è assolutamente possibile scaricare la spinta ;

In tal caso la catena stessa costituirà la passerella di collegamento avendo la doppia funzione di assorbire la spinta e di resistere ai carichi verticali cioè a flessione. Un altro metodo per assorbire la spinta oggi consiste nell'utilizzare dei telai che se ben progettati, assorbono bene le spinte orizzontali (Fig. 3.12).

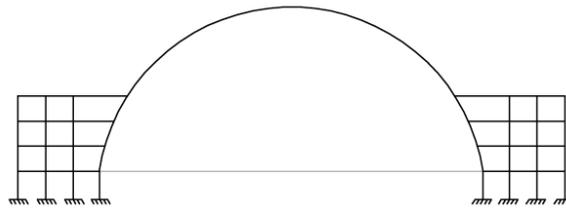


Fig. 3.12

Un altro accorgimento è agire sulla forza verticale aggiungendo il peso ai vari livelli (Fig. 3.13).

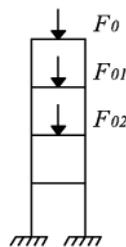


Fig. 3.13

Un altro caso interessante è quello in Fig. 3.14:

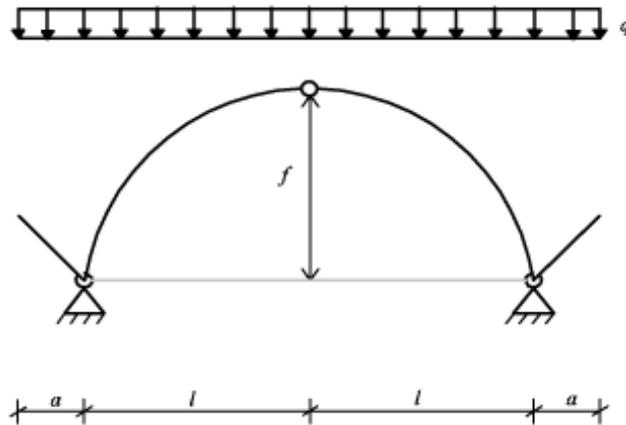


Fig. 3.14

Le due parti estreme dell'arco sono delle mensole. Il problema dell'equilibrio di tali mensole può e l'azione che esse esercitano sull'arco può essere sostituita con il momento di incastro indicato in Fig. 3.15:

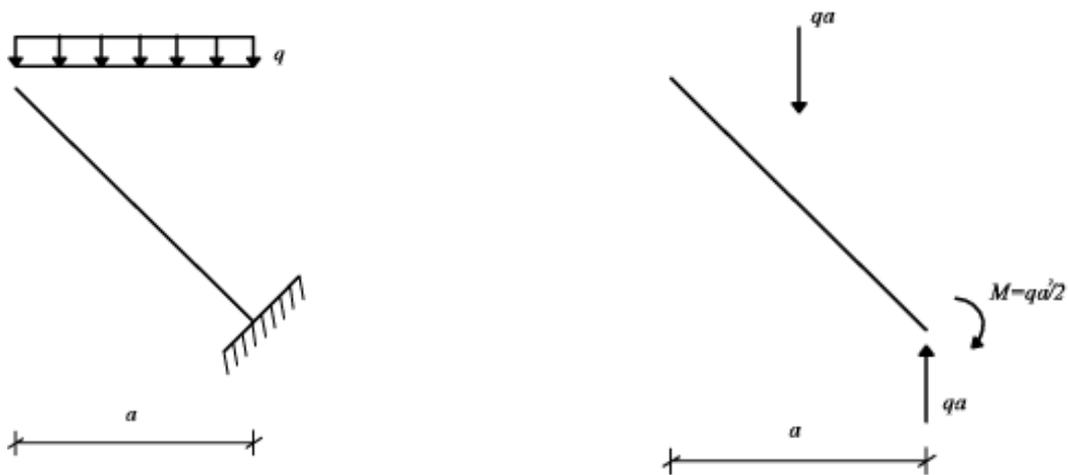


Fig. 3.15

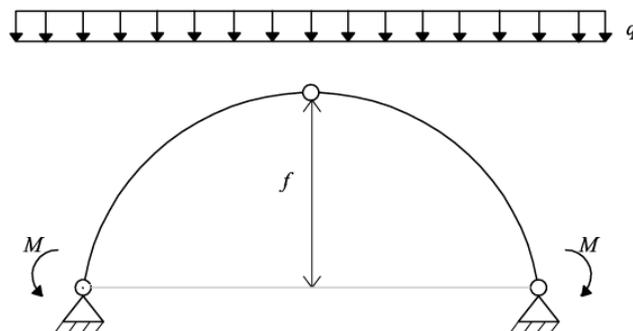


Fig. 3.16

Studiamo la condizione statica dell'arco sovrapponendo gli effetti dei due carichi esterni analizzati separatamente (Fig. 3.17)

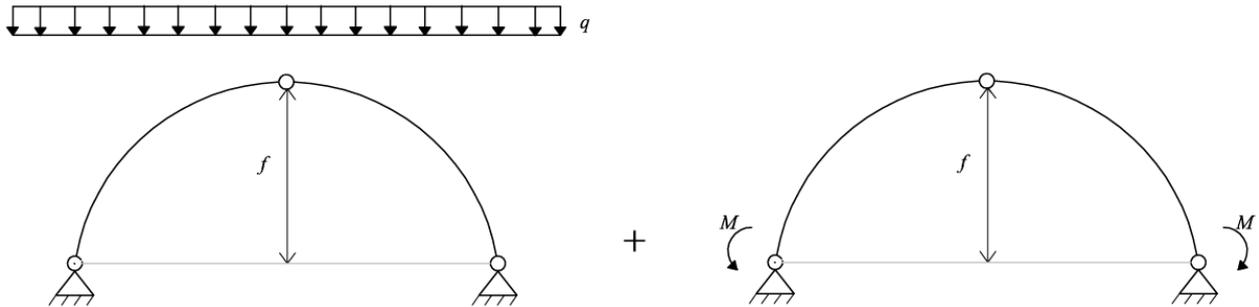


Fig. 3.17

La soluzione del primo schema è nota. Nella soluzione del secondo schema (Fig. 3.18) avremo che per simmetria verticale e dei carichi le forze verticali nella cerniera al colmo sono pari a zero:

$$d=0$$

Non essendo presenti carichi verticali anche le rimanenti reazioni vincolari verticali saranno pari a zero:

$$a=0$$

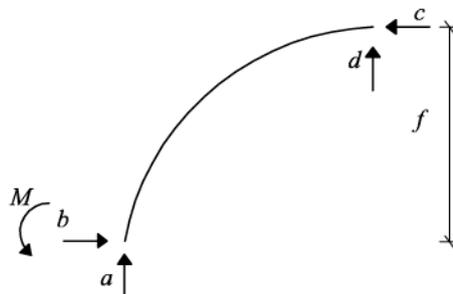


Fig. 3.18

Dall'equilibrio a traslazione orizzontale si ottiene:

$$b-c=0 \rightarrow b=c$$

Dall'equilibrio a rotazione si ottiene:

$$c \cdot f + \frac{qa^2}{2} = 0 \rightarrow \boxed{c = \frac{-qa^2}{2f}}$$

La soluzione statica per entrambi i semiarchi è la seguente:

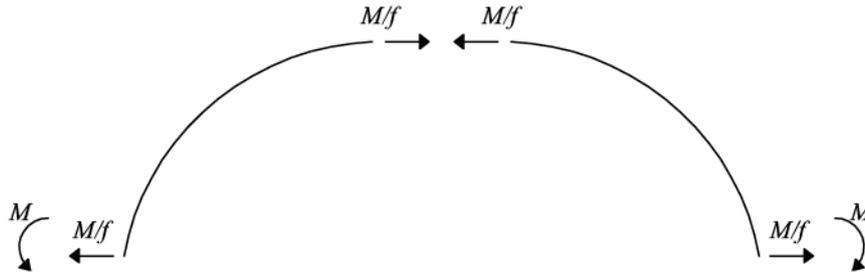


Fig. 3.19

Sommando gli effetti delle due soluzioni (Fig. 3.20) si dimostra come la presenza delle mensole alle estremità dell'arco contribuisca a diminuire la spinta.

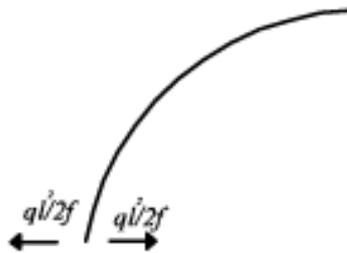


Fig. 3.20

Nello schema complessivo, risultano esserci due spinte opposte una del valore di $\frac{ql^2}{2f}$ e un'altra del valore $\frac{M}{f} = \frac{qa^2}{2f}$ che nasce dal contributo della mensola e tende a contrastare la prima. Se si verificasse la condizione per cui $\frac{qa^2}{2f} = \frac{ql^2}{2}$ la spinta globale verrebbe completamente azzerata.

3.2 Dimensionamento e criterio di scelta della sezione

Si è visto precedentemente quanto il comportamento delle strutture ad arco sia condizionato dal ribassamento ovvero a parità di curvatura, del rapporto $\frac{f}{l}$. Se però l'arco è iperstatico, anche la sezione (l'area, l'inerzia) assume un ruolo fondamentale ai fini del calcolo delle reazioni vincolari e di conseguenza della spinta.

Questa considerazione ha delle implicazioni progettuali. Se intendessimo individuare la sezione di un arco progettandola per resistere a sforzo normale centrato, dovremmo utilizzare la formula

seguinte:
$$A_{\min} = \frac{N_{\max}}{\sigma_{amm}}$$

Determinata A_{min} è necessario ancora stabilire che forma dare alla sezione e da questo dipenderà il comportamento della struttura.

Ad esempio, nella figura che segue (fig8i) si mostrano delle possibilità che corrispondono ad un valore $A_{min}=16cm^2$

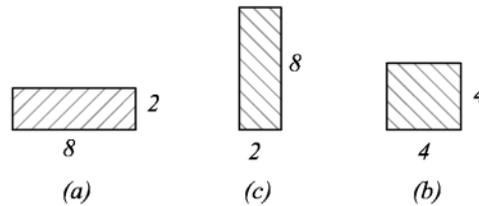


Fig. 3.21

Le tre sezioni in figura pur avendo la stessa area, hanno un comportamento meccanico molto diverso perché diverso è il loro momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico indicato in figura: a parità di area, la sezione a cui corrisponde il momento d'inerzia più alto (c), tenderà ad assorbire le tensioni con un meccanismo flessionale quindi a comportarsi meno da arco rispetto alle sezioni con un momento d'inerzia più basso (a) nelle quali l'area ha un valore maggiore rispetto a quello del momento d'inerzia e la struttura tenderà a lavorare a sforzo normale (sarà più arco). Il caso (b) rappresenta una soluzione intermedia.