

1. METODO DELLE FORZE PER LA SOLUZIONE DI STRUTTURE IPERSTATICHE

1.1 *Introduzione*

Il metodo delle forze è uno dei possibili metodi per la risoluzione di strutture iperstatiche in generale e si adatta perfettamente al caso di strutture iperstatiche composte da travi. In questo contesto, esso presenta il vantaggio di consentire la risoluzione analitica di una serie di esempi di interesse applicativo (es: la singola trave, la trave continua su più appoggi, etc) insegnando anche a maneggiare le equazioni di compatibilità cinematica, a ricordare le formule più semplice di spostamento e/o rotazione su strutture isostatiche, ad applicare rapidamente la sovrapposizione degli effetti, dimostrandosi quindi un metodo con potenzialità formative. Se così non fosse, non avrebbe senso far calcolare a mano strutture che un qualunque codice di calcolo risolve immediatamente.

Il metodo ha anche una parentela profonda con il principio dei lavori virtuali, che ammette una maggiore generalità ed anche un maggiore automatismo nella scrittura delle equazioni di compatibilità cinematica, ma questo viene detto solo come richiamo, senza diventare oggetto delle lezioni che seguiranno.

Il metodo delle forze consiste primariamente nel porre come incognite del problema alcune reazioni vincolari (di vincoli interni o esterni, talvolta azioni di contatto in una sezione), il cui numero è pari al grado di iperstaticità della struttura in esame. Definite queste incognite in modo opportuno, ossia senza “labilizzare” la struttura di partenza, il metodo procede, tramite una sistematica applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti, nella determinazione delle equazioni che ci consentono di determinare il valore delle suddette incognite. Queste equazioni sono di compatibilità cinematica: difatti, la scelta di rappresentare qualche grado di vincolo tramite la reazione (forza o coppia) corrispondente, elevandola al rango di incognita, equivale alla eliminazione di alcuni vincoli cinematici, che debbono essere ripristinati in termini di equazioni, affinché il sistema isostatico che si sta studiando corrisponda al sistema iperstatico di partenza.

In maniera sistematica quindi, l'applicazione del metodo prevede: 1) la scelta di una struttura isostatica di riferimento e l'individuazione delle incognite iperstatiche; 2) la scrittura delle equazioni di compatibilità cinematica che ripristinino i vincoli cinematici soppressi dalla trasformazione del vincolo cinematico in forza (reazione vincolare); 3) la risoluzione del sistema di equazioni per la determinazione delle incognite iperstatiche; 4) la sistematica applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti per la determinazione delle azioni di contatto sulla struttura iperstatica.

Nelle figure che seguono vengono esemplificati alcuni concetti sopra descritti: nelle figure seguenti (Fig. 1.1, Fig. 1.2, Fig. 1.3, Fig. 1.4) si mostra come ad una struttura iperstatica possano corrispondere tante strutture isostatiche di riferimento, ognuna relativa ad una scelta differente dell'incognita iperstatica iperstatica. Infine, nella figura Fig. 1.5 viene mostrata una scelta errata dell'incognita iperstatica, in quanto labilizza la struttura di partenza.

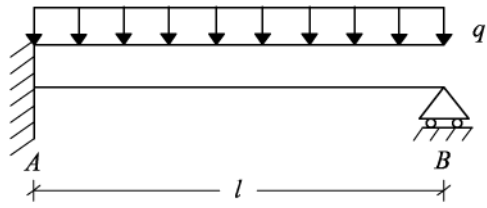


Fig. 1.1

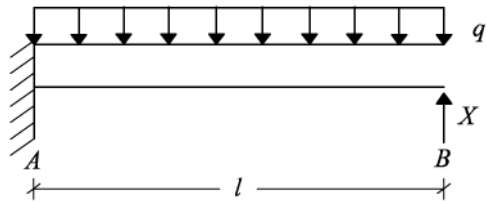


Fig. 1.2

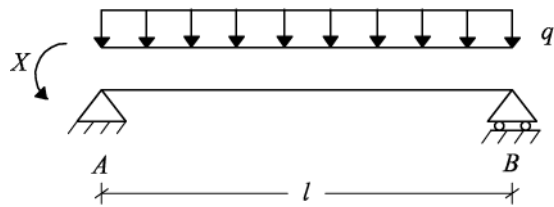


Fig. 1.3

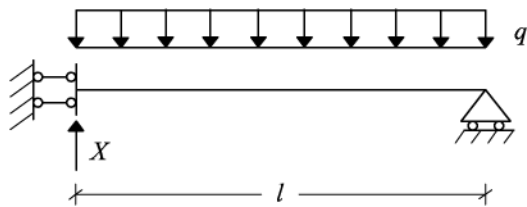


Fig. 1.4

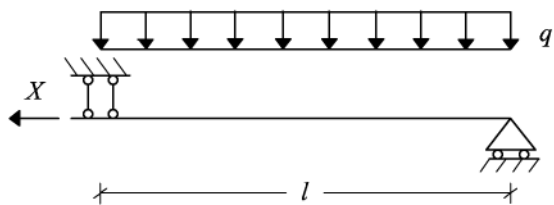


Fig. 1.5

1.2 Una prima esemplificazione

Riferiamoci all'esempio di Fig. 1.1 per descrivere i passi del metodo delle forze.

La struttura è una volta iperstatica poiché il grado di vincolo è $v=4$ mentre i gradi di libertà sono $l=3 \rightarrow v-l=4-3=1$. Inoltre tutti i vincoli sono ben messi e quindi $v-l$ è il grado di iperstaticità della struttura.

Vediamo cosa accade se applichiamo le sole equazioni della Statica. Mettendo in evidenza le reazioni vincolari e scrivendo le equazioni di bilancio della statica, si ottiene:

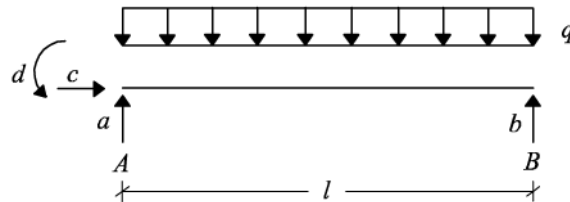


Fig. 1.6

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b = ql \\ d + bl - \frac{ql^2}{2} = 0 \end{cases}$$

da cui si evince che le equazioni non ammettono un'unica soluzione. Difatti, ci troviamo di fronte ad un sistema algebrico di tre equazioni e quattro incognite e dunque ci manca un'equazione per determinare la soluzione del problema dell'equilibrio. Questa equazione aggiuntiva non potrà essere di equilibrio, ma avrà un altro significato meccanico. Data questa premessa, procediamo con i seguenti passi:

Primo passo : scegliere la struttura isostatica di riferimento

Associamo alla struttura iperstatica di partenza uno dei possibili schemi isostatici di riferimento. Scegliamo la trave doppiamente appoggiata di Fig. 1.3, dove il vincolo di incastro viene parzialmente rappresentato in termini cinematici (la cerniera) e sempre parzialmente rappresentato tramite una parte della sua reazione vincolare (la coppia X , incognita). Se rimaniamo confinati nelle equazioni della Statica, ossia se vediamo la struttura come un corpo rigido, tutti i valori di X sono possibili. Ma c'è un solo valore di X che tiene conto dell'effettiva deformabilità della struttura e dell'effettivo funzionamento cinematico dei vincoli. Dobbiamo trovare quel valore. A tal fine, è necessario introdurre aspetti legati alla deformabilità della struttura a partire dai quali potremo scrivere l'equazione mancante e determinare univocamente il valore di X .

Secondo passo : valutare l'effetto cinematico provocato dai carichi attivi sulla struttura isostatica

Valutiamo adesso come si deformerebbe la struttura isostatica per effetto del solo carico esterno di natura attiva, ossia, in questo caso, della densità di carico q (Fig. 1.7).

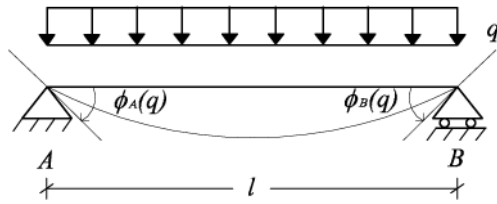


Fig. 1.7

Le sezioni della trave corrispondenti ai punti A e B subirebbero rispettivamente le due rotazioni $\varphi_A(q)$ e $\varphi_B(q)$, i cui valori possono essere determinati tramite integrazione della linea elastica.

Terzo passo : *imporre la congruenza della deformazione e determinare il valore dell'incognita/iperstatica*

La rotazione nel punto A , tuttavia, è puramente ipotetica. Difatti, non possiamo dimenticare che l'operazione che ci ha consentito di selezionare una struttura isostatica di riferimento è solo un cambiamento di rappresentazione e che in A c'è un vincolo di incastro perfetto. Tale vincolo di incastro impedisce che avvengano spostamenti e rotazioni, condizionando, come mostrato in Fig. 1.8, la deformata reale.

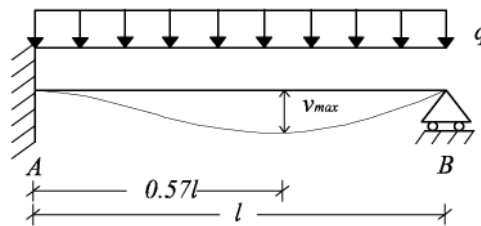


Fig. 1.8

Questo significa che la reazione vincolare iperstatica X produce, nella sezione in cui è applicata, un effetto cinematico opposto all'effetto dei carichi attivi nella medesima sezione, per ripristinare l'azione del vincolo (Fig. 1.9).

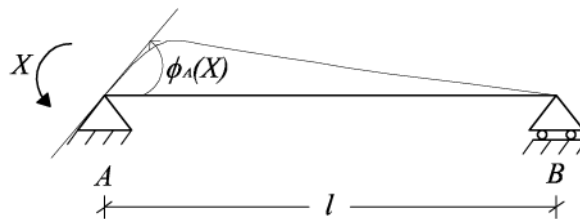


Fig. 1.9

Perché questo avvenga è necessario che la rotazione totale nel punto A , somma per sovrapposizione degli effetti delle rotazioni dovute rispettivamente alla densità di carico $\varphi_A(q)$, ed all'incognita iperstatica $\varphi_A(X)$, sia zero. Analiticamente questa equazione si esprime con un'equazione detta "di compatibilità cinematica":

$$\varphi_A := \varphi_A(X) + \varphi_A(q) = 0$$

A questo punto, si rimanda a risultati noti in termini di rotazioni (determinabili una volta per tutte, ad esempio, con l'equazione della linea elastica):

$$\varphi_A(X) = \frac{Xl}{3EJ}$$

analisi dimensionale: $\varphi_A(X) = \frac{[F] \cdot [L] \cdot [L]}{\frac{[F]}{[L]^2} \cdot [L]^4} = \text{numero puro}$

$$\varphi_A(q) = -\frac{ql^3}{24EJ}$$

analisi dimensionale: $\varphi_A(q) = \frac{\frac{[F]}{[L]} \cdot [L]^3}{\frac{[F]}{[L]^2} \cdot [L]^4} = \text{numero puro}$

che, sostituiti nell'equazione di compatibilità cinematica, la trasformano in:

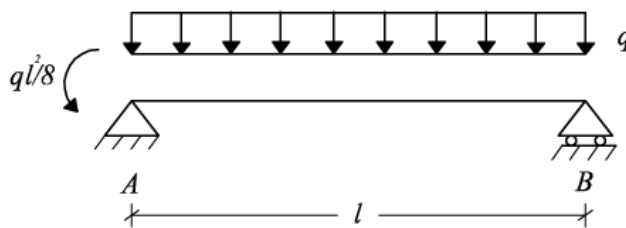
$$\frac{Xl}{3EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} = 0$$

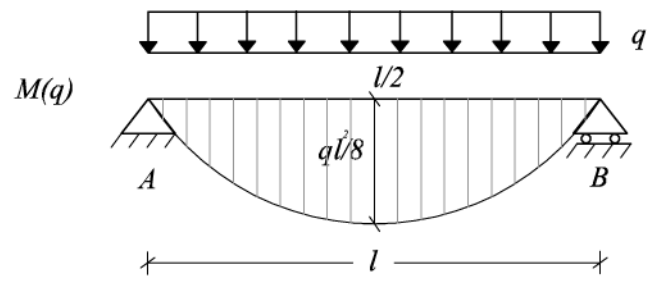
Da questa si ricava il valore dell' incognita iperstatica X

$$X = \frac{ql^2}{8}$$

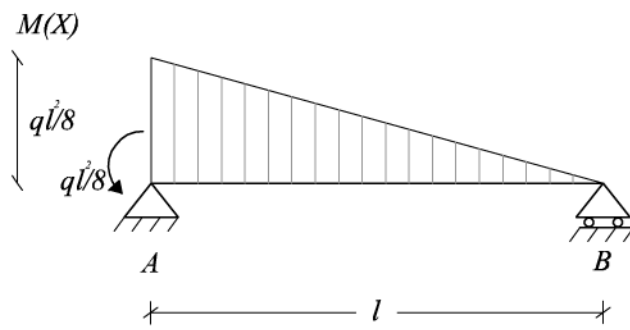
Quarto passo : *determinazione dei diagrammi delle sollecitazioni sulla struttura iperstatica*

A questo punto è possibile determinare i diagrammi delle sollecitazioni sulla struttura iperstatica, come somma degli effetti dovuti alla densità di carico e alla coppia X . Riferendoci ad esempio al diagramma dei momenti flettenti, questo si ottiene sovrapponendo i due diagrammi di Fig. 1.10:





+



=

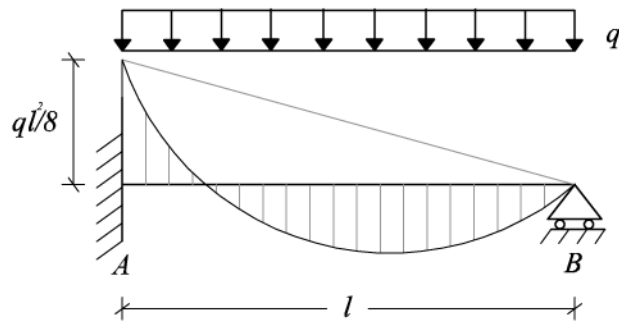


Fig. 1.10

1.3 *Una considerazione*

Abbiamo precedentemente rimarcato che, utilizzando il metodo delle forze, ad un'unica struttura iperstatica possono corrispondere vari modelli isostatici di riferimento. La scelta tra questi non influenza ovviamente il risultato finale. Difatti, se per la struttura del paragrafo precedente scegliessimo come schema isostatico di riferimento quello di Fig. 1.2, nel procedimento cambierebbero sia l'incognita iperstatica, sia l'equazione di congruenza necessaria per ripristinare la compatibilità cinematica. In particolare, per l'esempio di figura la reazione iperstatica incognita è la reazione vincolare del carrello in B e l'equazione di compatibilità cinematica che le corrisponde richiede che sia nullo lo spostamento verticale totale del punto B .

Seguendo il procedimento delineato nella precedente soluzione, lo spostamento totale del punto B sarà determinato come somma, per sovrapposizione degli effetti, degli spostamenti dovuti alla densità di carico q : $v_B(q)$ ed alla reazione incognita X : $v_B(X)$. Pertanto, l'equazione di compatibilità cinematica sarà:

$$v_B := v_B(X) + v_B(q) = 0$$

Anche questa volta richiamiamo risultati notevoli sugli spostamenti

$$v_B(X) = \frac{Xl^3}{3EJ}$$

$$v_B(q) = \frac{ql^4}{8EJ}$$

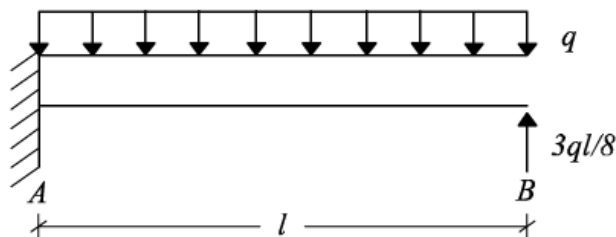
che ci consentono di esplicitare nell'equazione i singoli contributi:

$$\frac{Xl^3}{3EJ} - \frac{ql^4}{8EJ} = 0$$

e determinare, infine, il valore di X

$$X = \frac{3}{8}ql$$

Anche in questo caso, il diagramma dei momenti della struttura iperstatica si ottiene come sovrapposizione dei diagrammi dei momenti flettenti dovuti rispettivamente alla densità di carico q ed alla reazione X (Fig. 1.11).



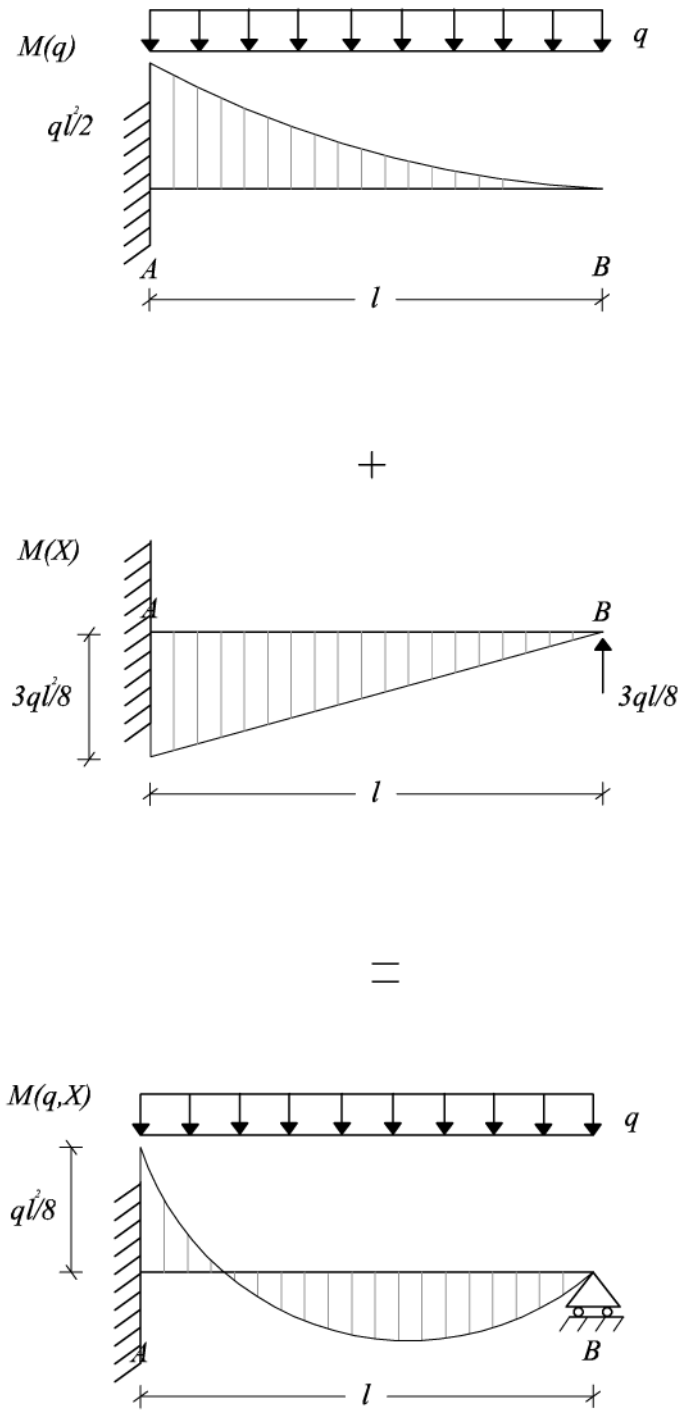


Fig. 1.11

1.4 Altre applicazioni

1.4.1 Trave continua su tre appoggi

Si consideri la trave continua su tre appoggi (vedi Fig. 1.12)

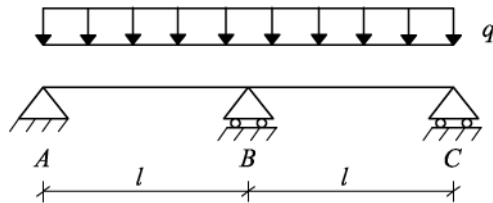


Fig. 1.12

La trave è una volta iperstatica. Nella figura Fig. 1.13 si mostrano due possibili scelte dello schema isostatico di riferimento e quindi dell'incognita iperstatica:

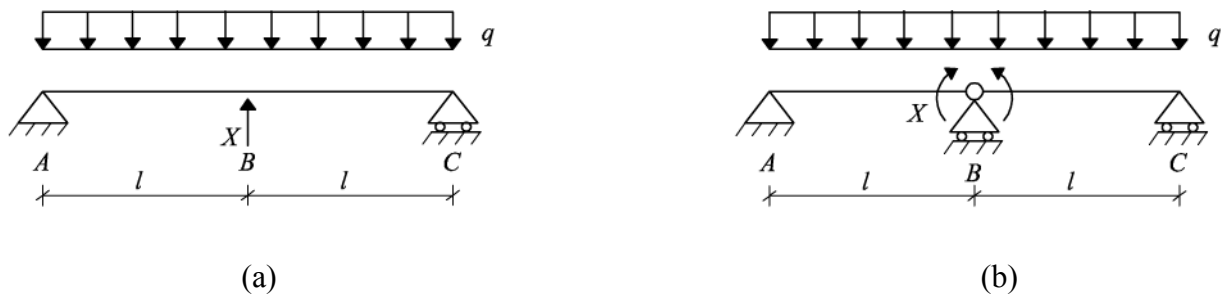


Fig. 1.13

Lo schema di Fig. 1.13a è più semplice in quanto la struttura isostatica di riferimento è una trave doppiamente appoggiata e la reazione iperstatica è la reazione vincolare dell'appoggio centrale. Invece, nello schema di Fig. 1.13b la reazione vincolare non è esterna, ma interna e potrebbe risultare di concezione meno intuitiva. Tuttavia, come sarà rimarcato nel seguito, quest'ultimo risulta facilmente generalizzabile al caso di trave continua su di un numero indefinito di appoggi. Pertanto, scegliamo di usare come struttura isostatica di riferimento quella nella Fig. 1.13b, in cui, una trave unica viene sostituita da due travi reciprocamente incernierate, entrambe doppiamente appoggiate. La struttura che ne risulta è isostatica in quanto i 6 gradi di libertà delle due travi sono compensati dalla somma dei vincoli esterni ($v=4$, una cerniera esterna più due carrelli) e del vincolo interno ($v=2$, una cerniera interna). La specificità della reazione vincolare incognita sta nel fatto che essa è una parte del vincolo di continuità che prima teneva unite in un unico pezzo le due travi. In particolare, la reazione vincolare coincide con il momento flettente nella sezione B (e quindi si rappresenta come due coppie eguali ed opposte, così come si rappresenta il momento flettente in una generica sezione) ed il suo effetto cinematico è quello di evitare la rotazione relativa delle sezioni su cui agisce (le sezioni che si affacciano nel punto B). Procedendo col passo successivo, osserviamo adesso come si deformerebbe la struttura isostatica di riferimento per effetto della densità di carico.

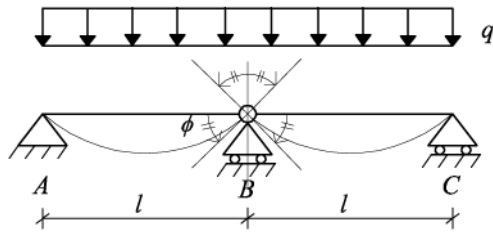


Fig. 1.14

Come indicato nella figura Fig. 1.13, ognuna delle due travi si comporta come una trave doppiamente appoggiata con sopra un carico ripartito. Pertanto, la singola trave subisce per effetto di q una rotazione della sezione in corrispondenza di entrambi gli appoggi. Poiché in B le due travi ruotano in verso opposto, questo configura una rotazione relativa delle due sezioni che si affacciano in B . Questa rotazione relativa (vedi figura 1.14) è pari alla somma in valore assoluto delle due rotazioni delle due travi in corrispondenza dell'appoggio in A . Se invece consideriamo le rotazione come quantità con segno (rotazione positiva se antioraria) la rotazione relativa sarà definita come la differenza tra la rotazione di destra e quella di sinistra.

Ricordiamo che il valore assoluto della rotazione della sezione sull'appoggio per una trave doppiamente appoggiata soggetta ad una carico ripartito pari a q vale $ql^3/24 EI$ (Fig. 1.15).

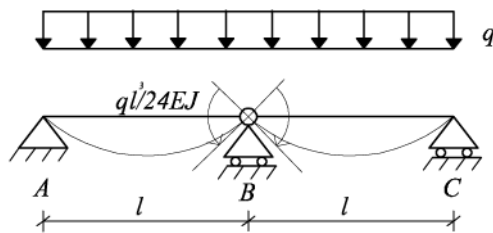


Fig. 1.15

Il valore della rotazione relativa prodotta da q sarà dunque pari a:

$$\Delta\varphi_B(q) = \varphi_{BS}(q) - \varphi_{BD}(q) = ql^3/(24 EI) - (-ql^3/(24 EI)) = \frac{ql^3}{12EJ}$$

Proseguendo nel ragionamento, l'incognita iperstatica X dovrà produrre una rotazione relativa uguale in valore assoluto ed opposta in segno rispetto a quella prodotta dalla densità di carico, ottenendo come effetto la deformata mostrata nella figura che segue:

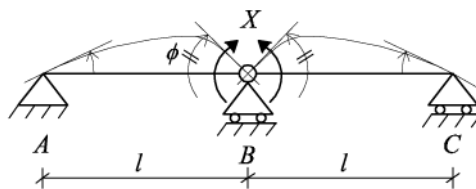


Fig. 1.16

Ricordando che per una trave doppiamente appoggiata soggetta ad un momento X applicato in una delle due sezioni terminali, la rotazione della sezione dove X è applicato vale $Xl/(3EJ)$, il valore della rotazione relativa prodotta da X nella sezione B sarà dunque pari a:

$$\Delta\varphi_B(X) = \varphi_{BS}(X) - \varphi_{BD}(X) = \Delta\varphi_B(X) = -\frac{Xl}{3EJ} - \left(-\frac{Xl}{3EJ}\right) = -\frac{2}{3} \frac{Xl}{EJ}$$

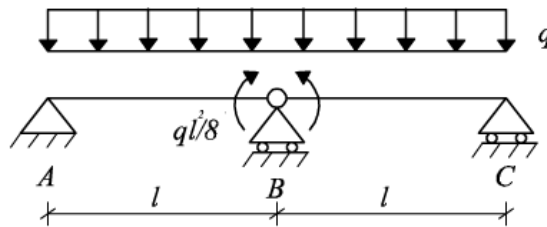
Imporre ora il rispetto del vincolo di continuità della trave, rimosso nella struttura isostatica di riferimento, significa imporre che la rotazione relativa nel punto B, somma delle due rotazioni relative prodotte da q e da X , sia uguale a zero:

$$\Delta\varphi_B := \varphi_B(q) + \varphi_B(X) = 0$$

Sostituendo i valori trovati sopra, si avrà :

$$\frac{ql^3}{12EJ} - \left(-\frac{2}{3} \frac{Xl}{EJ}\right) = 0 \rightarrow X = \frac{ql^2}{8}$$

A questo punto è possibile determinare i diagrammi del momento flettente della struttura iperstatica, sommando per sovrapposizione degli effetti i diagrammi dovuti rispettivamente alla densità di carico e alla coppia X nella struttura isostatica di riferimento.



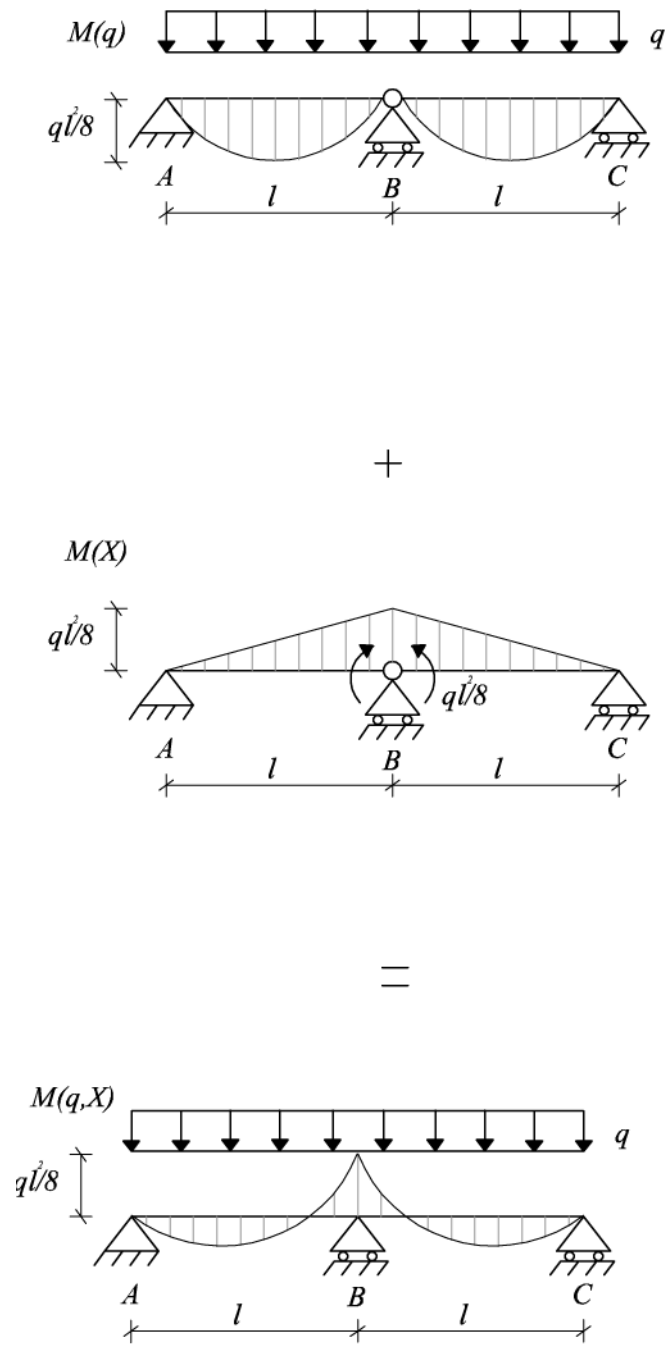


Fig. 1.17

1.4.2 Trave continua su sei appoggi

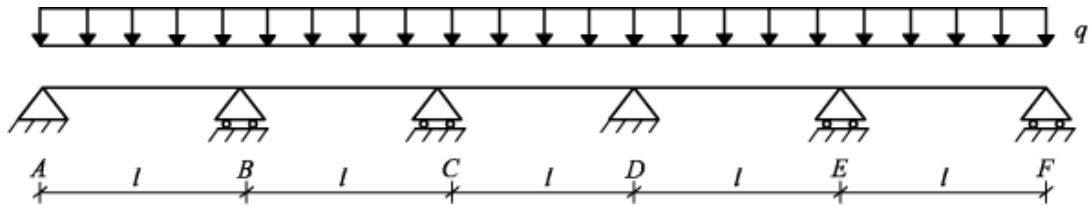


Fig. 1.18

In tal caso si potrebbe scegliere il seguente schema isostatico:

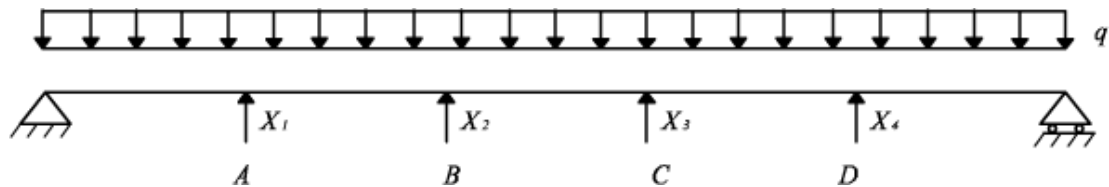


Fig. 1.19

L'inconveniente presentato da questo schema è che le equazioni di compatibilità cinematica, quattro in questo caso, ossia una per ogni appoggio soppresso, assumerebbero una forma complessa. Difatti, nella scrittura delle equazioni di vincolo $v_A=0$, $v_B=0$, $v_C=0$, $v_D=0$, bisogna comprendere ognuno degli spostamenti su indicati è la somma (essendo la trave unica) dei contributi dovuti alla densità di carico ed ognuna delle reazioni vincolari iperstatiche. Le equazioni di compatibilità cinematica assumono quindi la forma seguente:

$$v_A = v_A(q) + v_A(x_1) + v_A(x_2) + v_A(x_3) + v_A(x_4) = 0$$

$$v_B = v_B(q) + v_B(x_1) + v_B(x_2) + v_B(x_3) + v_B(x_4) = 0$$

$$v_C = v_C(q) + v_C(x_1) + v_C(x_2) + v_C(x_3) + v_C(x_4) = 0$$

$$v_D = v_D(q) + v_D(x_1) + v_D(x_2) + v_D(x_3) + v_D(x_4) = 0$$

in cui si evidenzia che in ognuna delle equazioni sono presenti tutte e quattro le incognite. Il sistema di equazioni risulta fortemente accoppiato, quindi di soluzione meno agevole; inoltre, poiché ognuna delle incognite iperstatiche ha un differente punto di applicazione sulla trave, l'espressione algebrica dello spostamento da essa indotto sarà di volta in volta diverso. Queste considerazioni spingono ad utilizzare, nel caso in esame, come struttura isostatica di riferimento quella indicata in Fig. 1.20.

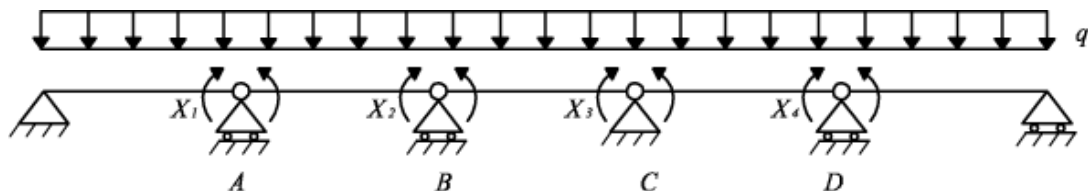


Fig. 1.20

La scelta di uno schema di questo tipo, rispetto a quello mostrato in Fig. 1.19, si rivela più efficace perché le equazioni di compatibilità cinematica $\Delta\varphi_A = 0$ $\Delta\varphi_B = 0$ $\Delta\varphi_C = 0$ $\Delta\varphi_D = 0$, risultano più maneggevoli algebricamente.

Entriamo dunque nello specifico. Una prima considerazione risulta necessaria. Dalla Fig. 1.21 si evince come ogni coppia di momenti applicata in uno degli appoggi della trave continua induce rotazioni non solo nella sezione in cui è applicata, ma anche nelle sezioni corrispondenti ai due appoggi adiacenti.

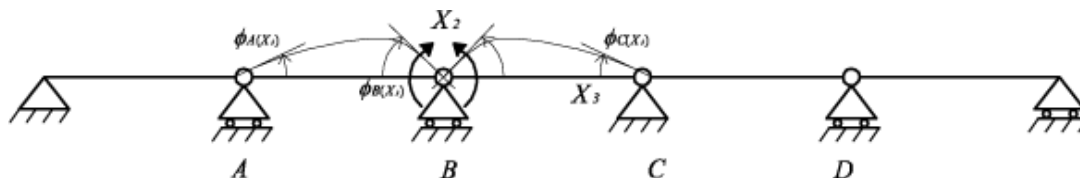


Fig. 1.21

In particolare, l'incognita X_2 applicata nella sezione B produce delle rotazioni di trascinato anche in A e C di entità pari a:

$$\varphi_A(X_2) = \varphi_C(X_2) = \frac{X_2 l}{6EJ}$$

Di questa circostanza si tiene ovviamente conto nella scrittura delle equazioni di compatibilità cinematica. Ad esempio, la prima equazione impone l'annullarsi della rotazione relativa nella sezione A . Tale rotazione relativa è somma delle rotazioni relative prodotte da q ed X_1 alle quali si somma anche il contributo secondario prodotto dalla coppia di momenti X_2

$$\Delta\varphi_A = \Delta\varphi_A(q) + \Delta\varphi_A(X_1) + \Delta\varphi_A(X_2) = 0$$

Sostituendo i valori suddetti si avrà:

$$\Delta\varphi_A = \frac{ql^3}{12EJ} - \frac{2}{3} \frac{X_1 l}{EJ} - \frac{X_2 l}{6EJ} = 0$$

Riscriviamo quindi anche le altre equazioni:

$$\Delta\varphi_B = 0$$

Sostituendo si avrà:

$$\Delta\varphi_B = \frac{ql^3}{12EJ} - \frac{X_1l}{6EJ} - \frac{2}{3} \frac{X_2l}{EJ} - \frac{X_3l}{6EJ} = 0$$

$$\Delta\varphi_C = 0$$

Sostituendo si avrà:

$$\Delta\varphi_C = \frac{ql^3}{12EJ} - \frac{X_2l}{6EJ} - \frac{2}{3} \frac{X_3l}{EJ} - \frac{X_4l}{6EJ} = 0$$

$$\Delta\varphi_D = 0$$

Sostituendo si avrà:

$$\Delta\varphi_D = \frac{ql^3}{12EJ} - \frac{X_3l}{6EJ} - \frac{2}{3} \frac{X_4l}{EJ} = 0$$

Come si può facilmente notare, il caso si risolve con espressioni ricorsive in cui i termini presentano sempre la medesima espressione. Trattare una trave continua su più appoggi come un insieme di travi appoggiate rende più semplice la soluzione del problema iperstatico.

1.4.3 Trave doppiamente incastrata

Si consideri la trave doppiamente incastrata in Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.:

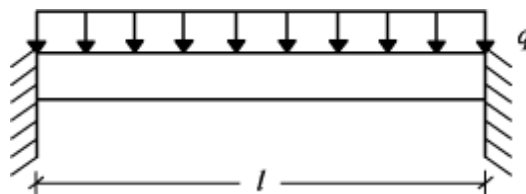


Fig. 1.22

La trave è tre volte iperstatica; anche in questo caso possiamo problematizzare la struttura isostatica di riferimento allo scopo di mostrare come questa scelta possa semplificare di molto la soluzione del problema dell'equilibrio elastico. Difatti, se ipotizziamo le strutture isostatiche di riferimento mostrate nella Fig. 1.23, ci rendiamo conto che la scelta dell'una o dell'altra non è del tutto neutra.

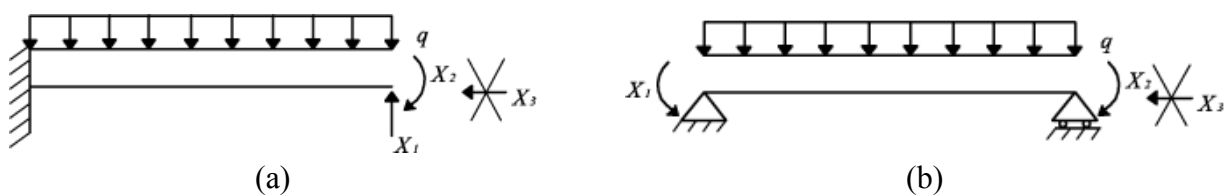


Fig. 1.23

In entrambi i casi una prima considerazione ci consente di diminuire il grado di iperstaticità. Difatti, l'assenza di carichi esterni agenti lungo la direzione orizzontale annulla la reazione vincolare X_3 . A questo punto tuttavia osserviamo che mentre lo schema (a) è una struttura isostatica non simmetrica, lo schema (b) invece lo è. Quindi, lo schema (b) rappresenta una struttura simmetrica geometricamente e soggetta ad un carico simmetrico; questo ci consente di concludere che tutte le azioni esterne ed interne devono essere simmetriche e quindi che $X_1=X_2=X$. Per lo schema (a) questa considerazione ovviamente non vale. A questo punto, ci riferiamo allo schema di figura (b). Valutiamo adesso come si deformerebbe la struttura isostatica di riferimento per effetto della sola densità di carico q (Fig. 1.24):

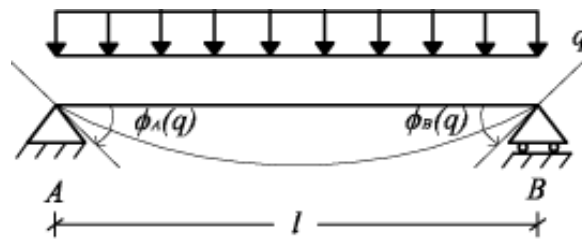


Fig. 1.24

Rispetto alla struttura iniziale doppiamente incastrata, nella struttura isostatica le sezioni A e B delle trave subirebbero due rotazioni $\varphi_A(q)$ e $\varphi_B(q)$ di valore assoluto pari a:

$$|\varphi_A(q)| = |\varphi_B(q)| = \frac{ql^3}{24EJ}$$

Le incognite iperstatiche X ricordano le queste due rotazioni non sono compatibili cinematicamente e si oppongono ad esse inducendo una rotazione di segno opposto di modo che la rotazione complessiva di entrambe le sezioni sia pari a zero (Fig. 1.26).



Fig. 1.25

Le equazioni di compatibilità cinematica sarebbero quindi due, ma a noi ne serve una sola, per la valutazione l'unica incognita X . L'equazione cinematica della sezione A assume la forma seguente:

$$\varphi_A := \varphi_A(q) + \varphi_A(x) = 0$$

A questo punto ricordiamo che $\varphi_A(X)$ è somma di due contributi l'uno diretto e l'altro di trascinamento; pertanto, l'equazione si particularizza come segue:

$$-\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{Xl}{6EJ} + \frac{Xl}{3EJ} = 0 \rightarrow X = \frac{ql^2}{12}$$

Determinato il valore dell'incognita iperstatica, possiamo in fine, per sovrapposizione degli effetti, disegnare il diagramma che descrive l'andamento della funzione momento flettente della struttura iperstatica come somma dei singoli diagrammi (Fig. 1.26):

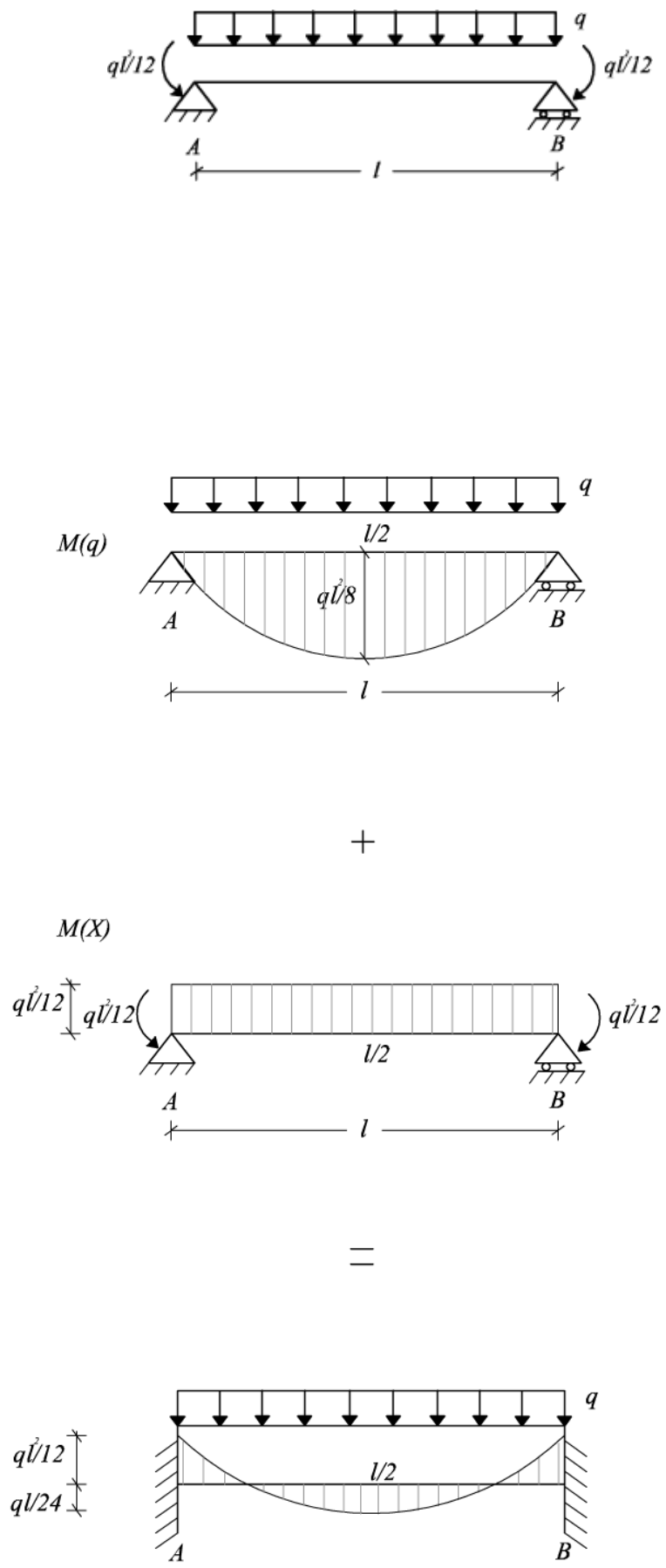


Fig. 1.26

1.4.4 Travi appoggiate collegate da un'asta

Si consideri il sistema di Fig. 1.27, costituito da tre travi collegate tramite cerniere passanti (che non interrompono la continuità delle travi collegate):

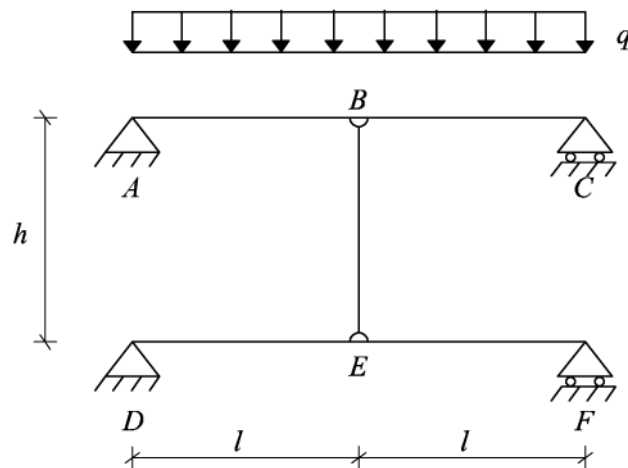


Fig. 1.27

Il sistema è una volta iperstatico, perché i 9 gradi di libertà dei tre corpi piani collegati sono contrastati da 10 gradi di vincolo (due cerniere esterne, due interne, e due carrelli): $v > l \rightarrow v = 6 + 4 = 10$, $l = 9$. Nella scelta del sistema isostatico di riferimento e quindi dell'unica incognita iperstatica è necessario prestare molta attenzione a non rendere labile il sistema strutturale (come mostrato in figura):

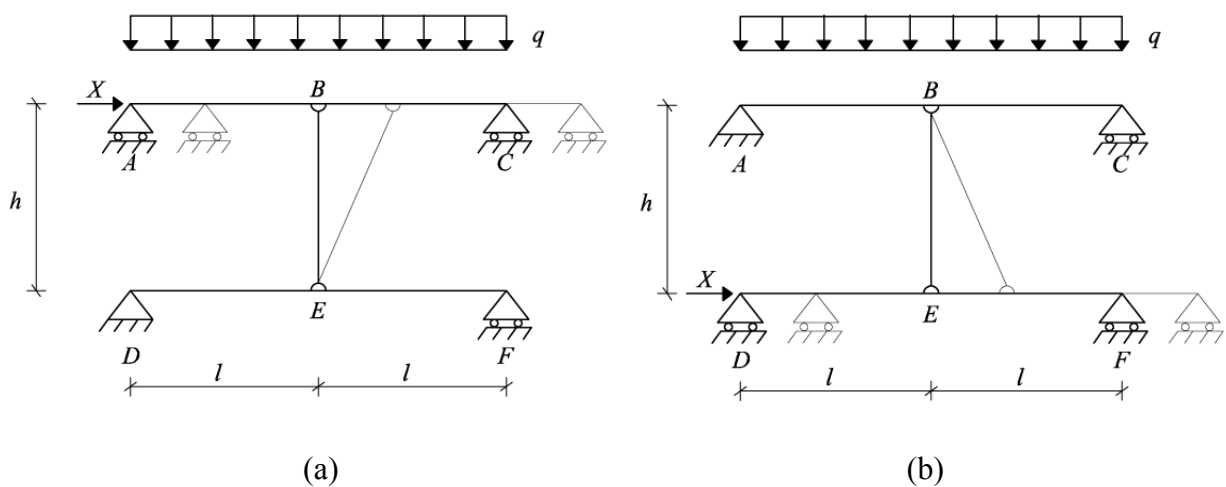


Fig. 1.28

Anche in questo caso ci sono vari modi per selezionare correttamente una struttura isostatica di riferimento, ma uno risulta infinitamente più conveniente degli altri. Nella figura che segue mostriamo due schemi isostatici.

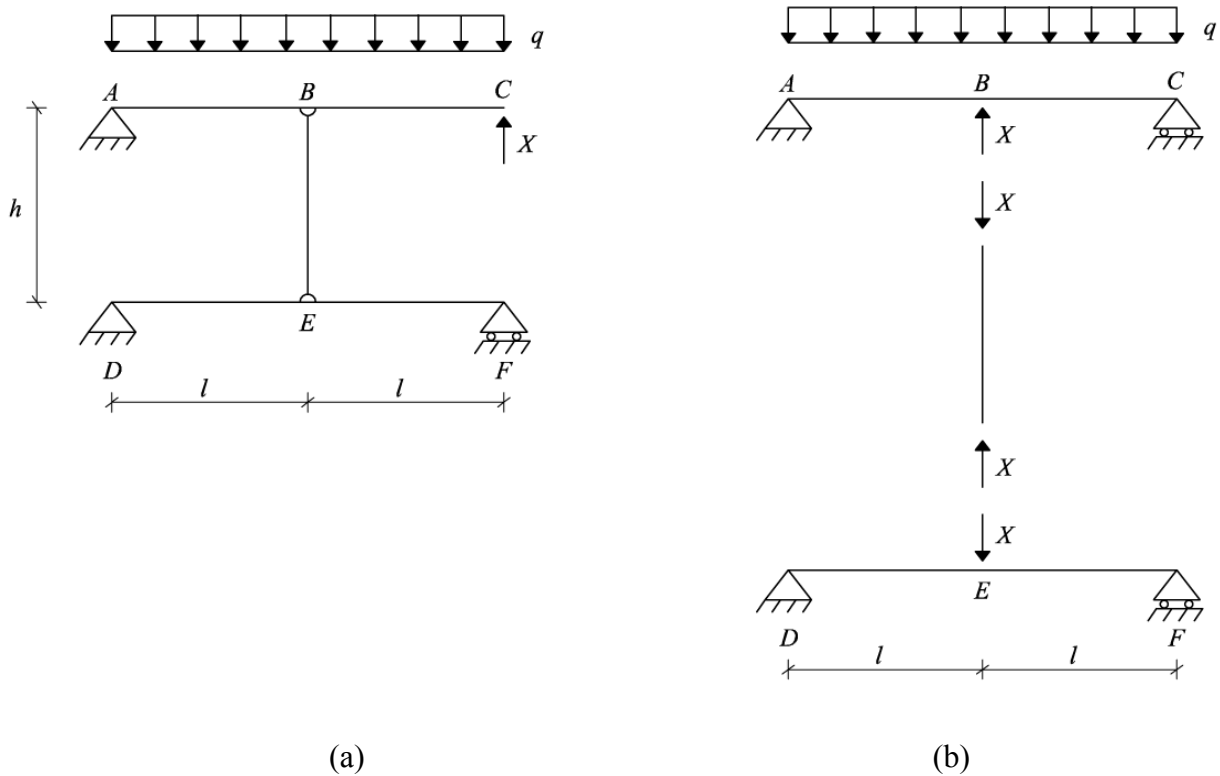


Fig. 1.29

Lo schema (a) sembra più semplice perché sceglie come incognita iperstatica una reazione vincolare esterna, mentre lo schema (b) sceglie come incognite iperstatiche delle reazioni vincolari interne. Tuttavia, lo schema (b), risulta di calcolo più semplice perché utilizza, nella scrittura dell'equazione di compatibilità associata all'incognita iperstatica, delle formule di spostamento relative allo schema di trave doppiamente appoggiata. Nonostante le semplificazioni di calcolo, lo schema (b) presenta delle difficoltà concettuali che devono essere spiegate. Anzitutto va chiarito perché, pur avendo eliminato ben due cerniere interne e quindi un grado di vincolo pari a quattro, l'incognita iperstatica è solo una. Questa circostanza discende dal fatto che noi abbiamo riconosciuto visivamente il carattere reticolare dell'asta BE ; essa difatti è :

- 1) un'asta rettilinea;
- 2) doppiamente incernierata alle estremità;
- 3) senza carichi sul corpo dell'asta ma solo sui nodi di estremità;

In tal caso l'asta BE è soggetta a solo sforzo normale costante (di cui a priori non conosciamo né il valore né il segno) che abbiamo indicato con X , e questo sforzo normale non è altro che la forza che l'asta AC esercita sull'asta BE tramite la cerniera interna in B . Viceversa l'asta BE esercita sull'asta AC la forza X uguale ed opposta. La stessa situazione si verifica ovviamente nella sezione E .

Per determinare quest'ultima incognita iperstatica dobbiamo scrivere un'unica equazione di compatibilità cinematica. L'asta BE se indeformabile assialmente, fa sì che i punti B ed E abbiano lo stesso spostamento verticale $v_B = v_E$ e questa equazione è l'equazione che mancava.

Allo spostamento del punto B che appartiene all'asta AC , concorrono il carico q e la forza X :

$$v_B = v_B(q) + v_B(X)$$

Mentre allo spostamento di E , appartenente all' asta DF , concorre la sola forza X :

$$v_E = v_E(X)$$

Eguagliando i secondi membri avremo

$$v_E(X) = v_B(q) + v_B(X)$$

Ricordando le espressioni di uno spostamento in mezzeria in una trave doppiamente appoggiata soggetta a carico uniformemente distribuito o a forza concentrata nella sezione centrale:

$$v_E(X) = -\frac{Xl^3}{48EJ}$$

e indicando col segno meno gli abbassamenti, l'equazione di compatibilità cinematica si particularizza come segue:

$$-\frac{Xl^3}{48EJ} = \frac{Xl^3}{48EJ} - \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \rightarrow X = +\frac{5}{16} ql$$

Noti i diagrammi della funzione momento per la struttura isostatica (Fig. 1.30), ricaviamo il diagramma della struttura di partenza per sovrapposizione degli effetti (Fig. 1.31):

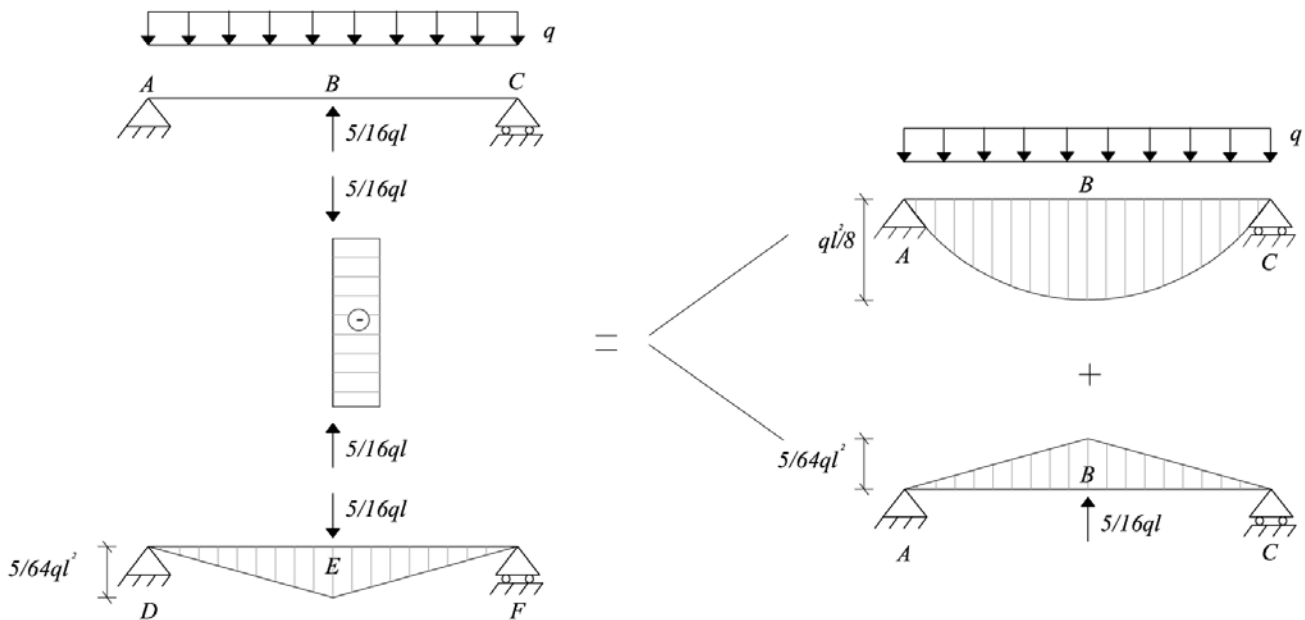


Fig. 1.30

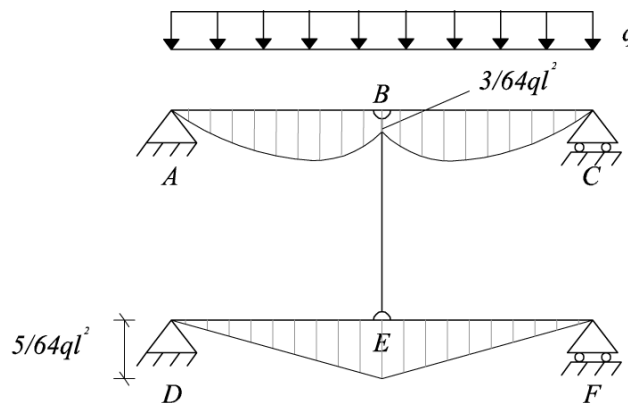


Fig. 1.31

Il diagramma dei momenti dell' asta AC ha due punti di massimo che corrispondono a punti in cui il valore del taglio è nullo. Per determinarli occorre disegnare il diagramma del taglio (Fig. 1.32) che si otterrà anche esso come sovrapposizione degli effetti sull' asta AC del taglio provocato dal carico distribuito e del taglio provocato dalla forza concentrata.

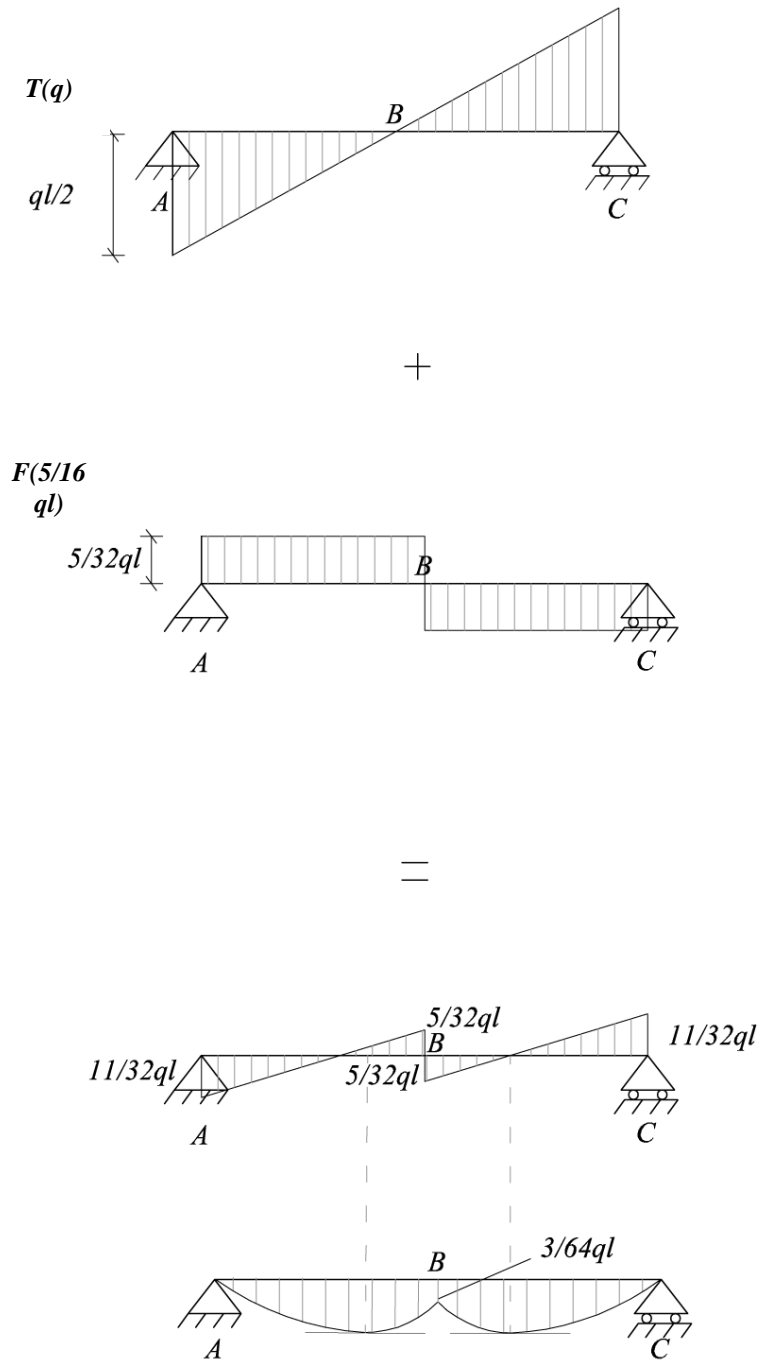


Fig. 1.32

1.4.5 Trave continua su più appoggi con sbalzo

Si consideri la trave in figura:

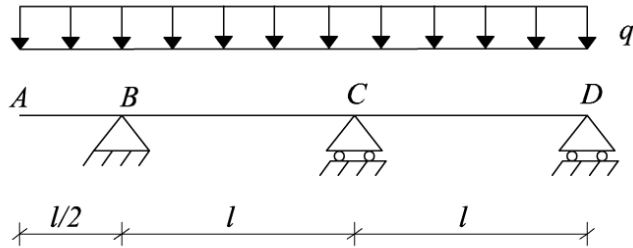


Fig. 1.33

Si scelga, come visto sopra per le travi continue, il seguente schema isostatico di riferimento:

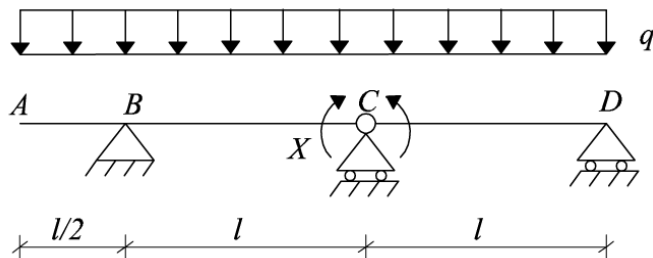


Fig. 1.34

In un caso del genere, il modo più semplice per trattare la mensola AB consiste nell'analizzarla a parte e sostituirla con l'effetto che essa produce sulla struttura. Questa considerazione vale sempre per ogni mensola perchè pur essendo inserite in un contesto iperstatico, la mensola è un tratto isostatico la cui soluzione a priori può semplificare l'analisi successiva. Nella figura seguente si mette in evidenza come per l'equilibrio della mensola sono necessarie una forza F rivolta verso l'altro valore pari a $\frac{ql}{2}$ ed una coppia oraria del valore pari a $\frac{ql^2}{8}$ (necessarie per equilibrare gli effetti del carico q) che rappresentano la reazione del vincolo di continuità (incastro interno) della trave in B . Le medesime forze eguali ed opposte sono le azioni che il vincolo di continuità trasmette al resto della trave.

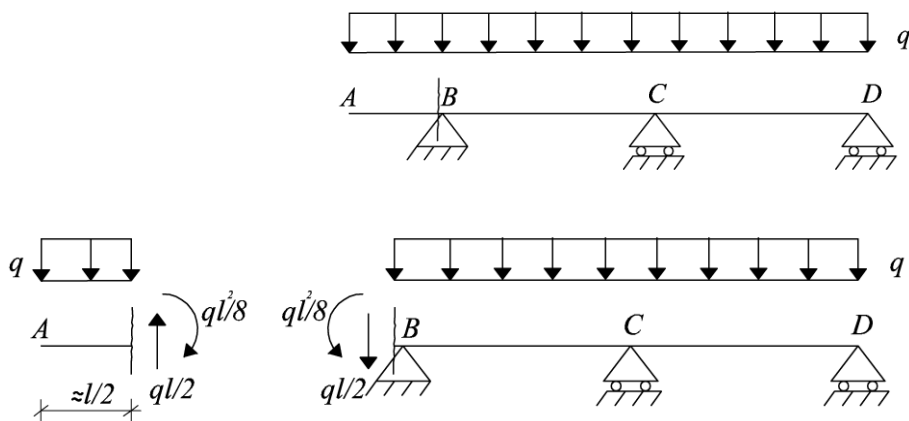


Fig. 1.35

Definito il contributo della mensola la struttura da analizzare è la seguente

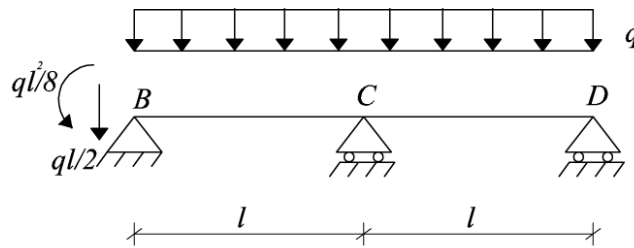


Fig. 1.36

L'effetto di $\frac{ql}{2}$ è quello di aumentare la reazione vincolare di B ma non di produrre deformazione sulla trave. In altre parole la forza $\frac{ql}{2}$ agendo direttamente sul vincolo in B e non provocando deformazione alcuna sulla trave, interviene nelle equazioni di compatibilità cinematica che scriveremo. Date queste premesse la struttura isostatica di riferimento è la seguente:

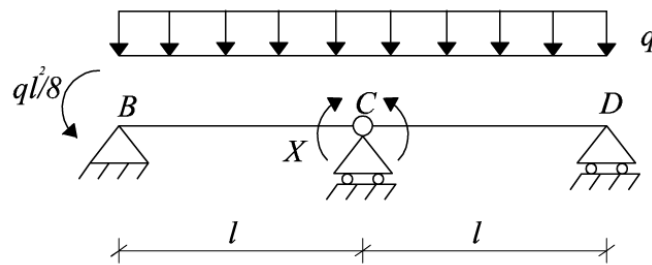


Fig. 1.37

L'equazione di compatibilità cinematica, impone che la rotazione relativa nel punto C sia nulla:

$$\Delta\varphi_C = \varphi_{CS} - \varphi_{CD} = 0$$

Che equivale ad imporre che le due rotazioni a sinistra e a destra di C siano uguali:

$$\varphi_{CS} = \varphi_{CD}$$

Si determini adesso il valore della rotazione a sinistra di C per sovrapposizione degli effetti dei contributi trasmessi dalla densità di carico q , dalla coppia X e dalla coppia $\frac{ql^2}{8}$:

$$\varphi_{CS} = \varphi_{CS}(X) + \varphi_{CS}(q) + \varphi_{CS}\left(\frac{ql^2}{8}\right)$$

Calcoliamo a parte il contributo della coppia $\frac{ql^2}{8}$

$$\varphi_{CS} \left(\frac{ql^2}{8} \right) = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{6EJ} = \frac{ql^3}{48EJ}$$

E lo sostituiamo nell'equazione di sopra insieme agli altri valori noti. Si otterrà infine :

$$\varphi_{CS} = -\frac{xI}{3EJ} + \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{ql^3}{48EJ}$$

Il valore della rotazione a destra di C, sarà invece somma dei contributi della densità di carico q e dalla coppia X :

$$\varphi_{CD} = \varphi_{CD}(X) + \varphi_{CD}(q)$$

Sostituendo si avrà:

$$\varphi_{CD} = +\frac{XI}{3EJ} - \frac{ql^3}{24EJ}$$

Si riscriva adesso l'equazione di compatibilità cinematica dalla quale ricaviamo direttamente il valore della incognita iperstatica:

$$-\frac{XI}{3EJ} + \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{ql^3}{48EJ} = \frac{XI}{3EJ} - \frac{ql^3}{24EJ}$$

Riordinando i membri diventa:

$$+\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{ql^3}{48EJ} = \frac{2XI}{3EJ}$$

Sommando e semplificando:

$$+\frac{ql^2}{16} = \frac{2X}{3} \rightarrow X = \frac{3}{32}ql^2$$

1.5 *Una comparazione*

Compariamo il metodo delle forze con il metodo degli spostamenti per cogliere una serie di differenze fondamentali che ne costituiscono “il portato”.

Nel metodo degli spostamenti, le incognite del problema sono le funzioni spostamento e rotazione sull'intero corpo della trave, mentre gli strumenti risolutivi sono equazioni differenziali con annesse condizioni al bordo. Per risolvere l'equazione differenziale della linea elastica bisogna effettuare successive operazioni di integrazione che forniscono come funzioni definite a meno di costanti di integrazione. Queste ultime vanno determinate risolvendo il sistema, questa volta algebrico, delle condizioni al bordo. Il portato didattico del metodo degli spostamenti è imparare a scrivere le condizioni al bordo e/o le condizioni di continuità, riconoscendo il contenuto meccanico.

Nel metodo delle forze, le incognite sono le reazioni vincolari iperstatiche, che non sono funzioni, bensì un numero finito di valori di forze e/o coppie e/o azioni di contatto in definite sezioni della trave. Pertanto, le equazioni risolutive sono equazioni algebriche, che hanno il significato meccanico di equazioni di vincolo (dei vincoli soppressi). Il portato di questo metodo sta nella capacità di applicazione sistematica del principio di sovrapposizione degli effetti, nella comprensione profonda del comportamento cinematica dei vincoli etc.