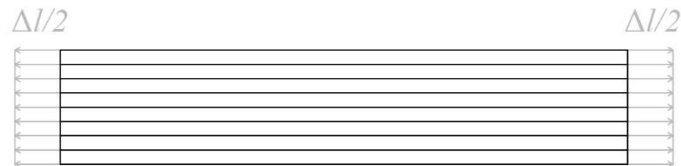


1) DIMENSIONAMENTO DI UNA SEZIONE SOGGETTA A TRAZIONE



In un elemento strutturale, soggetto a sforzo normale centrato di trazione, le fibre si deformano di una quantità Δl , definita **allungamento** in quanto $\Delta l > 0$. La deformazione invece, pari a $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, viene definita **dilatazione** poiché se $\Delta l > 0$, anche $\varepsilon > 0$.



Per progettare un elemento strutturale, soggetto a sola trazione, si deve tener conto della possibilità di rottura del materiale e per questo si impone che:

$$\sigma_{max} \leq f_{td} \quad (1)$$

ove f_{td} è la resistenza a trazione di progetto del materiale in esame.
Dalla (1) si ricava che:

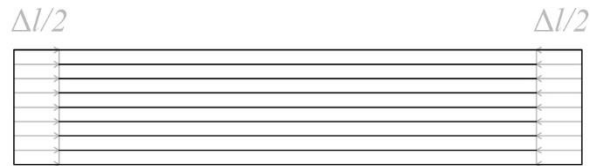
$$A_{min} = \frac{N}{f_{td}} \quad (2)$$

Infatti per risolvere il problema del dimensionamento abbiamo un'unica incognita, che è rappresentata dal valore minimo che l'area della sezione deve avere.

2) DIMENSIONAMENTO DI UNA SEZIONE SOGGETTA A COMPRESSIONE



In un elemento strutturale, soggetto a sforzo normale centrato di compressione, le fibre si deformano di una quantità Δl , definita **accorciamento** in quanto $\Delta l < 0$. Invece la deformazione viene definita **contrazione** poiché se $\Delta l < 0$, anche $\varepsilon < 0$.



In un'asta soggetta a compressione oltre alla rottura del materiale, potrebbero verificarsi dei fenomeni di **instabilità euleriana**.

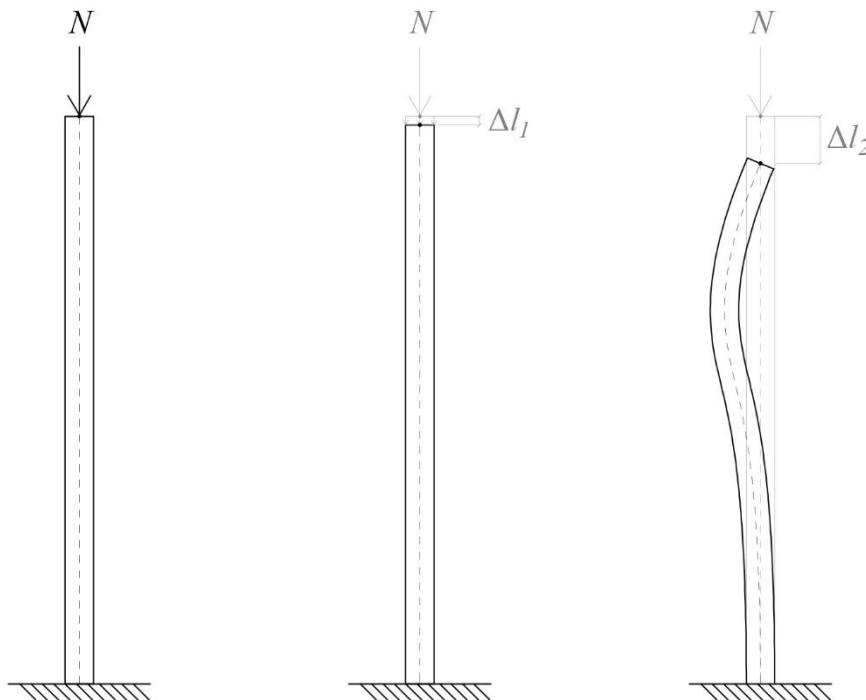
In un modo estremamente divulgativo, i fenomeni di instabilità possono essere giustificati dalla tendenza naturale delle forze a compiere lavoro e quindi a spostare il più possibile il loro punto di applicazione nella direzione della forza. Applicando questo assunto ad un'asta compressa ci si trova nelle condizioni illustrate nella figura in basso. In questa figura è anzitutto rappresentato l'abbassamento del punto di applicazione della forza applicata, dovuto a deformazione assiale dell'elemento strutturale. Questo spostamento è pari all'accorciamento dell'asta e vale Δl_1 . Pertanto, la forza N compirà un lavoro pari a:

$$L_1 = N \times \Delta l_1$$

Nella medesima figura a destra, viene illustrata anche la configurazione deformata indotta dallo sbandamento laterale dell'elemento, ossia da un fenomeno di instabilità euleriana. In questo caso l'abbassamento del punto di applicazione della forza applicata è pari a Δl_2 , e il lavoro compiuto dalla forza N varrà:

$$L_2 = N \times \Delta l_2$$

In figura $\Delta l_1 < \Delta l_2$ perché abbiamo disegnato un'asta snella la cui rigidità assiale è molto superiore a quella flessionale. In tal caso anche $L_1 < L_2$ e questa snellezza giustifica il fatto che il fenomeno di instabilità si inneschi.



Da queste premesse, si evince che in fase di progetto di un'asta compressa, bisogna cautelarsi sia dalla rottura per schiacciamento del materiale, sia dall'insorgere del fenomeno di instabilità.

Questo atteggiamento progettuale ci consentirà di definire due grandezze, entrambe riguardanti la sezione e che sono rispettivamente l'**Area** ed il **Momento di Inerzia minimo** della sezione medesima.

➤ Uguagliando la tensione massima sulla sezione alla resistenza di progetto del materiale si ottiene l'**Area della sezione**, prima incognita di progetto. Questa è da intendersi come il minimo valore che deve avere l'area della sezione per evitare lo schiacciamento del materiale.

$$\sigma_{max} = f_{cd} \quad (3)$$

ove f_{cd} è la resistenza a compressione di progetto del materiale in esame.

$$\frac{N}{A_{min}} = f_{cd} \quad (4)$$

$$A_{min} = \frac{N}{f_{cd}} \quad (5)$$

➤ Mettendo in relazione la tensione normale massima all'interno dell'elemento strutturale e la tensione critica dell'elemento strutturale medesimo, si ottiene il secondo dato progettuale che è il **Momento di Inerzia minimo** della sezione. Ovviamente, anche in questo caso il risultato è da intendersi come il valore minimo della caratteristica cercata. Per **tensione critica** dell'elemento strutturale, si intende la tensione, ossia il rapporto tra sforzo normale e area, in corrispondenza del carico critico euleriano.

Bisogna quindi definire il **carico critico euleriano** per arrivare alla tensione da lui indotta nella sezione della trave.

Il carico critico euleriano, detto anche carico di punta, è quella forza di compressione il cui valore porta ad innescare il fenomeno di instabilità laterale. Esso vale:

$$N_{critico} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(\beta l)^2} \quad (6)$$

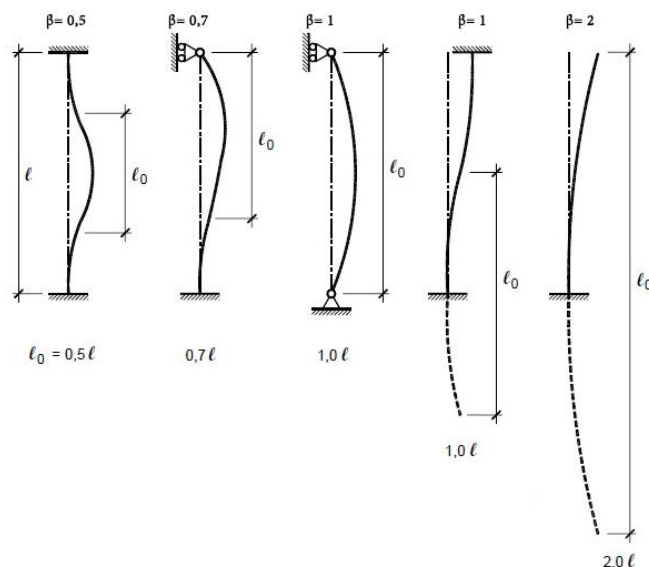
ove:

E = modulo di elasticità del materiale

I_{min} = momento di inerzia più piccolo tra I_x e I_y

β = coefficiente adimensionale che riflette l'influenza dei vincoli, i cui valori sono riportati nell'immagine sottostante

l = lunghezza dell'elemento



Ponendo:

$$l_0 = \beta l \quad (7)$$

Chiamiamo l_0 , la lunghezza libera di inflessione, definendo questa come la distanza tra due punti di flesso successivi della deformata critica.

Dalla geometria delle aree, ricordiamo che vale la seguente relazione:

$$I_{min} = A \rho_{min}^2 \quad (8)$$

ove ρ_{min} è il raggio minimo di inerzia.

La (6) può essere riscritta:

$$N_{critico} = \frac{\pi^2 E A \rho_{min}^2}{l_0^2} \quad (9)$$

È possibile ora effettuare un'altra sostituzione ponendo:

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho_{min}} \quad (10)$$

ove λ prende il nome di snellezza dell'asta.

Faccio notare che la snellezza è una grandezza adimensionale, in qualche modo definibile come una "altezza" (l_0) diviso una "larghezza" (ρ_{min}), e pertanto molto simile alla sua accezione corrente.

Infine sostituendo la (10) nella (9), ricaviamo una formulazione più comoda ai fini progettuali del carico critico euleriano:

$$N_{critico} = \frac{\pi^2 E A}{\lambda^2} \quad (11)$$

Dato che il carico critico è una forza di compressione agente sulla sezione dell'elemento, ad esso è associata una tensione, che chiameremo tensione critica ($\sigma_{critico}$) e che è pari a:

$$\sigma_{critico} = \frac{N_{critico}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (12)$$

Ora, dopo aver definito la tensione critica, è possibile metterla in relazione con la tensione massima all'interno dell'elemento.

$$\sigma_{max} = \sigma_{critico} \quad (13)$$

Ma per la (3) si ha:

$$f_{cd} = \sigma_{critico} \quad (14)$$

Uguagliando nella (14) la resistenza di progetto del materiale alla tensione critica, si sta progettando in modo tale che quando il materiale entra in crisi per fenomeni di schiacciamento, si verifica contemporaneamente il fenomeno dell'instabilità.

Far interagire il fenomeno della crisi per schiacciamento con il fenomeno di crisi per carico di punta, enfatizza gli effetti di entrambi ed è per questa ragione una condizione pericolosa; quindi è consigliato cambiare la relazione che intercorre tra la resistenza del materiale e la tensione critica.

$$\text{Se fosse:} \quad f_{cd} > \sigma_{critico} \quad (15)$$

nell'elemento si verificherebbe prima l'insorgere dell'instabilità e poi la rottura per schiacciamento del materiale; questa scelta progettuale potrebbe venire intrapresa solo quando

si ha conoscenza di quanto accade nella fase post-critica del fenomeno di instabilità e la si ritiene non pericolosa.

Se fosse:
$$f_{cd} < \sigma_{critico} \quad (16)$$

la tensione all'interno dell'elemento raggiungerebbe per prima la resistenza a schiacciamento del materiale, innescandone la rottura. Quest'ultima relazione risulta quindi quella consigliata poiché l'instabilità è un fenomeno che in genere non si riesce a controllare.

Di conseguenza, dalla (12) e dalla (16) si ha:

$$f_{cd} < \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (17)$$

Mettendo in evidenza la snellezza nella (17):

$$\lambda^2 < \frac{\pi^2 E}{f_{cd}} \quad (18)$$

Da cui:

$$\lambda_{max} = \pi \sqrt{\frac{E}{f_{cd}}} \quad (19)$$

Dalla (19) si ottiene la massima snellezza possibile che la trave compressa deve avere affinché l'instabilità non si inneschi prima dello schiacciamento.

Da questo valore di λ_{max} possiamo ottenere una indicazione sul raggio di inerzia minimo che la sezione deve avere. Ad essere precisi, questa indicazione è sul valore minimo del raggio di inerzia minimo della sezione.

Ricordando che per la (10) la snellezza è uguale a:

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho_{min}} \quad (20)$$

Ed eguagliando (20) e (19), si ricava che il valore minimo del raggio di inerzia minimo è pari a:

$$\rho_{min} = \frac{l_0}{\lambda_{max}} \quad (21)$$

Tanto per fare un esempio, nel caso di sezioni rettangolari, si ottiene:

$$\rho_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{b^3 h}{12} \frac{1}{b h}} = \sqrt{\frac{1}{12}} b \quad (22)$$

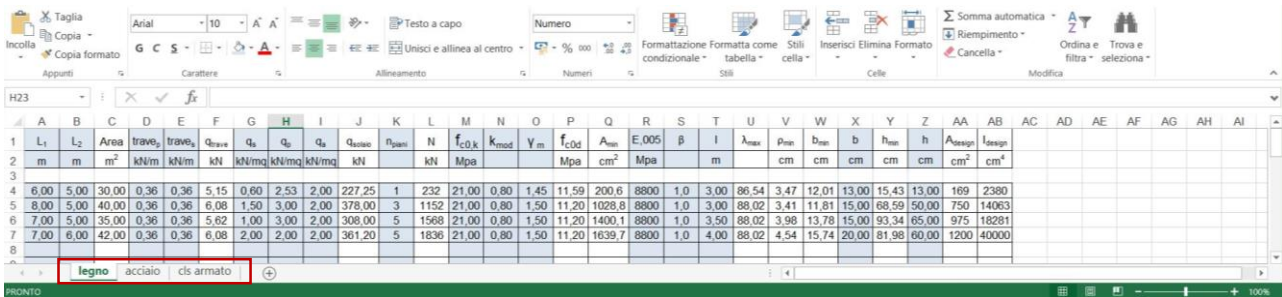
e, quindi una indicazione progettuale sulla larghezza minima b che la sezione deve avere. Dal valore di b , considerata come la dimensione più piccola della sezione rettangolare.

3) ESERCITAZIONE

Con l'ausilio del file Excel "esercitazione_pilastr", disponibile nella sezione *Download* del Portale di Meccanica, è possibile dimensionare la sezione di un pilastro.

Trattandosi del dimensionamento di un elemento strutturale soggetto a sforzo normale di compressione, l'obiettivo sarà quello di definire un'area di progetto e un momento di inerzia minimo di progetto, tenendo conto della possibilità di rottura del materiale per schiacciamento e della possibilità che si verifichi il fenomeno di instabilità.

Questo file Excel, come quelli utilizzati per le precedenti esercitazioni, è composto da tre fogli di calcolo, ognuno dedicato ad uno dei tre materiali comunemente utilizzati in edilizia: legno, acciaio e cemento armato.



Le tabelle contenute nei tre fogli di calcolo possono essere divise in gruppi di colonne, nelle quali è necessario inserire dei dati (colonne in azzurro) per ottenere dei risultati (colonne in bianco).

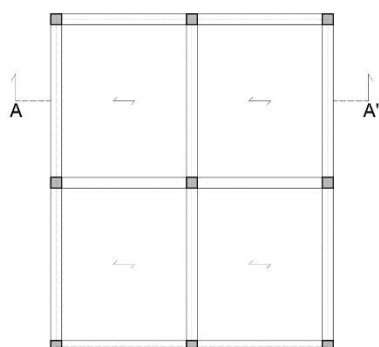
Per quanto riguarda il legno e l'acciaio possono essere individuati 4 gruppi di colonne; il risultato che otteniamo dal primo gruppo è l'**Area di influenza** del pilastro (A_{area}), quello che otteniamo dal secondo gruppo è lo **sforzo normale agente** sul pilastro (N), il risultato del terzo gruppo è l'**Area minima** che deve avere la sezione in modo tale che il materiale non arrivi a rottura (A_{min}) e il risultato finale del quarto ed ultimo gruppo di colonne è l'**Area di progetto** (A_{design}) e il **Momento di Inerzia minimo di progetto** (I_{design}).

1		2		3										4														
L_1	L_2	Area	trave ₁	trave ₂	Q _{trave}	Q _s	Q _p	Q _a	Q _{solai}	Q _{piani}	N	f _{c0,k}	k _{mod}	Y _m	f _{c0d}	A _{min}	E,005	β	I	λ _{max}	P _{min}	b _{min}	b	h _{min}	h	A _{design}	I _{design}	
m	m	m ²	kN/m	kN/m	kN	kN/mq	kN/mq	kN/mq	kN	kN	kN	Mpa			Mpa	cm ²	Mpa		m		cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴
6,00	5,00	30,00	0,36	0,36	5,15	0,60	2,53	2,00	227,25	1	232	21,00	0,80	1,45	11,59	200,6	8800	1,0	3,00	86,54	3,47	12,01	13,00	15,43	13,00	169	2380	
8,00	5,00	40,00	0,36	0,36	6,08	1,50	3,00	2,00	378,00	3	1152	21,00	0,80	1,50	11,20	1028,8	8800	1,0	3,00	88,02	3,41	11,81	15,00	68,59	50,00	750	14063	
7,00	5,00	35,00	0,36	0,36	5,62	1,00	3,00	2,00	308,00	5	1568	21,00	0,80	1,50	11,20	1400,1	8800	1,0	3,50	88,02	3,98	13,78	15,00	93,34	65,00	975	18281	
7,00	6,00	42,00	0,36	0,36	6,08	2,00	2,00	2,00	361,20	5	1836	21,00	0,80	1,50	11,20	1639,7	8800	1,0	4,00	88,02	4,54	15,74	20,00	81,98	60,00	1200	40000	

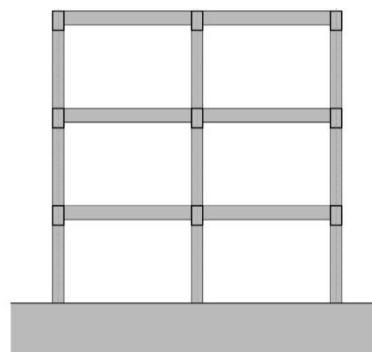
Nel foglio di calcolo relativo al cemento armato, ai precedenti gruppi di colonne che consentono di arrivare ai valori di progetto della sezione, è necessario aggiungere un quinto gruppo, che tiene conto del fatto che il pilastro in cemento armato è soggetto a presso-flessione e non a solo sforzo di compressione.

1		2		3										4										5								
L_2	L_3	Area	trave ₁	trave ₂	Q _{trave}	Q _s	Q _p	Q _a	Q _{solai}	Q _{piani}	N	f _{c0,k}	f _{ctd}	A _{min}	b _{min}	E	β	I	λ*	P _{min}	b _{min}	b	h _{min}	h	A _{design}	I _{design}	I _{max}	W _{max}	q _l	M	σ _{max}	
m	m	m ²	kN/m	kN/m	kN	kN/mq	kN/mq	kN/mq	kN	kN	kN	Mpa	Mpa	cm ²	cm	Mpa		m		cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴	cm ⁴	cm ³	kN/m	kN*m	Mpa
6,00	5,00	30,00	4,50	4,50	64,35	2,50	2,00	2,00	277,50	1	342	40,0	22,7	150,8	12,3	21000	1,00	3,50	95,82	3,66	12,68	30,00	5,03	30,00	900	67500	67500	4500,00	46,25	138,75	34,83	No
8,00	5,00	40,00	4,50	4,50	76,05	2,50	2,00	2,00	400,00	3	1428	40,0	22,7	630,1	25,1	21000	2,00	3,00	95,82	6,27	21,74	30,00	21,00	30,00	900	67500	67500	4500,00	50,00	286,67	75,13	No
7,00	5,00	35,00	4,50	4,50	70,20	2,50	3,00	2,00	376,25	5	2232	40,0	22,7	984,8	31,4	21000	1,00	4,00	95,82	4,18	14,49	30,00	32,83	40,00	1200	90000	160000	8000,00	53,75	219,48	46,04	No

Per iniziare questa esercitazione si deve considerare un edificio generico avente più livelli, la cui struttura è composta da telai piani, ossia da travi che collaborano con i pilastri.

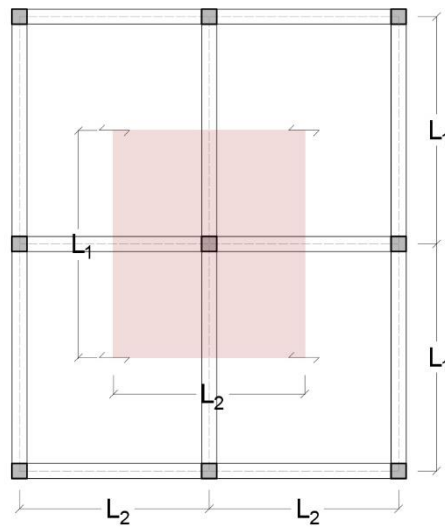


pianta piano tipo



sezione A-A'

Il pilastro più sollecitato sicuramente è uno di quelli al piano terra, poiché su di questi vengono trasmessi tutti i carichi dei piani superiori. Perciò si può individuare il pilastro più sollecitato, ossia quello avente l'area di influenza maggiore, guardando la pianta di carpenteria del piano terra.



pianta del piano terra

Le prime tre colonne della tabella Excel contengono informazioni riguardanti proprio l'area di influenza; nel caso in cui essa risulti di forma rettangolare i dati da inserire sono le due dimensioni che la descrivono: L_1 e L_2 ; e a partire da questi viene calcolata la sua superficie:

$$Area = L_1 \times L_2$$

L_1	L_2	Area	trave _p	trave _s	Q _{trave}	q _s	q _p	q _a	Q _{solaio}	n _{piani}	N	f _{c0,k}	k _{mod}	γ _m	f _{c0d}	A _{min}	E _{c,005}	β	l	λ _{max}	ρ _{min}	D _{min}	b	h _{min}	h	A _{design}	I _{design}
m	m	m ²	kN/m	kN/m	kN	kN/mq	kN/mq	kN/mq	kN		kN	Mpa			Mpa	cm ²	Mpa		m		cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴
6,00	5,00	30,00	0,36	0,36	5,15	0,60	2,53	2,00	227,25	1	232	21,00	0,80	1,45	11,59	200,6	8800	1,0	3,00	86,54	3,47	12,01	13,00	15,43	13,00	169	2380
8,00	5,00	40,00	0,36	0,36	6,08	1,50	3,00	2,00	378,00	3	1152	21,00	0,80	1,50	11,20	1028,8	8800	1,0	3,00	88,02	3,41	11,81	15,00	68,59	50,00	750	14063
7,00	5,00	35,00	0,36	0,36	5,62	1,00	3,00	2,00	308,00	5	1568	21,00	0,80	1,50	11,20	1400,1	8800	1,0	3,50	88,02	3,98	13,78	15,00	93,34	65,00	975	18281
7,00	6,00	42,00	0,36	0,36	6,08	2,00	2,00	2,00	361,20	5	1836	21,00	0,80	1,50	11,20	1639,7	8800	1,0	4,00	88,02	4,54	15,74	20,00	81,98	60,00	1200	40000

Nel secondo gruppo di colonne devono essere inseriti una serie di dati necessari per determinare lo sforzo normale di compressione N , il quale dipende dal carico dovuto al peso proprio delle travi che si poggiano in testa al pilastro, dal carico dovuto al solaio e dal numero di piani dell'edificio analizzato.

Il carico dovuto al peso proprio delle travi gravanti sul pilastro si ricava sommando i contributi di ogni trave, ottenuti moltiplicando il loro peso unitario $\left[\frac{kN}{m}\right]$ per la loro lunghezza contenuta nell'area di influenza del pilastro $[m]$.

$$q_{trave} = \sum_{i=1}^n 1,3 \times trave_i \times L_i$$

dove:

$trave_i$ = peso unitario della trave i-esima

L_i = la lunghezza della trave i-esima all'interno dell'area di influenza

n = il numero delle travi che confluiscono nel nodo

Il carico dovuto al solaio (q_{solaio}) si ricava dalla combinazione allo stato limite ultimo del carico strutturale, di quello permanente e di quello accidentale, il tutto moltiplicato per l'area di influenza.

$$q_{solaio} = (1,3q_s + 1,5q_p + 1,5q_a)Area$$

Dopo aver inserito queste informazioni è possibile calcolare la forza di compressione N , che risulta pari a:

$$N = [q_{trave} + q_{solaio}] \times n_{piani}$$

L ₁	L ₂	Area	trave _p	trave _s	q _{trave}	q _s	q _p	q _a	q _{solaio}	n _{piani}	N	f _{c0,k}	k _{mod}	γ _m	f _{c0d}	A _{min}	E,005	β	l	λ _{max}	ρ _{min}	d _{min}	b	h _{min}	h	A _{design}	I _{design}
m	m	m ²	kN/m	kN/m	kN	kN/mq	kN/mq	kN/mq	kN		kN	Mpa			Mpa	cm ²	Mpa		m		cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴
6,00	5,00	30,00	0,36	0,36	5,15	0,60	2,53	2,00	227,25	1	232	21,00	0,80	1,45	11,59	200,6	8800	1,0	3,00	86,54	3,47	12,01	13,00	15,43	13,00	169	2380
8,00	5,00	40,00	0,36	0,36	6,08	1,50	3,00	2,00	378,00	3	1152	21,00	0,80	1,50	11,20	1028,8	8800	1,0	3,00	88,02	3,41	11,81	15,00	68,59	50,00	750	14063
7,00	5,00	35,00	0,36	0,36	5,62	1,00	3,00	2,00	308,00	5	1568	21,00	0,80	1,50	11,20	1400,1	8800	1,0	3,50	88,02	3,98	13,78	15,00	93,34	65,00	975	18281
7,00	6,00	42,00	0,36	0,36	6,08	2,00	2,00	2,00	361,20	5	1836	21,00	0,80	1,50	11,20	1639,7	8800	1,0	4,00	88,02	4,54	15,74	20,00	81,98	60,00	1200	40000

Una volta ricavata la forza agente sul pilastro, proprio come è stato fatto nelle precedenti esercitazioni, il terzo gruppo di colonne permette di dimensionare la sezione a partire dalla resistenza del materiale, arrivando alla prima incognita del problema: l'Area minima necessaria affinché il materiale non entri in crisi.

L ₁	L ₂	Area	trave _p	trave _s	q _{trave}	q _s	q _p	q _a	q _{solaio}	n _{piani}	N	f _{c0,k}	k _{mod}	γ _m	f _{c0d}	A _{min}	E,005	β	l	λ _{max}	ρ _{min}	d _{min}	b	h _{min}	h	A _{design}	I _{design}
m	m	m ²	kN/m	kN/m	kN	kN/mq	kN/mq	kN/mq	kN		kN	Mpa			Mpa	cm ²	Mpa		m		cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴
6,00	5,00	30,00	0,36	0,36	5,15	0,60	2,53	2,00	227,25	1	232	21,00	0,80	1,45	11,59	200,6	8800	1,0	3,00	86,54	3,47	12,01	13,00	15,43	13,00	169	2380
8,00	5,00	40,00	0,36	0,36	6,08	1,50	3,00	2,00	378,00	3	1152	21,00	0,80	1,50	11,20	1028,8	8800	1,0	3,00	88,02	3,41	11,81	15,00	68,59	50,00	750	14063
7,00	5,00	35,00	0,36	0,36	5,62	1,00	3,00	2,00	308,00	5	1568	21,00	0,80	1,50	11,20	1400,1	8800	1,0	3,50	88,02	3,98	13,78	15,00	93,34	65,00	975	18281
7,00	6,00	42,00	0,36	0,36	6,08	2,00	2,00	2,00	361,20	5	1836	21,00	0,80	1,50	11,20	1639,7	8800	1,0	4,00	88,02	4,54	15,74	20,00	81,98	60,00	1200	40000

Il quarto gruppo di colonne è finalizzato al calcolo del **raggio di inerzia minimo**. Questo parametro risulta fondamentale perché:

nel caso di elementi strutturali in legno o in cemento armato, caratterizzati da sezioni rettangolari piene, permette di ricavare la base minima che deve avere la sezione.

nel caso di elementi in acciaio, che per questa esercitazione immaginiamo con profilo HE, permette di ricavare il momento di inerzia minimo.

L ₁	L ₂	Area	trave _p	trave _s	q _{trave}	q _s	q _p	q _a	q _{solaio}	n _{piani}	N	f _{c0,k}	k _{mod}	γ _m	f _{c0d}	A _{min}	E,005	β	l	λ _{max}	ρ _{min}	d _{min}	b	h _{min}	h	A _{design}	I _{design}
m	m	m ²	kN/m	kN/m	kN	kN/mq	kN/mq	kN/mq	kN		kN	Mpa			Mpa	cm ²	Mpa		m		cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴
6,00	5,00	30,00	0,36	0,36	5,15	0,60	2,53	2,00	227,25	1	232	21,00	0,80	1,45	11,59	200,6	8800	1,0	3,00	86,54	3,47	12,01	13,00	15,43	13,00	169	2380
8,00	5,00	40,00	0,36	0,36	6,08	1,50	3,00	2,00	378,00	3	1152	21,00	0,80	1,50	11,20	1028,8	8800	1,0	3,00	88,02	3,41	11,81	15,00	68,59	50,00	750	14063
7,00	5,00	35,00	0,36	0,36	5,62	1,00	3,00	2,00	308,00	5	1568	21,00	0,80	1,50	11,20	1400,1	8800	1,0	3,50	88,02	3,98	13,78	15,00	93,34	65,00	975	18281
7,00	6,00	42,00	0,36	0,36	6,08	2,00	2,00	2,00	361,20	5	1836	21,00	0,80	1,50	11,20	1639,7	8800	1,0	4,00	88,02	4,54	15,74	20,00	81,98	60,00	1200	40000

I dati da inserire sono: il valore del modulo di elasticità E , il valore di β (che ricordiamo essere legato ai vincoli a cui è soggetto il pilastro analizzato), e l , che in questo caso è l'altezza del pilastro. Tutti questi dati sono necessari per determinare il massimo valore di snellezza (λ_{max}) che può avere l'elemento che stiamo dimensionando e il minimo valore del raggio di inerzia (ρ_{min}), che sono rispettivamente uguali a:

$$\lambda_{max} = \pi \sqrt{\frac{E}{f_{cd}}} \quad e \quad \rho_{min} = \frac{l_0}{\lambda_{max}}$$

L ₁	L ₂	Area	trave _p	trave _s	q _{trave}	q _s	q _p	q _a	q _{solaio}	n _{piani}	N	f _{c0,k}	k _{mod}	γ _m	f _{c0d}	A _{min}	E,005	β	l	λ _{max}	ρ _{min}	d _{min}	b	h _{min}	h	A _{design}	I _{design}
m	m	m ²	kN/m	kN/m	kN	kN/mq	kN/mq	kN/mq	kN		kN	Mpa			Mpa	cm ²	Mpa		m		cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴
6,00	5,00	30,00	0,36	0,36	5,15	0,60	2,53	2,00	227,25	1	232	21,00	0,80	1,45	11,59	200,6	8800	1,0	3,00	86,54	3,47	12,01	13,00	15,43	13,00	169	2380
8,00	5,00	40,00	0,36	0,36	6,08	1,50	3,00	2,00	378,00	3	1152	21,00	0,80	1,50	11,20	1028,8	8800	1,0	3,00	88,02	3,41	11,81	15,00	68,59	50,00	750	14063
7,00	5,00	35,00	0,36	0,36	5,62	1,00	3,00	2,00	308,00	5	1568	21,00	0,80	1,50	11,20	1400,1	8800	1,0	3,50	88,02	3,98	13,78	15,00	93,34	65,00	975	18281
7,00	6,00	42,00	0,36	0,36	6,08	2,00	2,00	2,00	361,20	5	1836	21,00	0,80	1,50	11,20	1639,7	8800	1,0	4,00	88,02	4,54	15,74	20,00	81,98	60,00	1200	40000

Come è stato precedentemente detto, per pilastri in legno o in cemento armato sapendo che:

$$\rho_{min} = \sqrt{\frac{1}{12}} b$$

Si può trovare una delle dimensioni della sezione:

$$b = 2\sqrt{3}\rho_{min}$$

Il valore trovato è un valore minimo e per questo va sovradimensionato nell'atto dell'ingegnerizzazione.

L ₁	L ₂	Area	trave _p	trave _s	q _{trave}	q _s	q _p	q _a	q _{solaio}	n _{piani}	N	f _{c0,k}	k _{mod}	Y _m	f _{c0d}	A _{min}	E,005	β	l	λ _{max}	ρ _{min}	D _{min}	b	h _{min}	h	A _{design}	I _{design}
m	m	m ²	kN/m	kN/m	kN	kN/mq	kN/mq	kN/mq	kN		kN	Mpa			Mpa	cm ²	Mpa		m		cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴
6,00	5,00	30,00	0,36	0,36	5,15	0,60	2,53	2,00	227,25	1	232	21,00	0,80	1,45	11,59	200,6	8800	1,0	3,00	86,54	3,47	12,01	13,00	15,43	13,00	169	2380
8,00	5,00	40,00	0,36	0,36	6,08	1,50	3,00	2,00	378,00	3	1152	21,00	0,80	1,50	11,20	1028,8	8800	1,0	3,00	88,02	3,41	11,81	15,00	68,59	50,00	750	14063
7,00	5,00	35,00	0,36	0,36	5,62	1,00	3,00	2,00	308,00	5	1568	21,00	0,80	1,50	11,20	1400,1	8800	1,0	3,50	88,02	3,98	13,78	15,00	93,34	65,00	975	18281
7,00	6,00	42,00	0,36	0,36	6,08	2,00	2,00	2,00	361,20	5	1836	21,00	0,80	1,50	11,20	1639,7	8800	1,0	4,00	88,02	4,54	15,74	20,00	81,98	60,00	1200	40000

L'altra dimensione della sezione, *h*, si ottiene dividendo l'area, precedentemente trovata dal dimensionamento a resistenza, per *b*:

$$h = \frac{A_{min}}{b}$$

L ₁	L ₂	Area	trave _p	trave _s	q _{trave}	q _s	q _p	q _a	q _{solaio}	n _{piani}	N	f _{c0,k}	k _{mod}	Y _m	f _{c0d}	A _{min}	E,005	β	l	λ _{max}	ρ _{min}	D _{min}	b	h _{min}	h	A _{design}	I _{design}
m	m	m ²	kN/m	kN/m	kN	kN/mq	kN/mq	kN/mq	kN		kN	Mpa			Mpa	cm ²	Mpa		m		cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴
6,00	5,00	30,00	0,36	0,36	5,15	0,60	2,53	2,00	227,25	1	232	21,00	0,80	1,45	11,59	200,6	8800	1,0	3,00	86,54	3,47	12,01	13,00	15,43	13,00	169	2380
8,00	5,00	40,00	0,36	0,36	6,08	1,50	3,00	2,00	378,00	3	1152	21,00	0,80	1,50	11,20	1028,8	8800	1,0	3,00	88,02	3,41	11,81	15,00	68,59	50,00	750	14063
7,00	5,00	35,00	0,36	0,36	5,62	1,00	3,00	2,00	308,00	5	1568	21,00	0,80	1,50	11,20	1400,1	8800	1,0	3,50	88,02	3,98	13,78	15,00	93,34	65,00	975	18281
7,00	6,00	42,00	0,36	0,36	6,08	2,00	2,00	2,00	361,20	5	1836	21,00	0,80	1,50	11,20	1639,7	8800	1,0	4,00	88,02	4,54	15,74	20,00	81,98	60,00	1200	40000

Una volta ingegnerizzato anche la seconda dimensione *h*, che descrive la sezione rettangolare del pilastro in legno o in cemento armato, si ricavano l'Area di Design e il Momento di Inerzia di Design.

L ₁	L ₂	Area	trave _p	trave _s	q _{trave}	q _s	q _p	q _a	q _{solaio}	n _{piani}	N	f _{c0,k}	k _{mod}	Y _m	f _{c0d}	A _{min}	E,005	β	l	λ _{max}	ρ _{min}	D _{min}	b	h _{min}	h	A _{design}	I _{design}
m	m	m ²	kN/m	kN/m	kN	kN/mq	kN/mq	kN/mq	kN		kN	Mpa			Mpa	cm ²	Mpa		m		cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴
6,00	5,00	30,00	0,36	0,36	5,15	0,60	2,53	2,00	227,25	1	232	21,00	0,80	1,45	11,59	200,6	8800	1,0	3,00	86,54	3,47	12,01	13,00	15,43	13,00	169	2380
8,00	5,00	40,00	0,36	0,36	6,08	1,50	3,00	2,00	378,00	3	1152	21,00	0,80	1,50	11,20	1028,8	8800	1,0	3,00	88,02	3,41	11,81	15,00	68,59	50,00	750	14063
7,00	5,00	35,00	0,36	0,36	5,62	1,00	3,00	2,00	308,00	5	1568	21,00	0,80	1,50	11,20	1400,1	8800	1,0	3,50	88,02	3,98	13,78	15,00	93,34	65,00	975	18281
7,00	6,00	42,00	0,36	0,36	6,08	2,00	2,00	2,00	361,20	5	1836	21,00	0,80	1,50	11,20	1639,7	8800	1,0	4,00	88,02	4,54	15,74	20,00	81,98	60,00	1200	40000

Per dimensionare la sezione di un pilastro in acciaio, dopo aver determinato il raggio minimo di inerzia si ricava da questo il momento d'inerzia minimo:

$$I_{min} = A \rho_{min}^2$$

L ₁	L ₂	Area	trave _p	trave _s	q _{trave}	q _s	q _p	q _a	q _{solaio}	n _{piani}	N	f _{yk}	Y _m	f _{yd}	A _{min}	E	β	l	λ*	ρ _{min}	I _{min}	A _{design}	I _{design}	ρ _{min}	λ	profilo
m	m	m ²	kN/m	kN/m	kN	kN/mq	kN/mq	kN/mq	kN		kN	Mpa		Mpa	cm ²	Mpa		m		cm	cm ⁴	cm ²	cm ⁴	cm		
6,00	5,00	30,00	0,36	0,36	5,15	1,50	3,00	2,00	283,50	1	289	275,00	1,05	261,90	11,0	210000	2,00	3,00	88,96	6,74	501	38,8	616	3,98	150,75	HEA160
8,00	5,00	40,00	0,36	0,36	6,08	1,50	3,00	2,00	378,00	3	1152	235,00	1,05	223,81	51,5	210000	1,00	4,00	96,23	4,16	890	53,8	1340	4,98	80,32	HEA200
7,00	5,00	35,00	0,36	0,36	5,62	1,00	3,00	2,00	308,00	5	1568	235,00	1,05	223,81	70,1	210000	1,00	5,00	96,23	5,20	1891	76,8	2770	6,00	83,33	HEA240

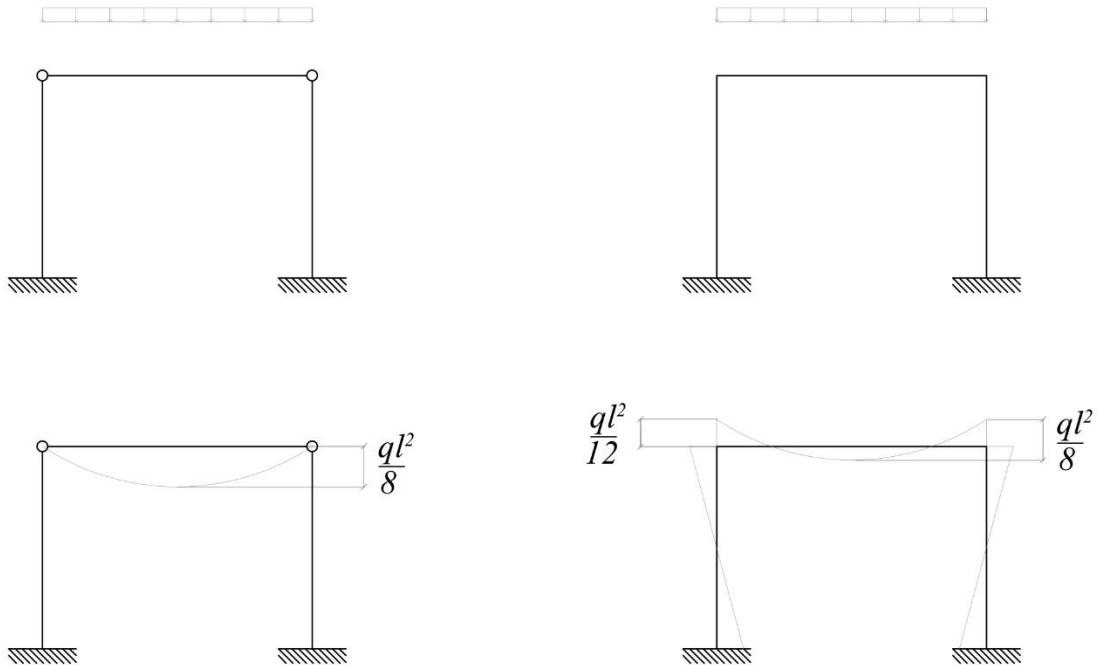
Quest'ultimo valore ci consentirà di scegliere dalle tabelle dei profilati, la sezione avente un valore del momento di inerzia minimo maggiore rispetto a quello ottenuto.

Scegliendo il profilo avremo trovato l'Area di Design e il Momento di Inerzia di Design.

L ₁	L ₂	Area	trave _p	trave _s	q _{trave}	q _s	q _p	q _a	q _{solaio}	n _{piani}	N	f _{yk}	Y _m	f _{yd}	A _{min}	E	β	l	λ*	ρ _{min}	I _{min}	A _{design}	I _{design}	ρ _{min}	λ	profilo
m	m	m ²	kN/m	kN/m	kN	kN/mq	kN/mq	kN/mq	kN		kN	Mpa		Mpa	cm ²	Mpa		m		cm	cm ⁴	cm ²	cm ⁴	cm		
6,00	5,00	30,00	0,36	0,36	5,15	1,50	3,00	2,00	283,50	1	289	275,00	1,05	261,90	11,0	210000	2,00	3,00	88,96	6,74	501	38,8	616	3,98	150,75	HEA160
8,00	5,00	40,00	0,36	0,36	6,08	1,50	3,00	2,00	378,00	3	1152	235,00	1,05	223,81	51,5	210000	1,00	4,00	96,23	4,16	890	53,8	1340	4,98	80,32	HEA200
7,00	5,00	35,00	0,36	0,36	5,62	1,00	3,00	2,00	308,00	5	1568	235,00	1,05	223,81	70,1	210000	1,00	5,00	96,23	5,20	1891	76,8	2770	6,00	83,33	HEA240

Come è stato detto precedentemente, il foglio di calcolo del cemento armato presenta un gruppo di colonne in più rispetto ai fogli di calcolo del legno e dell'acciaio. Infatti è necessaria un'ulteriore verifica della sezione poiché nel cemento armato il nodo tra trave e pilastro, essendo realizzato con

un incastro, trasmette momento, sottoponendo il pilastro a presso-flessione. Infatti guardando la figura sottostante, si può vedere come nel telaio sulla sinistra il pilastro non è influenzato dal momento agente sulla trave, essendo caratterizzato da un nodo cerniera tra pilastro e trave. Ciò non accade nel telaio sulla destra in cui il momento agente sulla trave viene trasmesso ai pilastri; il valore del momento che si trova in testa al pilastro corrisponde al valore del momento agente sull'estremo della trave.



Per verificare il pilastro a presso-flessione si deve imporre che la tensione massima sia minore della resistenza di progetto:

$$\sigma_{max} \leq f_{cd}$$

La tensione massima può essere calcolata in funzione delle due sollecitazioni agenti sul pilastro: lo sforzo normale di compressione N e il momento M_t , trasmesso dalla trave al pilastro:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_t}{W_{max}}$$

Mentre il valore dello sforzo normale è stato precedentemente calcolato, il valore del momento in testa al pilastro, poiché è equivalente al valore del momento nell'estremo della trave, ai fini di quest'esercitazione viene calcolato come:

$$M_t = \frac{q_t L_p^2}{12}$$

ove q_t rappresenta il carico distribuito sulla trave principale e per questo è uguale alla combinazione allo SLU dei carichi strutturali, permanenti e accidentali moltiplicati per l'interasse delle travi principali, che corrisponde a L_s :

$$q_t = (1,3 \times q_s + 1,5 \times q_p + 1,5 \times q_a)L_s$$

L_p m	L_s m	Area m ²	trave ₁ kN/m	trave ₂ kN/m	q_{trave} kN	q_s kN/mq	q_p kN/mq	q_a kN/mq	q_{totale} kN	n_{piani}	N kN	f_{ck} Mpa	f_{cd} Mpa	A_{min} cm ²	b_{min} cm	E Mpa	β	i m	λ^*	ρ_{min} cm	b_{min} cm	b cm	h_{min} cm	h cm	A_{design} cm ²	I_{design} cm ⁴	I_{max} cm ⁴	W_{max} cm ³	q_t kN/m	M_t kN*m	σ_{max} Mpa	
6,00	5,00	30,00	4,50	4,50	64,35	2,50	2,00	2,00	277,50	1	342	40,0	22,7	150,8	12,3	21000	1,00	3,50	95,62	3,66	12,68	30,00	5,03	30,00	900	67500	67500	4500,00	46,25	138,75	34,63	No
8,00	5,00	40,00	4,50	4,50	76,05	2,50	2,50	2,00	400,00	3	1428	40,0	22,7	630,1	25,1	21000	2,00	3,00	95,62	6,27	21,74	30,00	21,00	30,00	900	67500	67500	4500,00	50,00	266,67	75,13	No
7,00	5,00	35,00	4,50	4,50	70,20	2,50	3,00	2,00	376,25	5	2232	40,0	22,7	984,8	31,4	21000	1,00	4,00	95,62	4,18	14,49	30,00	32,83	40,00	1200	90000	160000	8000,00	53,75	219,48	46,04	No

Ultimo dato necessario per arrivare alla tensione massima è il modulo di resistenza a flessione W_{max} , che per sezioni rettangolari, ricordiamo essere uguale a:

$$W_{max} = \frac{bh^2}{6}$$

L _p	L _s	Area	trave ₁	trave ₂	q _{ave}	q _s	q _p	q _s	q _{soio}	n _{pani}	N	f _{ck}	f _{cd}	A _{min}	b _{min}	E	β	I	λ*	ρ _{min}	b _{min}	b	h _{min}	h	A _{sezi}	I _{sezi}	I _{max}	W _{max}	q _t	M _t	σ _{max}	
m	m	m ²	kN/m	kN/m	kN	kN/mq	kN/mq	kN/mq	kN		kN	Mpa	Mpa	cm ²	cm	Mpa		m		cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴	cm ⁴	cm ³	kN/m	kN*m	Mpa	
6,00	5,00	30,00	4,50	4,50	64,35	2,50	2,00	2,00	277,50	1	342	40,0	22,7	150,8	12,3	21000	1,00	3,50	95,62	3,66	12,68	30,00	5,03	30,00	900	67500	67500	4500,00	46,25	138,75	34,63	No
8,00	5,00	40,00	4,50	4,50	76,05	2,50	2,50	2,00	400,00	3	1428	40,0	22,7	630,1	25,1	21000	2,00	3,00	95,62	6,27	21,74	30,00	21,00	30,00	900	67500	67500	4500,00	50,00	266,67	75,13	No
7,00	5,00	35,00	4,50	4,50	70,20	2,50	3,00	2,00	376,25	5	2232	40,0	22,7	984,8	31,4	21000	1,00	4,00	95,62	4,18	14,49	30,00	32,83	40,00	1200	90000	160000	8000,00	53,75	219,48	46,04	No

Ora è possibile verificare la sezione a presso-flessione imponendo:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_t}{W_{max}} \leq f_{cd}$$

L _p	L _s	Area	trave ₁	trave ₂	q _{ave}	q _s	q _p	q _s	q _{soio}	n _{pani}	N	f _{ck}	f _{cd}	A _{min}	b _{min}	E	β	I	λ*	ρ _{min}	b _{min}	b	h _{min}	h	A _{sezi}	I _{sezi}	I _{max}	W _{max}	q _t	M _t	σ _{max}	
m	m	m ²	kN/m	kN/m	kN	kN/mq	kN/mq	kN/mq	kN		kN	Mpa	Mpa	cm ²	cm	Mpa		m		cm	cm	cm	cm	cm	cm ²	cm ⁴	cm ⁴	cm ³	kN/m	kN*m	Mpa	
6,00	5,00	30,00	4,50	4,50	64,35	2,50	2,00	2,00	277,50	1	342	40,0	22,7	150,8	12,3	21000	1,00	3,50	95,62	3,66	12,68	30,00	5,03	30,00	900	67500	67500	4500,00	46,25	138,75	34,63	No
8,00	5,00	40,00	4,50	4,50	76,05	2,50	2,50	2,00	400,00	3	1428	40,0	22,7	630,1	25,1	21000	2,00	3,00	95,62	6,27	21,74	30,00	21,00	30,00	900	67500	67500	4500,00	50,00	266,67	75,13	No
7,00	5,00	35,00	4,50	4,50	70,20	2,50	3,00	2,00	376,25	5	2232	40,0	22,7	984,8	31,4	21000	1,00	4,00	95,62	4,18	14,49	30,00	32,83	40,00	1200	90000	160000	8000,00	53,75	219,48	46,04	No