

Vettori e versori

Un vettore \underline{v} è un segmento orientato che è descritto da un modulo, da una direzione e da un verso. Inoltre i vettori possono essere liberi oppure applicati, nel primo caso non conosciamo il punto di applicazione, mentre nel secondo sì.

Un vettore applicato si rappresenta come segue:

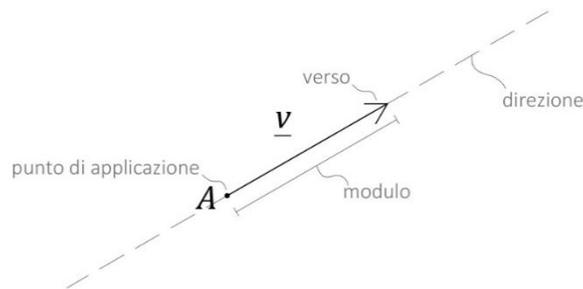


Fig. 01

il modulo è la lunghezza del vettore
la direzione indica la retta su cui giace il vettore
il verso indica l'orientamento del vettore sulla sua retta d'azione
 A è il punto d'applicazione del vettore

Un vettore \underline{v} può essere descritto attraverso il versore \underline{e} , ossia un vettore di modulo unitario, il cui ruolo è quello di indicare la direzione del vettore. Quindi:

$$\underline{v} = \alpha \cdot \underline{e} \quad (1)$$

con α che rappresenta il fattore di proporzionalità tra \underline{v} e \underline{e}

Nel caso in cui α è positivo, il vettore ed il versore hanno lo stesso verso, mentre nel caso contrario, hanno verso opposto.

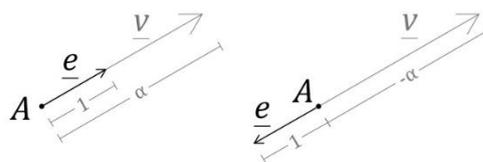


Fig. 02

In un sistema di riferimento tridimensionale esistono tre versori: \underline{i} , \underline{j} e \underline{k} , associati agli assi cartesiani, che formano una base vettoriale. Ogni vettore, inquadrato nel sistema di riferimento, può essere espresso come somma vettoriale dei versori della base.

$$\underline{v} = x_i \cdot \underline{i} + y_i \cdot \underline{j} + z_i \cdot \underline{k} \quad (2)$$

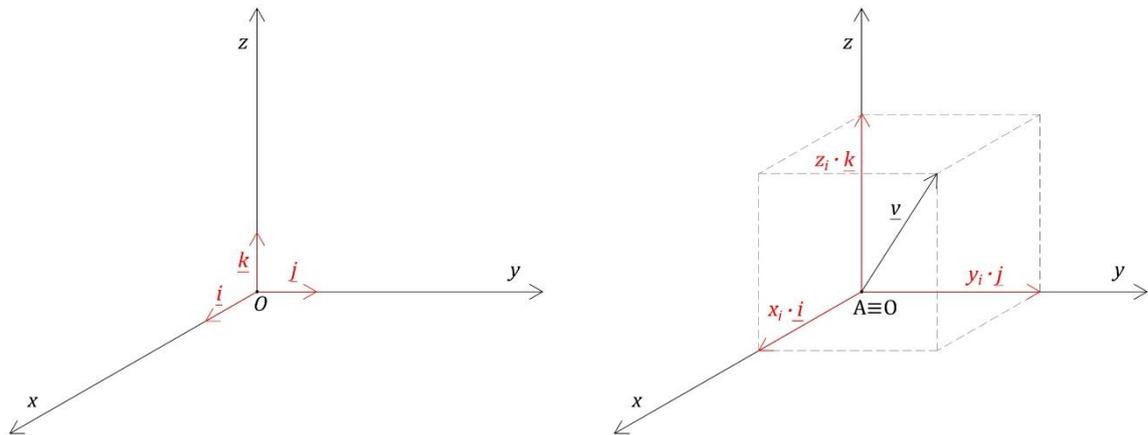


Fig. 03

Sistema di vettori paralleli

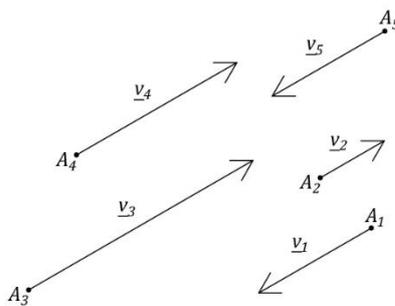


Fig. 04

Quello rappresentato in **Fig. 04** è un sistema di vettori applicati, paralleli tra loro e descritto come:

$$\{(\alpha_i \cdot \underline{e}; A_i), i = 1 \dots n\}$$

con:

α_i che è un numero appartenente all'insieme dei reali \mathbb{R}

A_i che è un punto appartenente allo spazio euclideo E

Dato un sistema di vettori applicati paralleli tra loro è possibile calcolare la risultante \underline{R} ed il momento risultante rispetto ad un generico punto P, M_P .

Risultante

Il vettore risultante corrisponde alla somma di tutti i vettori appartenenti al sistema e si calcola come:

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \underline{e} \quad (3)$$

Dato che i vettori sono tutti paralleli tra loro, sono tutti descritti dallo stesso versore \underline{e} . Poiché \underline{e} non è indicizzato può essere portato fuori dalla sommatoria, perciò:

$$\underline{R} = \underline{e} \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (4)$$

Momento risultante

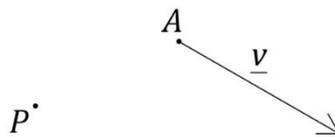


Fig. 05

Si ricorda che dato un vettore \underline{v} ed un generico punto P, si definisce momento di un vettore, il prodotto vettoriale tra il vettore e la sua distanza dal punto di riferimento.

$$\underline{M}_P = (A - P) \times \underline{v} \quad (5)$$

Il risultato di un prodotto vettoriale è un vettore con:
modulo pari all'area del parallelogramma che ha per dimensioni i due vettori di partenza
direzione perpendicolare al piano a cui appartengono i vettori
verso definito dalla regola della mano destra come in *Fig. 06*

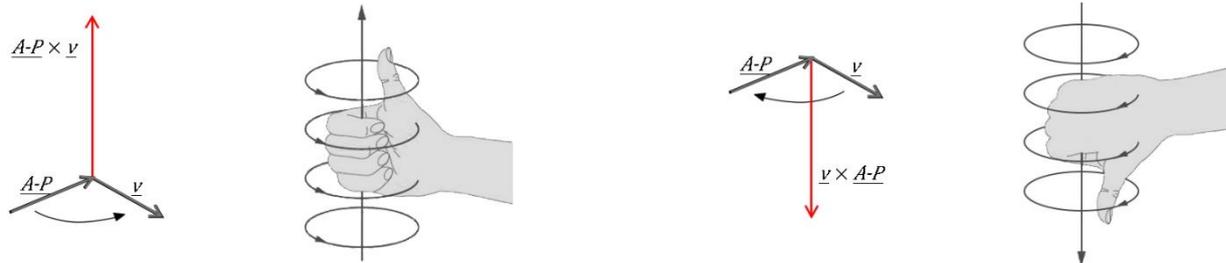
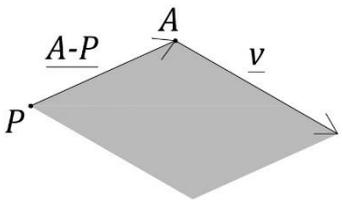
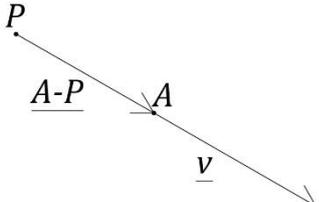


Fig. 06

Da un punto di vista geometrico è importante capire la reciproca posizione tra i due vettori, poiché da questa dipende il valore del modulo del momento:

se non sono paralleli		$\ \underline{M}_P\ = \text{area del parallelogramma}$
se sono paralleli		$\ \underline{M}_P\ = 0$

Se si scompone il vettore differenza ($\underline{A-P}$) in due componenti, una parallela ed una perpendicolare al vettore \underline{v} , si ottiene:

$$(\underline{A-P}) = (\underline{A-P'}) + (\underline{P'-P}) \quad (6)$$

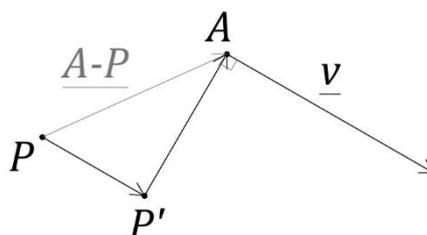


Fig. 07

Quindi:

$$\underline{M}_P = (A - P) \times \underline{v} = [(\underline{A - P'}) + (\underline{P' - P})] \times \underline{v} \quad (7)$$

$$\underline{M}_P = (\underline{A - P'}) \times \underline{v} + (\underline{P' - P}) \times \underline{v} \quad (8)$$

Si determinare il momento di un vettore come la somma di due prodotti vettoriali, di cui il secondo apporta un contributo nullo, poiché i vettori sono paralleli tra loro, quindi da un punto di vista geometrico non chiudono nessun parallelogramma. Pertanto:

$$\underline{M}_P = (\underline{A - P}) \times \underline{v} \equiv (\underline{A - P'}) \times \underline{v} \quad (9)$$

con $(\underline{A - P'})$ che rappresenta il braccio efficace del vettore \underline{v} rispetto al polo P

Quindi considerando l'intero sistema di vettori applicati paralleli, il momento risultante rispetto ad un generico punto P è la somma dei momenti di tutti vettori rispetto a quel punto.

$$\underline{M}_P = \sum_{i=1}^n (A_i - P') \times \underline{v}_i \quad (10)$$

Centro del sistema di vettori paralleli

Dato un sistema di vettori applicati paralleli, il centro C è il punto rispetto al quale il momento risultante è nullo, ossia:

$$\underline{M}_C = 0 \quad (11)$$

Sono noti i punti di applicazione dei vettori (A_i) ed il punto P , mentre il punto C è l'incognita del problema; per la proprietà triangolare la relazione tra questi elementi è la seguente:

$$(\underline{A_i - P}) = (\underline{A_i - C}) + (\underline{C - P}) \quad (12)$$

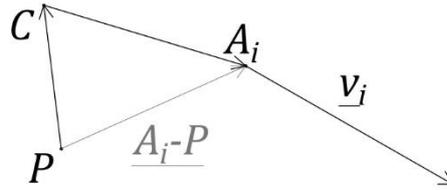


Fig. 08

Sostituendo la (12) nella (10) possiamo calcolare il momento risultante del sistema come:

$$\underline{M}_P = \sum_{i=1}^n [(\underline{A}_i - \underline{C}) + (\underline{C} - \underline{P})] \times \underline{v}_i \quad (13)$$

$$\underline{M}_P = \sum_{i=1}^n (\underline{A}_i - \underline{C}) \times \underline{v}_i + \sum_{i=1}^n (\underline{C} - \underline{P}) \times \underline{v}_i \quad (14)$$

Il contributo dato dal primo prodotto vettoriale nella (14) è pari al momento risultante rispetto al centro.

$$\underline{M}_C = \sum_{i=1}^n (\underline{A}_i - \underline{C}) \times \underline{v}_i \quad (15)$$

Quindi la (14) diventa:

$$\underline{M}_P = \underline{M}_C + \sum_{i=1}^n (\underline{C} - \underline{P}) \times \underline{v}_i \quad (16)$$

Poiché il vettore differenza $\underline{C} - \underline{P}$ non è funzione dell'indice i , può essere portato fuori dalla sommatoria.

$$\underline{M}_P = \underline{M}_C + (\underline{C} - \underline{P}) \times \sum_{i=1}^n \underline{v}_i \quad (17)$$

Per la (3) si effettua un'ultima sostituzione, per arrivare alla *legge di variazione del momento risultante al variare del polo*, espressa da:

$$\underline{M}_P = \underline{M}_C + \underline{R} \times (\underline{P} - \underline{C}) \quad (18)$$

N.B. Nel prodotto vettoriale $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$; quindi $(\underline{C} - \underline{P}) \times \underline{R} = -\underline{R} \times (\underline{C} - \underline{P}) = \underline{R} \times (\underline{P} - \underline{C})$

Ora è possibile determinare C, attraverso una dimostrazione costruttiva, imponendo il momento risultante rispetto a C uguale a 0.

Ponendo:

$$\underline{M}_C = 0 \quad (19)$$

dalla (18) si ottiene:

$$\underline{M}_P = \underline{R} \times (\underline{P} - \underline{C}) \quad (20)$$

Sostituendo la (10) e la (3), rispettivamente al primo ed al secondo membro della (20), si ha:

$$\sum_{i=1}^n (\underline{A}_i - \underline{P}) \times (\alpha_i \cdot \underline{e}) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \underline{e} \right) \times (\underline{P} - \underline{C}) \quad (21)$$

Si può isolare il versore \underline{e} poiché esso è comune a tutti i vettori, quindi non dipende dall'indice i .

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (\underline{A}_i - \underline{P}) \times \underline{e} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) (\underline{C} - \underline{P}) \times \underline{e} \quad (22)$$

Poiché il versore \underline{e} compare in entrambi i membri, può essere semplificato.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (\underline{A}_i - \underline{P}) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) (\underline{C} - \underline{P}) \quad (23)$$

Isoliamo il vettore differenza $\underline{C} - \underline{P}$:

$$(\underline{C} - \underline{P}) = \frac{\sum_{i=1}^n (\underline{A}_i - \underline{P}) \cdot \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \quad (24)$$

Nel caso in cui $P \equiv O$, origine degli assi, i due vettori differenza $\underline{C - P}$ e $\underline{A_i - P}$, avranno rispettivamente le seguenti rappresentazioni rispetto alla base dei vettori:

$$(\underline{C - P}) = x_c \underline{i} + y_c \underline{j} + z_c \underline{k} \quad (25)$$

$$(\underline{A_i - P}) = x_i \underline{i} + y_i \underline{j} + z_i \underline{k} \quad (26)$$

in cui le componenti del vettore coincidono con le coordinate del punto di arrivo del vettore differenza. Sono cioè vettori posizione.

Si ricorda che le uniche incognite sono rappresentate dalle coordinate del centro.

Di conseguenza sostituendo la (25) e la (26) nella (24) si ottengono le coordinate nello spazio del centro C del sistema di vettori paralleli.

$$C = \begin{cases} x_c = \frac{\sum x_i \cdot \alpha_i}{\sum \alpha_i} \\ y_c = \frac{\sum y_i \cdot \alpha_i}{\sum \alpha_i} \\ z_c = \frac{\sum z_i \cdot \alpha_i}{\sum \alpha_i} \end{cases} \quad (27)$$

Le coordinate di C non dipendono dalla direzione comune dei vettori \underline{e} , ma solo dai punti di applicazione dei vettori (coordinate dei punti A_i) e dalla loro intensità.

Applicazione del concetto di centro

Finora si è parlato di sistemi di vettori paralleli tra loro, al quale non era associato un significato fisico specifico. Ora applicheremo questo concetto della teoria dei vettori a diversi ambiti fisici: centro dei sistemi di forze parallele; centro dei pesi, centro di massa, centro delle aree, centro delle rigidzze, ecc..

Centro dei pesi

Si pensi ad un certo numero di oggetti inquadri in un sistema di riferimento bidimensionale e si associ loro un peso, rappresentato da un vettore \underline{p}_i , diretto come l'accelerazione di gravità.

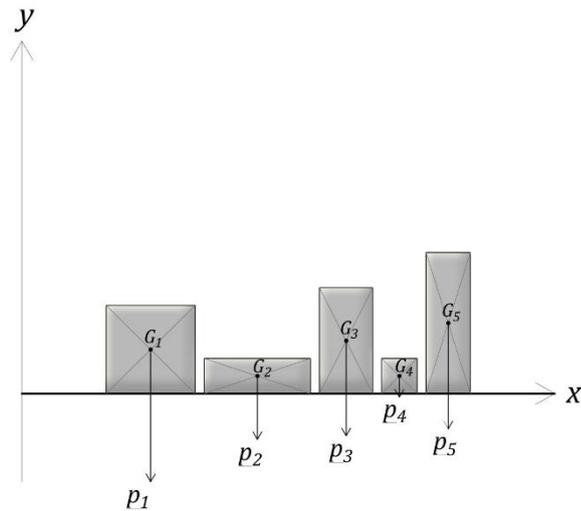


Fig. 09

Per trovare il centro di questo sistema di forze parallele è sufficiente applicare la (27) tenendo presente che:

- si considera un sistema di riferimento bidimensionale, quindi il centro è un punto descritto da 2 coordinate;
- il vettore \underline{p}_i corrisponde alla forza peso ed è stato chiamato \underline{p}_i , quindi: $\underline{p}_i = p_i \cdot \underline{e}$
- x_i e y_i sono le coordinate del punto G_i , nel sistema di riferimento indicato in figura.

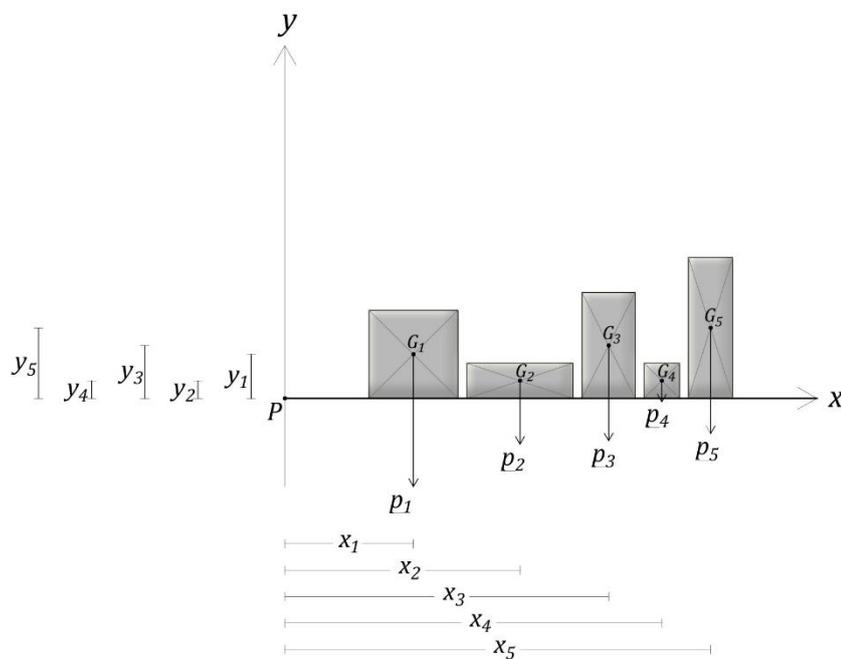


Fig. 10

Pertanto:

$$C_p = \begin{cases} x_c = \frac{\sum x_i \cdot p_i}{\sum p_i} \\ y_c = \frac{\sum y_i \cdot p_i}{\sum p_i} \end{cases} \quad (28)$$

ESEMPIO: Esistono oggetti di design che sembrano sfidare le leggi della fisica, puntando a stupire l'osservatore. Ad esempio si immagina una bottiglia incastrata in un supporto inclinato rispetto al piano orizzontale, come illustrato dalla **Fig. 11**. Questo sistema che si presenta estremamente instabile, sta in piedi! Come è possibile?

Utilizzando quegli stessi principi fisici, che i designer sembrano sfidare, viene garantito l'equilibrio. Infatti se i pesi sono ben distribuiti l'intero sistema è bilanciato, si calcoli quindi la posizione del centro dei pesi per verificare quanto affermato.

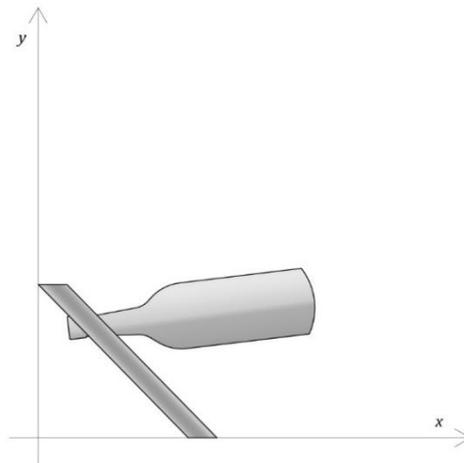


Fig. 11

Il supporto ha $\|p_1\| = 260 \text{ g}$ e il suo punto di applicazione G_1 ha coordinate (31; 26); la bottiglia ha $\|p_2\| = 450 \text{ g}$ e il suo punto di applicazione G_2 ha coordinate (72; 45)

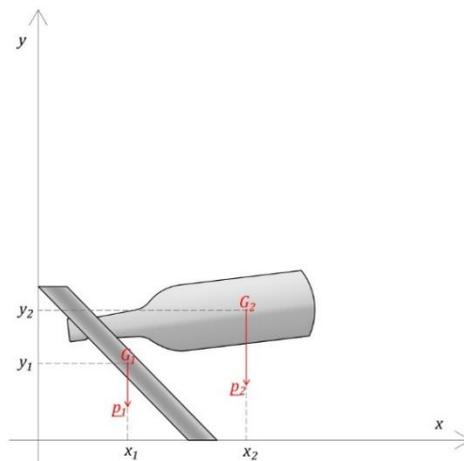


Fig. 12

Quindi applicando la (28) si ha che centro dei pesi è pari a:

$$C_p = \begin{cases} x_c = \frac{31 \cdot 260 + 72 \cdot 450}{260 + 450} \\ y_c = \frac{26 \cdot 260 + 45 \cdot 450}{260 + 450} \end{cases} \quad C_p = \begin{cases} x_c = 57 \\ y_c = 38 \end{cases}$$

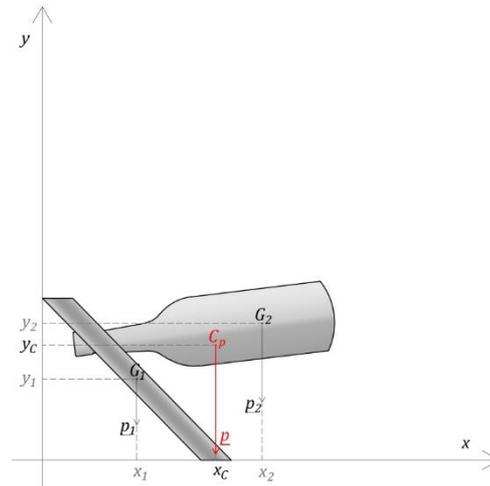


Fig. 13

OSSERVAZIONI: Dall'immagine si nota subito come la risultante \underline{p} del sistema di forze, si trovi in corrispondenza dell'appoggio a terra, luogo in cui nasce la reazione vincolare uguale e contraria, grazie alla quale è garantito l'equilibrio dell'intero sistema.

Se il centro dei pesi avesse avuto una posizione diversa da quella illustrata in Fig. 13, la risultante \underline{p} , ad esso applicata, e la reazione vincolare del terreno, non trovandosi in asse, avrebbero dato luogo ad un momento flettente, che avrebbe impresso una rotazione al sistema, definendone il fallimento.

Centro di massa

La massa è una grandezza scalare, quindi non è rappresentata da un vettore. Ciò nonostante, dal primo principio della dinamica si ricava la relazione tra massa e forza peso:

$$\underline{p} = m \cdot \underline{g} \quad (29)$$

dove \underline{g} è l'accelerazione di gravità

Quindi si può scrivere:

$$\underline{p}_i = m_i \cdot \underline{g} \quad (30)$$

con \underline{g} che rappresenta la direzione comune \underline{g} , nella formula (2)

Perciò la differenza tra massa e forza peso è data dall'accelerazione di gravità, che sulla Terra è sempre pari a $9,8 \frac{m}{s^2}$, di conseguenza il centro di massa coincide con il centro dei pesi.

Detto ciò le coordinate del centro di massa saranno pari a:

$$C_m = \begin{cases} x_c = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{\sum m_i} \\ y_c = \frac{\sum y_i \cdot m_i}{\sum m_i} \end{cases} \quad (31)$$

ESEMPIO: impalcato

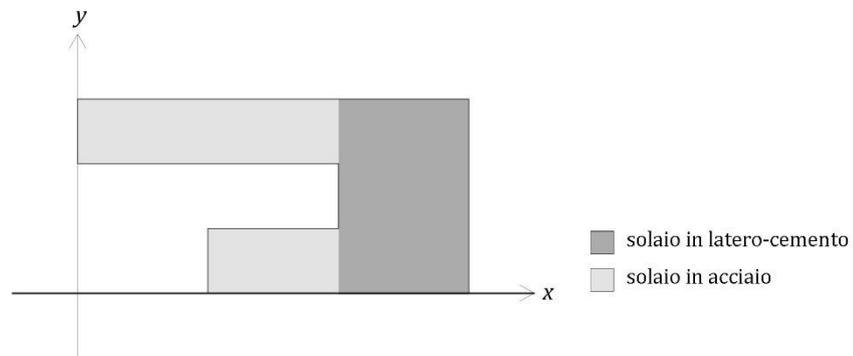


Fig. 14

La **Fig. 14** mostra lo schema di un impalcato costituito in parte da solaio in latero-cemento e per la parte rimanente da solaio in acciaio con lamiere grecate collaboranti.

Si calcoli il centro di massa dell'impalcato, sapendo che i loro pesi al metro quadro sono di $300 \frac{kg}{m^2}$ e di $240 \frac{kg}{m^2}$, rispettivamente per il solaio in latero-cemento e per il solaio in acciaio.

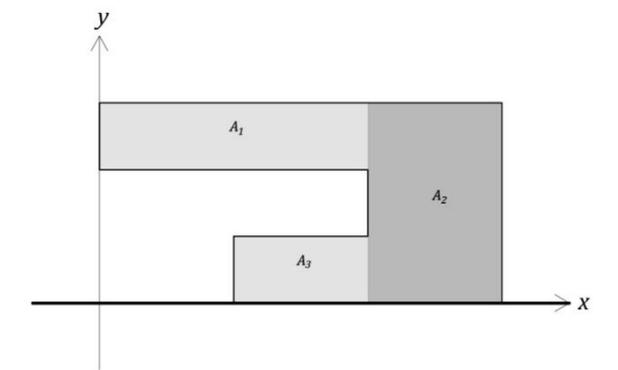


Fig. 15

Dato che i valori delle aree delle tre porzioni di solaio sono noti e pari a:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 100 \text{ m}^2 \\
 A_2 &= 150 \text{ m}^2 \\
 A_3 &= 50 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

è possibile ricavare il valore delle masse associate ad ogni porzione di solaio:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 2400 \text{ kg} \\
 m_2 &= 4500 \text{ kg} \\
 m_3 &= 1200 \text{ kg} \\
 m_{TOT} &= 8100 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

In pianta, da un punto di vista geometrico, le porzioni di solaio hanno la forma di tre rettangoli, di cui si conosce il baricentro:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (10,00; 12,50) \\
 C_2 &= (25,00; 7,50) \\
 C_3 &= (15,00; 2,50)
 \end{aligned}$$

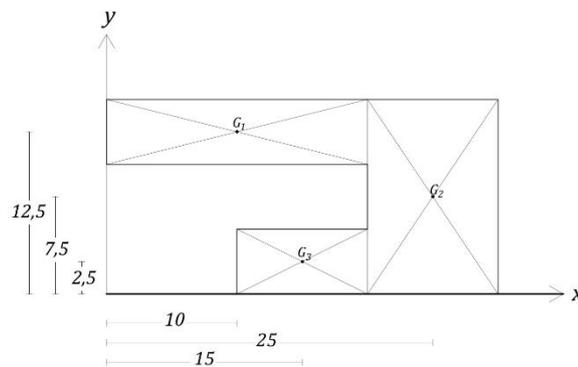


Fig. 16

Applicando la (32) si ha che il centro di massa è pari a:

$$C_p = \begin{cases} x_c = \frac{10,00 \cdot 2400 + 25,00 \cdot 4500 + 15,00 \cdot 1200}{8100} \\ y_c = \frac{12,50 \cdot 2400 + 7,50 \cdot 4500 + 2,50 \cdot 1200}{8100} \end{cases}$$

$$C_p = \begin{cases} x_c = 16,87 \\ y_c = 8,24 \end{cases}$$

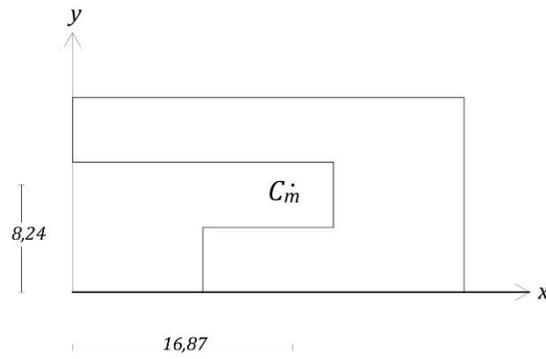


Fig. 17

ESEMPIO: gomma da cancellare

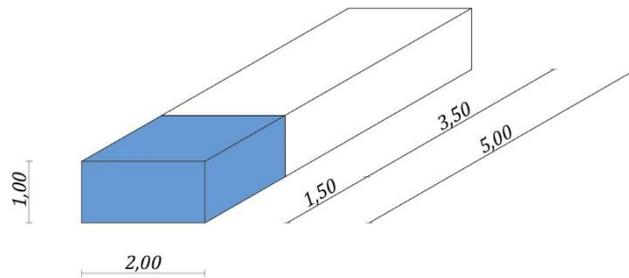


Fig. 18

La **Fig. 18** illustra una gomma da cancellare bicolore, la parte blu cancella l'inchiostro, mentre la parte bianca cancella la matita. I due materiali hanno un peso specifico diverso, di conseguenza il centro di massa non coinciderà con il centro geometrico.

Si calcoli il centro di massa della gomma, sapendo che i loro pesi specifici sono di $1,70 \frac{kg}{dm^3}$ e di $2,20 \frac{kg}{dm^3}$, rispettivamente per la parte bianca e per la parte blu.

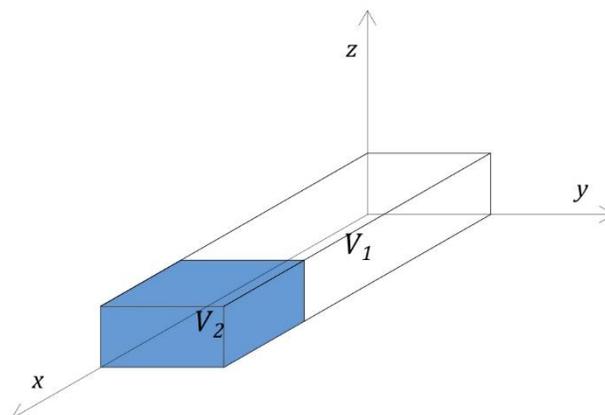


Fig. 19

Dato che i valori dei volumi delle due porzioni di gomma sono noti e pari a:

$$\begin{aligned} V_1 &= 7 \text{ cm}^3 \\ V_2 &= 3 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

è possibile ricavare il valore delle masse associate ad ogni porzione di solaiio:

$$\begin{aligned} m_1 &= 11,9 \text{ g} \\ m_2 &= 6,6 \text{ g} \\ m_{TOT} &= 18,5 \text{ g} \end{aligned}$$

Le due parti, che compongono la gomma, hanno la forma di due parallelepipedi, di cui si conosce il centro geometrico, che coincide con il baricentro (poiché le due parti prese singolarmente sono omogenee):

$$\begin{aligned} C_1 &= (1,75; 1,00; 0,50) \\ C_2 &= (4,25; 1,00; 0,50) \end{aligned}$$

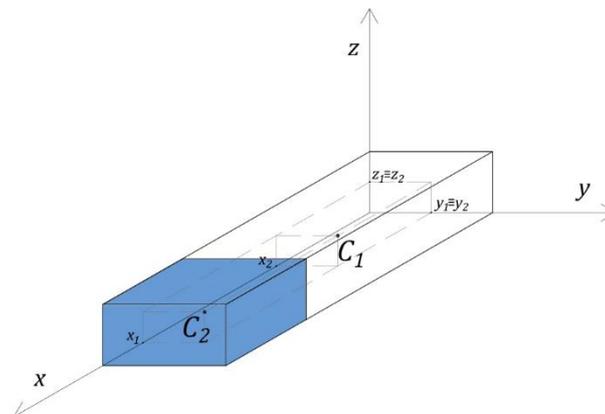


Fig. 20

Applicando la (32) si ha che il centro di massa è pari a:

$$C_p = \begin{cases} x_c = \frac{4,25 \cdot 6,60 + 1,75 \cdot 11,90}{18,5} \\ y_c = \frac{1,00 \cdot 6,60 + 1,00 \cdot 11,90}{18,5} \\ z_c = \frac{0,50 \cdot 6,60 + 0,50 \cdot 11,90}{18,5} \end{cases} \quad C_p = \begin{cases} x_c = 2,64 \\ y_c = 1,00 \\ z_c = 0,50 \end{cases}$$

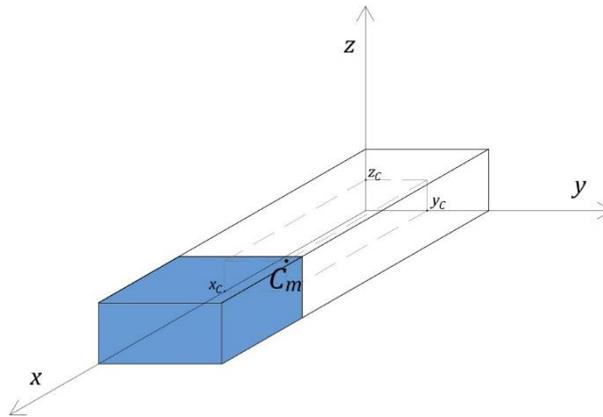


Fig. 21

OSSERVAZIONI: La gomma è simmetrica rispetto a due piani, uno parallelo al piano xz, e l'altro parallelo al piano xy. Infatti i baricentri delle due porzioni hanno due coordinate in comune: la y e la z. Di conseguenza è ovvio che anche C_m condivida le stesse due coordinate.

Centro di area

Per calcolare il centro d'area si parte sempre dalla (27), e si ottiene:

$$C_A = \begin{cases} x_c = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i} \\ y_c = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i} \end{cases} \quad (32)$$

Di seguito vengono riportate alcune semplici applicazioni su sezioni di travi.

ESEMPIO: sezione a T

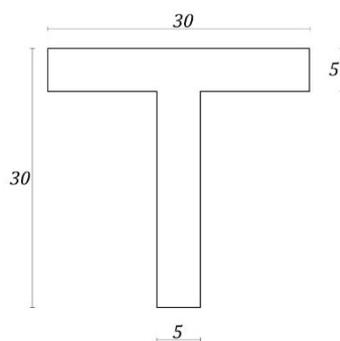


Fig. 22

Riduciamo l'area totale A_{TOT} in più forme elementari, come triangoli e rettangoli di cui è nota la posizione del centro d'area. In tal caso si avrà:

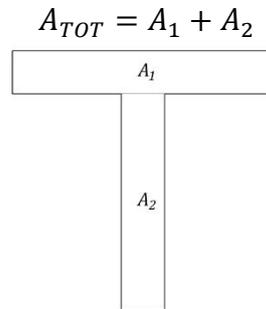


Fig. 23

Nell'esempio di Fig. 19, la figura geometrica viene suddivisa in 2 rettangoli, di aree rispettivamente pari a:

$$A_1 = 150 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 125 \text{ mm}^2$$

Quindi:

$$A_{TOT} = 275 \text{ mm}^2$$

La scomposizione di una figura complessa in figure elementari, permette di individuare con semplici regole geometriche le posizioni dei rispettivi centri d'area, e quindi di determinarne le coordinate rispetto ad un sistema di riferimento fissato.

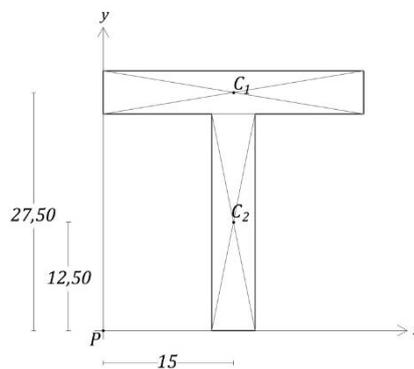


Fig. 24

$$C_1 = (15,00; 27,50)$$

$$C_2 = (15,00; 12,50)$$

Applicando la (35), si ottengono le coordinate del centro d'area come segue:

$$C_A = \begin{cases} x_c = \frac{15 \cdot 150 + 15 \cdot 125}{275} \\ y_c = \frac{27,50 \cdot 150 + 12,5 \cdot 125}{275} \end{cases} \quad C_A = \begin{cases} x_c = 20,68 \\ y_c = 15,00 \end{cases}$$

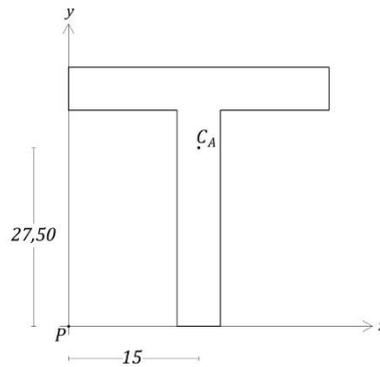


Fig. 25

OSSERVAZIONI: La sezione è simmetrica rispetto ad un asse verticale, passante per C_1 e C_2 , che difatti hanno la stessa ascissa. Di conseguenza è ovvio che anche C_A condivide la loro stessa ascissa.

ESEMPIO: sezione a C asimmetrica

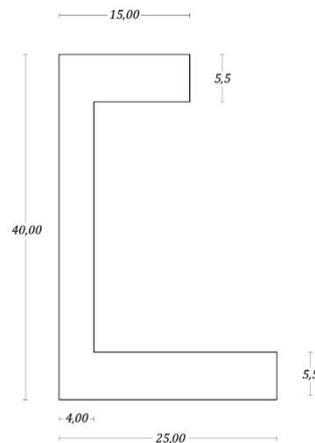


Fig. 26

Riduciamo la figura geometrica in tre figure rettangolari, in modo tale che:

$$A_{TOT} = A_1 + A_2 + A_3$$

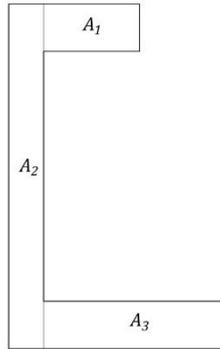


Fig. 27

In questo esempio, l'area totale varrà:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 60,50 \text{ mm}^2 \\
 A_2 &= 160 \text{ mm}^2 \\
 A_3 &= 115,50 \text{ mm}^2 \\
 A_{TOT} &= 336,00 \text{ mm}^2
 \end{aligned}$$

Si individuino i diversi centri d'area:

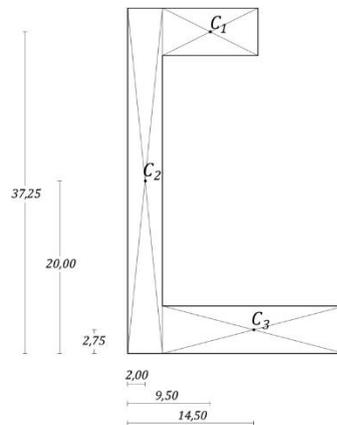


Fig. 28

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (9,50; 37,25) \\
 C_2 &= (2,00; 20,00) \\
 C_3 &= (14,50; 2,75)
 \end{aligned}$$

Applicando la (35), si ottengono le coordinate del centro d'area della figura geometrica iniziale, come segue:

$$C_p = \begin{cases} x_c = \frac{9,50 \cdot 60,50 + 2,00 \cdot 160,00 + 14,50 \cdot 115,50}{336,00} \\ y_c = \frac{37,25 \cdot 60,50 + 20,00 \cdot 160,00 + 2,75 \cdot 115,50}{336,00} \end{cases}$$

$$C_p = \begin{cases} x_c = 7,65 \\ y_c = 17,18 \end{cases}$$

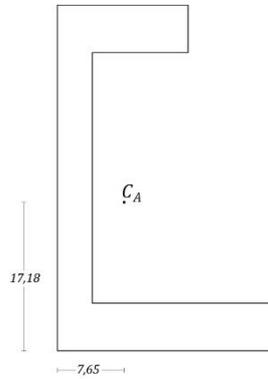


Fig. 29

Centro delle rigidezze

Dalla (27) si ottiene il centro delle rigidezze come:

$$C_R = \begin{cases} x_c = \frac{\sum x_i \cdot k_i}{\sum k_i} \\ y_c = \frac{\sum y_i \cdot k_i}{\sum k_i} \end{cases} \quad (33)$$

con k_i che rappresenta la rigidezza dell'elemento i -esimo

Per ulteriori spiegazioni riguardanti il centro delle rigidezze si rimanda alla relativa dispensa.