Appunti di lezione del corso di Progettazione strutturale B
redatti da Fabiana Riparbelli

1) LA RESISTENZA E LA TENSIONE

La determinazione delle azioni di contatto (N, T ed M) è finalizzata alla verifica o al progetto della resistenza strutturale. Verifica e progetto della resistenza strutturale sono due facce della stessa medaglia:

- **verificare la resistenza** presuppone che la struttura sia assegnata (ovvero che ne siano definiti geometria e materiale) e che sia definita la sua funzione (ossia i carichi agenti su di essa) ed impone di controllare che la geometria assegnata realizzata dal materiale assegnato resista ai carichi implicati dalla funzione definita. La verifica a resistenza può avere esito positivo o negativo.
- **progettare a resistenza** significa invece, assegnata una funzione, imporre che la struttura resista ai carichi implicati dalla funzione medesima, e scegliere il materiale e/o la geometria affinché quella resistenza sia garantita.

Come si quantifica la resistenza strutturale?

Un modo per quantificare la resistenza è misurare la tensione massima nel materiale. Questo obiettivo ci impone di (ri)confrontarci con due nuovi concetti, ossia la "tensione" ed il "materiale"

La tensione viene definita all'interno di modelli tridimensionali.

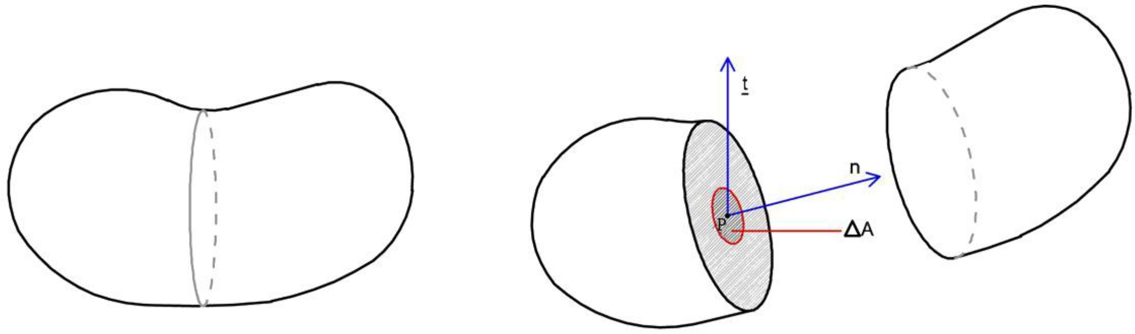

FIG.01

Osserviamo la FIG.01; immaginiamo di dividere il corpo in due parti tagliandolo in maniera virtuale tramite intersezione con una superficie. Immaginiamo ancora di ricostruire l'unità rimettendo a contatto le superfici di separazione: tra le due parti del corpo messe a contatto tramite la superficie di taglio si esercitano delle forze. Queste forze sono interne al corpo, agiscono per effetto del contatto e sono distribuite su tutta la superficie individuata dal taglio virtuale. La forza interna che nasce da questo processo mentale è quindi una forza di contatto distribuita su di una superficie (una densità superficiale di forza) e prende il nome di **tensione di Cauchy**. La tensione di Cauchy dipende dal punto interno **P** e dalla superficie generata dal taglio ed individuata dalla sua perpendicolare **n** nel punto **P**, ed è definita come limite del rapporto tra la forza agente e l'area della superficie su cui agisce, quando la superficie tende a zero intorno al punto in esame:

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{f_c}{\Delta A} = t(P, n) \tag{1}$$

$$[t] = \frac{[f_c]}{[\Delta A]} = \frac{[F]}{[L]^2} \tag{2}$$

Il concetto di tensione ci consente di affrancarci dalla geometria della struttura, concentrarci soltanto sul materiale. Una volta calcolata la tensione in un punto non avrà più importanza quale sia la geometria strutturale, né quali siano le condizioni di carico o di vincolo esterni che l'hanno generata. Da quel momento in poi, bisognerà solo controllare se quella data tensione può essere sostenuta da un dato materiale, senza che questo implichi la **crisi** del materiale.

Abbiamo definito la tensione con un processo di limite rispetto all'area, per cui:

$$t(P,n) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{f_c}{\Delta A} = \frac{df_c}{dA} \tag{3}$$

Questo equivale a dire:

$$df_c = t(P,n)\ dA \tag{4}$$

ovvero che la forza di contatto $\boldsymbol{df_c}$ agente sull'area infinitesima $\boldsymbol{dA}$ di normale **n** è il prodotto della tensione $\boldsymbol{t(P,n)}$ per l'area $\boldsymbol{dA}$, ma vuole anche dire che se l'area infinitesima va a zero, anche la forza di contatto va a zero. Questo significa che per avere una forza di contatto devo avere un'area, anche piccolissima, purché diversa da zero. Lo stesso concetto si esprime anche dicendo che la tensione è una densità superficiale di forza. Quindi andrebbe rappresentata come si rappresentano le densità, ossia come nella figura che segue:

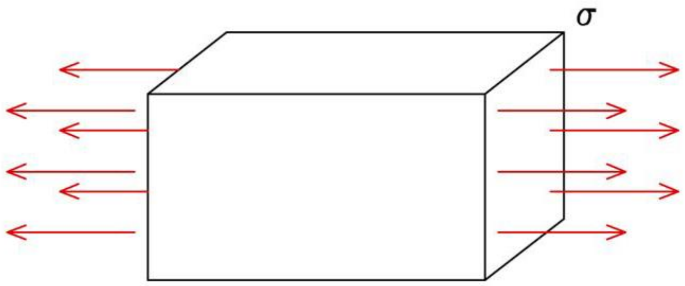

FIG.02

Un'altra cosa da ricordare è che la tensione, pur essendo la generalizzazione del concetto di pressione, non è necessariamente "normale" ("perpendicolare") alla superficie su cui agisce, ma generalmente ha una componente normale ed una tangenziale alla superficie nel punto **P**.

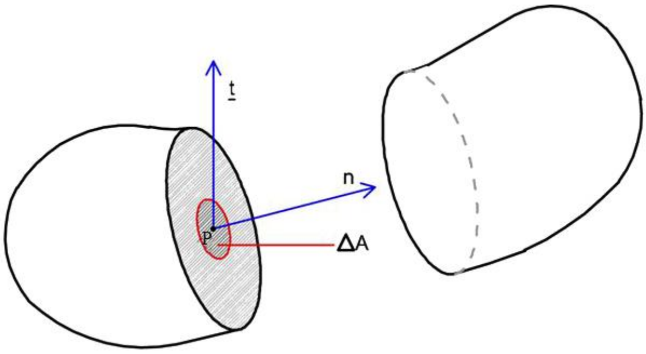

FIG.03

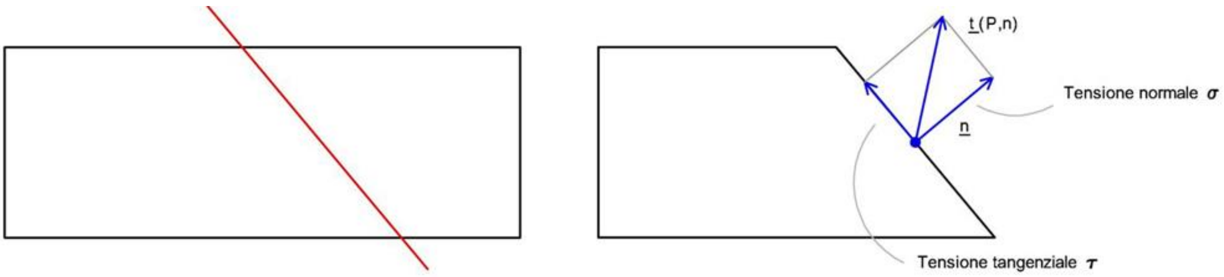

FIG.04

2) IL MODELLO DI TRAVE A FIBRE

Nella fase di progetto o di verifica di una struttura si può utilizzare il concetto di **tensione ammissibile**, che produce il **metodo delle tensioni ammissibili**, metodo ancora oggi in uso. Il metodo delle tensioni ammissibili, utilizzato strumento di verifica o di progetto di una struttura, si basa sul concetto di tensione; la verifica alle tensioni ammissibili consiste nel controllare che la **tensione massima nella struttura non superi la tensione**

ammissibile, mentre il progetto con il metodo delle tensioni ammissibili è il dimensionamento della struttura di modo che **la sua tensione massima sia proprio uguale alla tensione d**.

In entrambi i casi, l'obbiettivo è **individuare il punto della struttura in cui la tensione è massima**.

A questo punto dobbiamo creare un collegamento concettuale tra l'azione di contatto su di una trave (sforzo normale per le travature reticolari, **N**,**T**, ed **M** per le travi piane, etc) e la tensione nel materiale di cui la trave è composta. Questo collegamento concettuale implica lo sforzo di mettere in collegamento due modelli di trave, l'uno monodimensionale l'altro tridimensionale. Questo passaggio concettuale implica quindi un **cambio di modello fisico matematico**. L'azione di contatto, difatti, vive in modelli mono o bidimensionali, mentre la tensione è un concetto che vive nella tridimensionalità. Questo significa che la trave di **Bernoulli**, modello fisico matematico meccanico per le azioni di contatto, non è sufficientemente ricco per consentirci di parlare di tensione: **per parlare di tensione ci vuole un modello 3D della trave**.

Il primo modello 3D della trave fu il modello di **trave a fibre** (Galileo Galilei). Questo modello ipotizza la trave come una giustapposizione di fibre (ognuna lunga come la trave) che alla fine occupano un volume. **Ognuna di queste fibre può solo allungarsi o accorciarsi** grazie al fatto che tutti i punti, che prima della deformazione appartenevano ad una sezione (ideale) piana, anche a deformazione avvenuta stanno su di un unico piano (ipotesi di sezioni piane). **Il legame tensione - deformazione è elastico lineare**

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E\varepsilon} \tag{5}$$

ed ha come coefficiente di proporzionalità tra tensione $\boldsymbol{\sigma}$ e deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ il modulo elastico normale **E** del materiale.

Nel modello di trave a fibre non ho effetto Poisson, ossia per effetto di un allungamento delle fibre non ho contrazione laterale, e, viceversa, per effetto di un accorciamento delle fibre no ho dilatazione laterale.

Partendo da questo modello utilizziamo questo metodo: ipotizziamo una deformata e ci chiediamo quale sia lo stato tensionale che la determina.

Partiamo dall'esempio in figura, che individuerà la risposta della trave nel caso di **sforzo normale centrato N.**

FIG.05

Partiamo da un'ipotesi di deformata plausibile, immaginando che tutte le fibre della trave per effetto di uno sforzo normale centrato si allunghino di una quantità costante (Δl), ripartita equamente alle due estremità della fibra. Questo vuol dire che ogni fibra ha una deformazione (in questo caso allungamento percentuale) che vale:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\Delta l}}{\boldsymbol{l}} \tag{6}$$

Dall'applicazione del legame elastico, a questa deformazione corrisponde una tensione pari all'eq. (5), che è uguale in ogni punto della sezione trasversale (concetto introdotto qui di soppiatto e lasciato all'intuito dei singoli). La condizione dell'ipotetica sezione trasversale è illustrata in FIG.06:

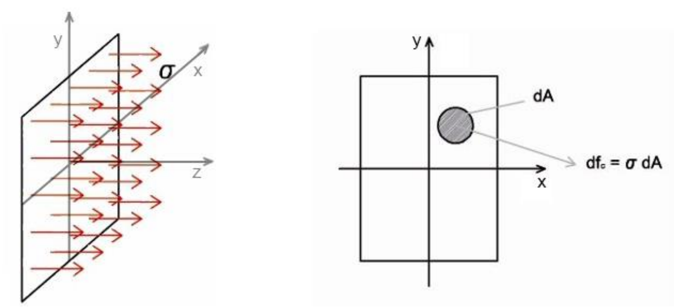

FIG.06

La risultante delle tensioni sull'area della sezione è pari a:

$$R = \int_A \sigma dA \; = \sigma \int_A \; dA \; = \sigma A \; = E\varepsilon A \; = E\frac{\Delta l}{l}A \tag{7}$$

mentre i momenti risultanti delle tensioni rispetto agli assi baricentrici saranno pari a:

$$M_y = \int_A \; \sigma x \, dA = \sigma \int_A \; x \, dA = 0 \tag{8}$$

$$M_x = \int_A \; \sigma y \, dA = \sigma \int_A \; y \, dA = 0 \tag{9}$$

Se indichiamo con **N** questa risultante R, allora avremo che:

$$\boldsymbol{N = \sigma A} \tag{10}$$

Dalla (10) possiamo ricavare $\boldsymbol{\sigma}$, che sarà:

$$\boldsymbol{\sigma = \frac{N}{A}} \tag{11}$$

Ma sappiamo che per la (5) $\boldsymbol{\sigma}$ è anche uguale a:

$$\boldsymbol{\sigma \; = \; E\varepsilon} \tag{5}$$

Per cui ricavando $\boldsymbol{\varepsilon}$ dalla formula inversa ed andando a sostituire la (11), posso scrivere:

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}} \tag{12}$$

Da cui infine dalla formula inversa della (6) ricaviamo:

$$\Delta \boldsymbol{l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EA}} \tag{13}$$

Quindi, sulle basi esterne, se ho una distribuzione di tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ costante lungo tutta la trave ed equivalente (nel senso dell'asse centrale) ad una forza **N** applicata al baricentro della sezione, avrò che le $\boldsymbol{\sigma}$ sono pari dappertutto, $\boldsymbol{\varepsilon}$ pari dappertutto (con $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{E}}$), e un valore ($\Delta\boldsymbol{l}$) pari a:

$$\Delta \boldsymbol{l} = \boldsymbol{\frac{Nl}{EA}}$$

Qualche secolo dopo Galileo fu poi dimostrato che, qualora vi fosse una distribuzione di tensioni diversa, ma equivalente, a quella indicata, il risultato rimarrebbe invariato dappertutto, a meno di due regioni di disturbo poste alle due estremità (Saint Venant).

3) FLESSIONE

Prendiamo in analisi il modello di trave in FIG.07.

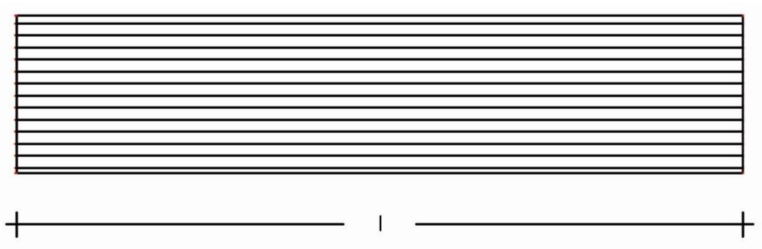

FIG.07

Ipotizziamo una nuova deformata e ci chiediamo quale sia lo stato tensionale che la individua:

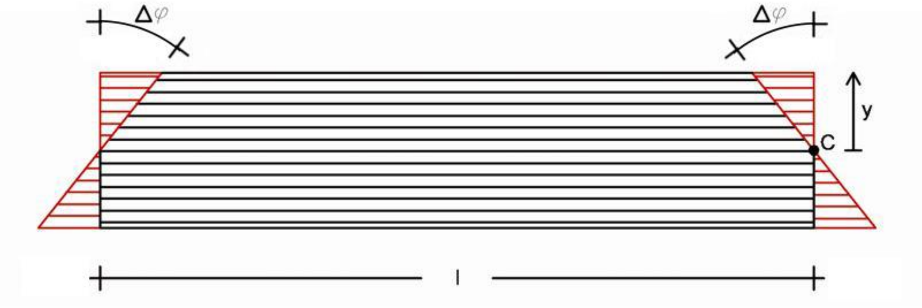

FIG.08

Anche nella FIG.08 l'allungamento della fibra è la deformazione principale. Questo allungamento è differenziale, in funzione della distanza (y) della fibra dal centro della sezione:

$$\Delta \boldsymbol{l}\,(\boldsymbol{y}) = \mathbf{2}\,\Delta\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{y} \tag{14}$$

Quindi la fibra a distanza (y) si deformerà della seguente deformazione e svilupperà la seguente tensione:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{y}) = \frac{\Delta \boldsymbol{l}\,(\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{l}} = \frac{\mathbf{2}\,\Delta\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{l}} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{E}\,\mathbf{2}\,\Delta\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{l}} \tag{16}$$

Posso riscrivere l'espressione (5) della tensione, distinguendo i diversi fattori, nel modo seguente:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{E}\,\frac{\mathbf{2}\,\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{l}}\,\boldsymbol{y} \tag{17}$$

A questo punto è necessario richiamare il concetto di curvatura di una linea curva; guardiamo la FIG.09:

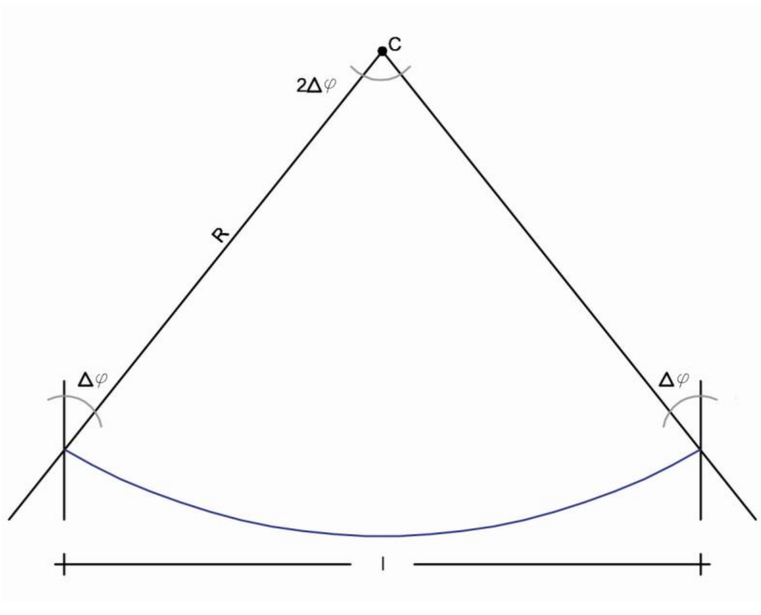

FIG.09

Ricordiamo che la lunghezza di un arco di circonferenza è uguale al prodotto del raggio (R) per il relativo angolo al centro espresso in radianti. Nel caso in FIG.09; posso utilizzare questo procedimento per calcolare la curvatura χ, sapendo che il legame tra raggio e curvature è il seguente:

$$\boldsymbol{\chi} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R}} \tag{18}$$

Allora avrò:

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\chi} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\Delta\varphi}}{\boldsymbol{l}} \tag{19}$$

da cui, tenendo conto dell'eq. (17), otterrò:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{\chi}\,\boldsymbol{y} \tag{20}$$

Possiamo ora andare a calcolare la risultante delle tensioni (R), ed il momento risultante delle tensioni medesime (Mx). Avrò:

$$R = \int_A \sigma dA = \int_A \boldsymbol{E}\frac{\mathbf{2}\,\boldsymbol{\Delta\varphi}}{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{y}\, dA = \boldsymbol{E}\frac{\mathbf{2}\,\boldsymbol{\Delta\varphi}}{\boldsymbol{l}}\int_A \boldsymbol{y}\, dA = 0 \tag{21}$$

Ce lo aspettavamo che R risultasse di valore nullo, essendo la trave semplicemente inflessa; e per lo stesso motivo dobbiamo aspettarci un valore non nullo del momento flettente equivalente allo stato tensionale. Si avrà difatti:

$$M_y = \int_A \sigma x\, dA = \int_A \boldsymbol{E}\frac{\mathbf{2}\,\boldsymbol{\Delta\varphi}}{\boldsymbol{l}} y\, x\, dA = \boldsymbol{E}\frac{\mathbf{2}\,\boldsymbol{\Delta\varphi}}{\boldsymbol{l}}\int_A y\, x\, dA = 0 \tag{22}$$

$$M_x = \int_A \sigma y\, dA = \int_A \boldsymbol{E}\frac{\mathbf{2}\,\boldsymbol{\Delta\varphi}}{\boldsymbol{l}} y^2\, dA = \boldsymbol{E}\frac{\mathbf{2}\,\boldsymbol{\Delta\varphi}}{\boldsymbol{l}}\int_A y^2\, dA = \boldsymbol{E}\frac{\mathbf{2}\,\boldsymbol{\Delta\varphi}}{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{I_x} \tag{23}$$

Quindi dalla (23) si ricava che:

$$\frac{M_x}{\boldsymbol{I_x}} = \boldsymbol{E}\frac{\mathbf{2}\,\boldsymbol{\Delta\varphi}}{\boldsymbol{l}} \tag{24}$$

E andando a sostituire il valore della curvatura nell'eq. (24), otterremo:

$$\boldsymbol{\chi} = \frac{M_x}{\boldsymbol{EI_x}} \tag{25}$$

Da qui si ricava la formula di Navier:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{M_x}{\boldsymbol{I_x}} y \tag{26}$$