

### ESERCIZIO 13

Si consideri la seguente struttura isostatica, costituita da due sottostrutture: un'asta orizzontale (che verrà indicata con il pedice 1) doppiamente appoggiata, su cui insiste un carico uniformemente distribuito e un'asta inclinata di  $45^\circ$  lungo l'orizzontale (che verrà indicata con il pedice 2), collegata alla prima da una cerniera.

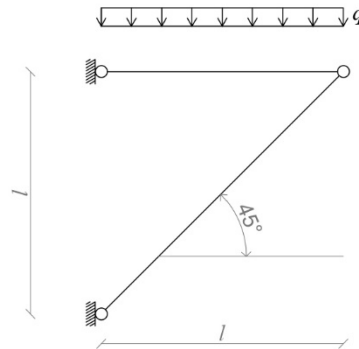


Fig. 13.1 Schema statico

**Primo passo:** Riconoscere il carattere reticolare di un'asta

L'asta2 è un'asta rettilinea, vincolata ai due estremi con due cerniere e non presenta carichi di nessuna natura sul suo asse. Queste informazioni ci permettono di affermare che l'asta2 è un'asta reticolare e di conseguenza sappiamo che è soggetta a solo sforzo assiale, o di trazione(a) o di compressione (b).

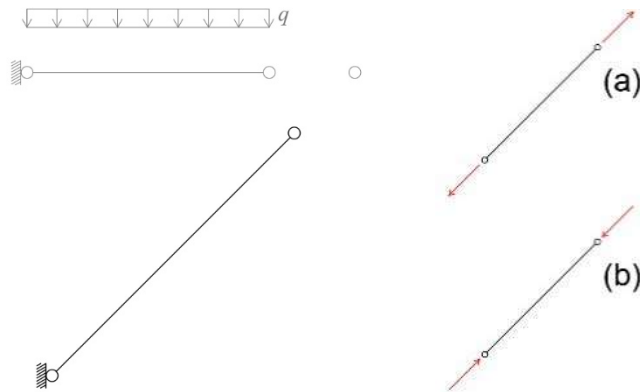
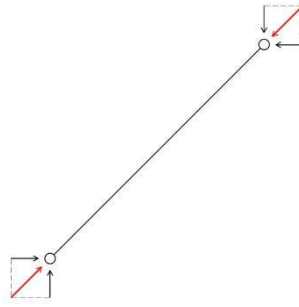


Fig. 13.2

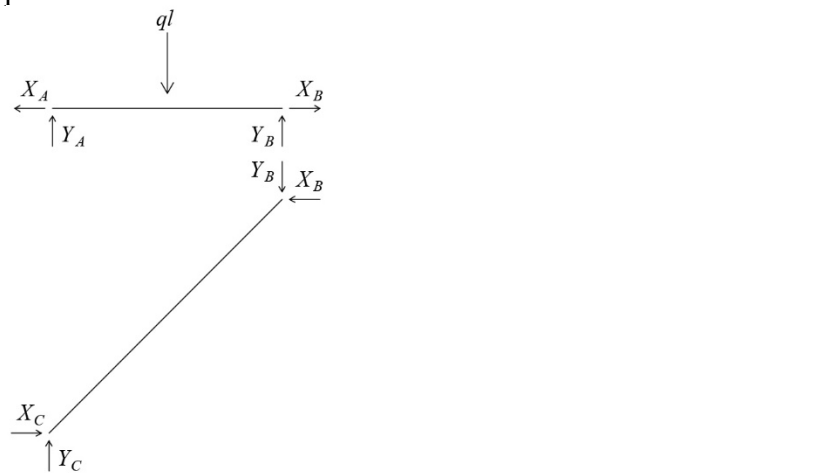
Il carico distribuito spinge verso il basso l'asta1, che insiste sull'asta2, spingendola a sua volta verso il basso. Per questo motivo intuitivamente ci aspetteremo una compressione dell'asta reticolare.



**Fig. 13.3** Asta reticolare compressa

**Secondo passo:** Determinazione delle reazioni vincolari

Alla luce di quanto appena detto, esplicitiamo le reazioni vincolari.



**Fig. 13.4**

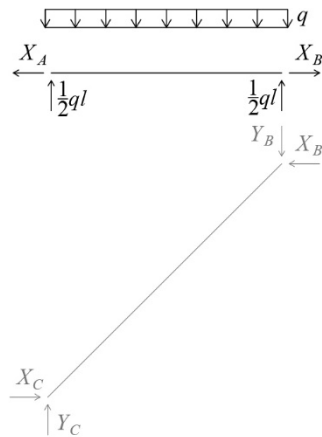
A colpo d'occhio, la struttura sembra composta da due sottostrutture iperstatiche, in quanto ogni asta, presa singolarmente, presenta 4 incognite mentre noi abbiamo a disposizione solo 3 equazioni di equilibrio per ogni corpo (equilibrio a traslazione orizzontale, equilibrio a traslazione verticale ed equilibrio a rotazione).

Esistono delle strutture isostatiche a loro volta composte da sottostrutture isostatiche; in alcuni casi non esiste nessuna sottostruttura isostatica ma per una sottostruttura iperstatica può accadere che una parte del problema dell'equilibrio statico sia risolvibile, ossia la struttura è solo parzialmente isostatica.

Una volta individuata la sottostruttura o il sottoproblema isostatico, si parte da quella per poi risolvere a catena l'intero sistema.

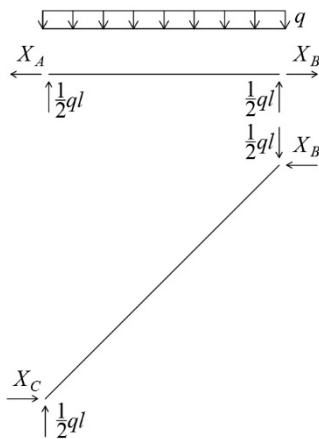
Ritornando all'esercizio in esame, esso è costituito da due sottostrutture iperstatiche, ma presenta un sottoproblema isostatico; infatti l'asta 1 risulta isostatica per forze trasversali.

Per l'evidente simmetria geometrica e meccanica dell'asta 1,  $Y_A$  e  $Y_B$  sono immediatamente determinate, sapendo che la risultante  $ql$  del carico si distribuisce in parti uguali.



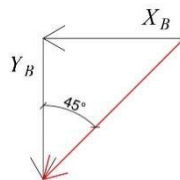
**Fig. 13.5**

Conoscendo il valore delle componenti verticali delle reazioni vincolari nell'asta1 ed imponendo l'equilibrio a traslazione verticale, determiniamo le componenti verticali delle rimanenti reazioni vincolari.



**Fig. 13.6**

Per determinare le componenti orizzontali delle reazioni vincolari, dobbiamo banalmente ricordare che la reazione vincolare sull'asta2 è parallela all'asse, dato il carattere reticolare dell'asta medesima. Pertanto tra la reazione vincolare e le sue componenti orizzontale e verticale, sussistono semplici relazioni trigonometriche, illustrate nella figura che segue:



$$X_B = Y_B \cdot \tan 45 = Y_B$$

Le reazioni vincolari sono dunque le seguenti, ove in grigio sono rappresentate le componenti verticali e orizzontali delle forze, rappresentate in rosso:

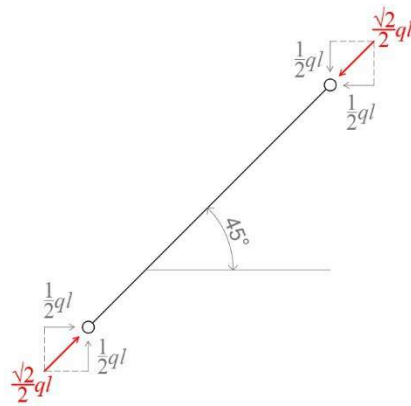


Fig. 13.7

A questo punto è possibile determinare tutte le reazioni vincolari:

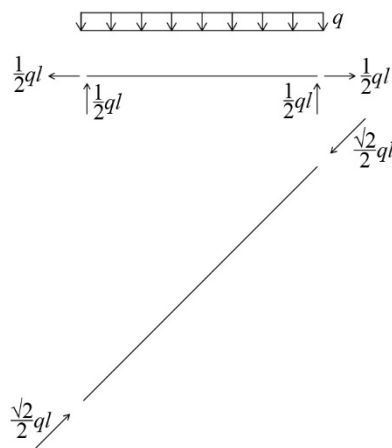


Fig. 13.8

**Terzo passo:** Determinazione dei diagrammi delle sollecitazione

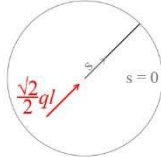
*Sforzo assiale*

Il carico distribuito  $q_1$  è l'opposto della derivata della funzione  $N(s)$  e in questo esercizio è nullo su entrambe le aste; quindi lo sforzo assiale è descritto da una funzione costante su entrambe le aste.

Per disegnare il diagramma di una funzione costante, è sufficiente conoscere solo un suo valore. Questo valore andrà ricercato negli estremi dell'asta, dove si scrivono le condizioni al bordo.

Si avrà dunque:

|       |           |                  |                       |  |                          |
|-------|-----------|------------------|-----------------------|--|--------------------------|
| asta1 | $q_1 = 0$ | $N_1 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $N_1(0) = +\frac{ql}{2}$ |
|-------|-----------|------------------|-----------------------|--|--------------------------|

|       |           |                  |                       |  |                                   |
|-------|-----------|------------------|-----------------------|--|-----------------------------------|
| asta2 | $q_1 = 0$ | $N_2 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $N_2(0) = -\sqrt{2} \frac{ql}{2}$ |
|-------|-----------|------------------|-----------------------|--|-----------------------------------|

L'annullarsi del carico distribuito assiale, implica la costanza sulle aste dello sforzo normale. La determinazione di un valore dello sforzo normale per mezzo di una condizione al bordo consente pertanto di dire che lo sforzo normale è dappertutto pari a quel valore al bordo.

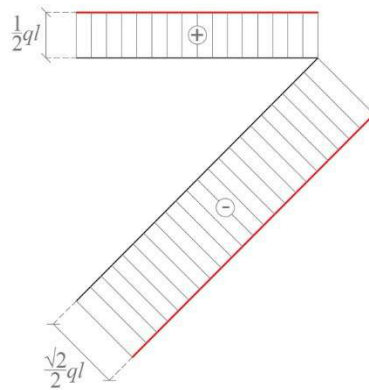


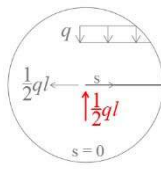
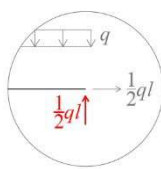
Fig. 13.9 Diagramma dello sforzo normale

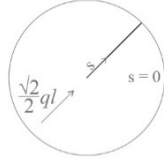
### Sforzo di taglio

Il carico distribuito  $q_2$  è l'opposto della derivata della funzione  $T(s)$ . In questo esercizio  $q_2$  è costante sull'asta1 ed è nullo sull'asta2. Pertanto la funzione  $T_1(s)$  è lineare e la funzione  $T_2(s)$  è costante.

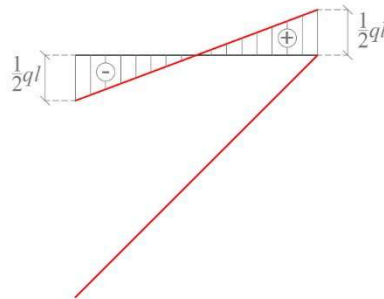
Per l'asta1 bisogna disegnare il diagramma di una funzione lineare; è sufficiente quindi conoscere due soli valori, che andranno ricercati negli estremi dell'asta. Mentre per l'asta2 sarà sufficiente un solo valore.

L'imposizione delle condizioni al bordo ci consente di scrivere:

|       |                  |                 |                       |  |                          |
|-------|------------------|-----------------|-----------------------|--|--------------------------|
| asta1 | $q_2 = costante$ | $T_1 = lineare$ | 2 condizioni al bordo |  | $T_1(0) = -\frac{ql}{2}$ |
|       |                  |                 |                       |  | $T_1(l) = +\frac{ql}{2}$ |

|              |           |                  |                       |   |              |
|--------------|-----------|------------------|-----------------------|---|--------------|
| <b>asta2</b> | $q_2 = 0$ | $T_2 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $T_2(0) = 0$ |
|--------------|-----------|------------------|-----------------------|---|--------------|

La costanza del carico distribuito trasversale sull'asta1, implica la linearità della sollecitazione di taglio. La determinazione di due valori dello sforzo di taglio per mezzo delle condizioni al bordo consente pertanto di disegnare il diagramma del taglio come segue:

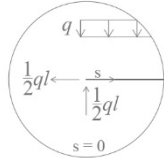
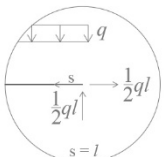
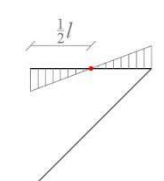


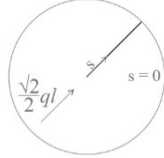
**Fig. 13.10** Diagramma dello sforzo di taglio

### Momento flettente

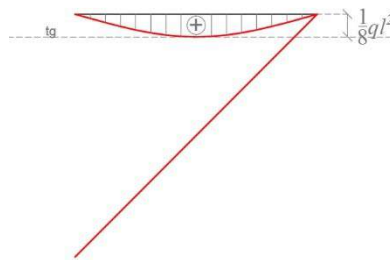
La funzione  $T(s)$  è l'opposto della derivata della funzione  $M(s)$ . Sull'asta1 il Taglio è lineare, di conseguenza il Momento è parabolico e poiché per disegnare una parabola sono necessari 3 punti, ci servono 3 informazioni per ottenere il diagramma del momento.

Invece poiché sull'asta2 il Taglio è nullo, il Momento è costante, quindi è sufficiente conoscere solo un suo valore, che ricercheremo negli estremi dell'asta.

|       |                 |                    |                        |   |                                   |
|-------|-----------------|--------------------|------------------------|---|-----------------------------------|
| asta1 | $T_1 = lineare$ | $M_1 = parabolico$ | 3 condizioni assegnate |  | $M_1(0) = 0$                      |
|       |                 |                    |                        |  | $M_1(l) = 0$                      |
|       |                 |                    |                        |  | $T_1\left(\frac{l}{2}\right) = 0$ |

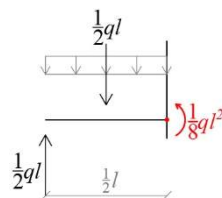
|       |           |                  |                       |   |              |
|-------|-----------|------------------|-----------------------|---|--------------|
| asta2 | $T_2 = 0$ | $M_2 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $M_2(0) = 0$ |
|-------|-----------|------------------|-----------------------|---|--------------|

La linearità del taglio, implica l'andamento parabolico del momento. Le tre informazioni individuate per disegnare la parabola sono state ricercate nelle condizioni al bordo e nel diagramma del taglio. Infatti dove il taglio ha valore nullo, il momento ha tangente orizzontale e questo ci consente di disegnare il diagramma del momento come segue:



**Fig. 13.11** Diagramma del momento flettente

Per conoscere il valore massimo del momento, che si attinge in mezzeria, effettuiamo un taglio virtuale nella sezione di mezzeria e determiniamo il valore del momento necessario a garantire l'equilibrio a rotazione della parte individuata dal taglio virtuale:



**Fig. 13.12** Bilancio

## ESERCIZIO 14

Si consideri la seguente struttura isostatica, costituita da due sottostrutture: un'asta orizzontale (che verrà indicata con il pedice 1) doppiamente appoggiata, sulla cui lunghezza insiste una forza concentrata e un'asta inclinata di  $45^\circ$  lungo l'orizzontale (che verrà indicata con il pedice 2), collegata alla prima da una cerniera.

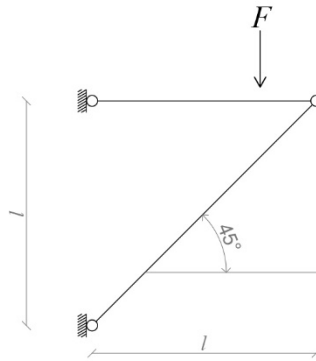


Fig. 14.1 Schema statico

**Primo passo:** Riconoscere il carattere reticolare di un'asta

L'asta1 e l'asta2 sono entrambe rettilinee e vincolate ai due estremi con due cerniere; però l'asta1 subisce l'azione di una forza concentrata sul suo asse e questo esclude la possibilità che si tratti di un'asta reticolare. Invece l'asta2, non presenta carichi di nessuna natura lungo l'asse, quindi si può affermare che l'asta2 è un'asta reticolare e di conseguenza sappiamo che è soggetta a solo sforzo assiale, o di trazione (a) o di compressione (b).

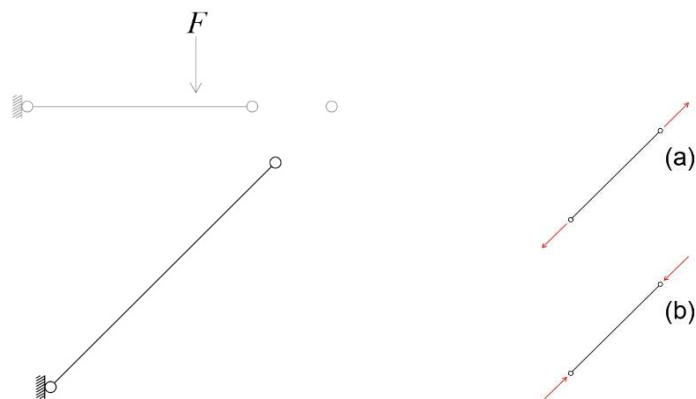
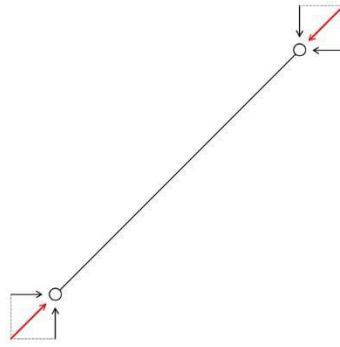


Fig. 14.2

La forza concentrata spinge verso il basso l'asta1, che insiste sull'asta2, spingendola a sua volta verso il basso. Per questo motivo intuitivamente ci aspetteremo una compressione dell'asta reticolare.

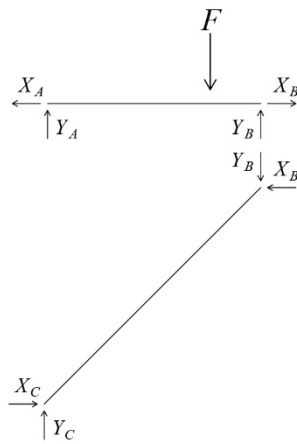




**Fig. 14.3**

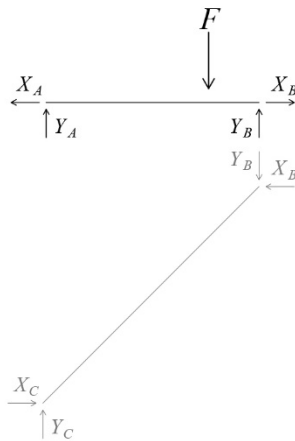
**Secondo passo:** Determinazione delle reazioni vincolari

Alla luce di quanto appena detto, esplicitiamo le reazioni vincolari.



**Fig. 14.4**

La struttura contiene un sottoproblema isostatico, infatti l'asta1 risulta isostatica per forze trasversali.

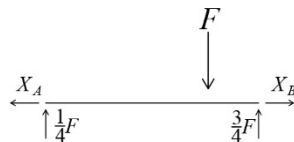


**Fig. 14.5**

Riconosciuta l'isostaticità alle forze trasversali dell'asta1, determiniamo per prime  $Y_A$  e  $Y_B$ , imponendo l'equilibrio a traslazione verticale e l'equilibrio a rotazione intorno ad uno dei due estremi.

$$\begin{cases} Y_A - F + Y_B = 0 \\ Y_B \cdot L - F \cdot \frac{3}{4}L = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_A = \frac{F}{4} \\ Y_B = \frac{3}{4}F \end{cases}$$

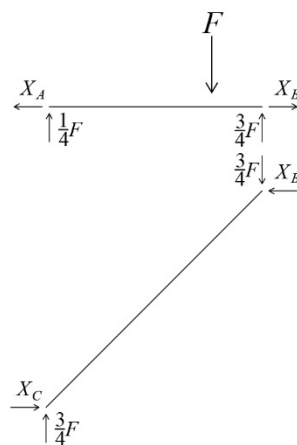


**Fig. 14.6**

Le componenti verticali delle reazioni vincolari si possono ricavare anche applicando il principio della leva di Archimede, per il quale l'equilibrio delle forze trasversali nell'asta1 è garantito quando le due reazioni vincolari moltiplicate per la loro distanza dal punto di applicazione della forza, determinano un momento uguale e contrario, infatti:

$$-\frac{F}{4} \cdot \frac{3}{4}l = \frac{3}{4}F \cdot \frac{l}{4}$$

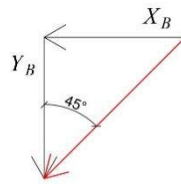
Conoscendo il valore delle componenti verticali delle reazioni vincolari dell'asta1, determiniamo tutte le componenti verticali delle rimanenti reazioni vincolari.



**Fig. 14.7**

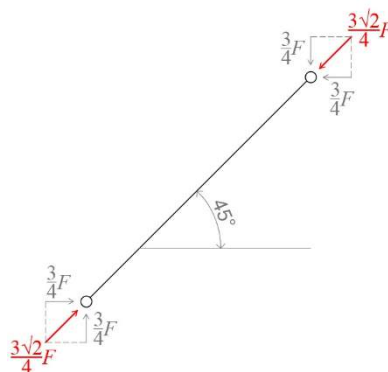
Per determinare le componenti orizzontali delle reazioni vincolari, dobbiamo solamente ricordare che la reazione vincolare sull'asta2 è parallela all'asse, dato il carattere reticolare dell'asta medesima.

Pertanto tra la reazione vincolare e le sue componenti orizzontale e verticale, sussistono semplici relazioni trigonometriche, illustrate nella figura che segue:



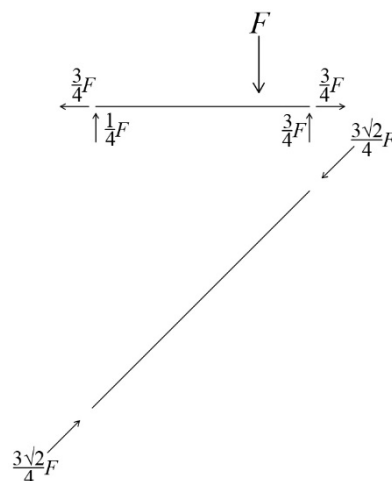
$$X_B = Y_B \cdot \tan 45 = Y_B$$

Le reazioni vincolari sono dunque le seguenti, ove in grigio sono rappresentate le componenti verticali e orizzontali delle forze, rappresentate in rosso:



**Fig. 14.8**

A questo punto è possibile determinare tutte le reazioni vincolari:



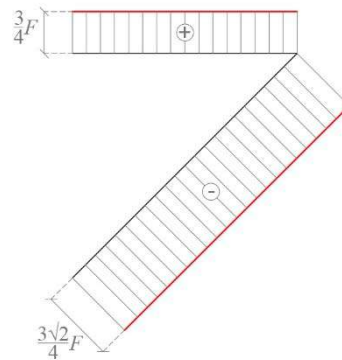
**Fig. 14.9**

**Terzo passo:** Determinazione dei diagrammi delle sollecitazione

## Sforzo assiale

|              |           |                  |                       |  |                                  |
|--------------|-----------|------------------|-----------------------|--|----------------------------------|
| <b>asta1</b> | $q_1 = 0$ | $N_1 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $N_1(0) = +\frac{3}{4}F$         |
| <b>asta2</b> | $q_1 = 0$ | $N_2 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $N_2(0) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}F$ |

L'annullarsi del carico distribuito assiale, implica la costanza sulle aste dello sforzo normale. La determinazione di un valore dello sforzo normale per mezzo di una condizione al bordo consente pertanto di dire che lo sforzo normale è dappertutto pari a quel valore al bordo.

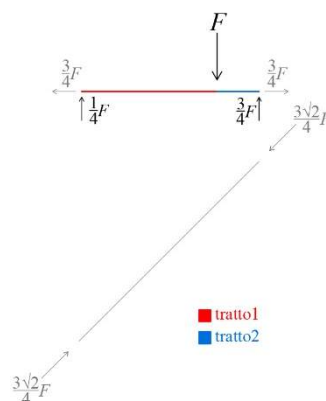


**Fig. 14.10** Diagramma dello sforzo normale

## Sforzo di taglio

La forza concentrata sull'asta1 determina la suddivisione dell'asta in due tratti regolari, in ognuno dei quali il carico distribuito  $q_2$  è nullo, di conseguenza il taglio è costante a tratti. Infatti nel punto di applicazione della forza, il diagramma del taglio è discontinuo; per questo motivo per disegnarlo è necessario conoscere un suo valore sia nel primo tratto che nel secondo. Questi valori andranno ricercati negli estremi dell'asta, dove si impongono le condizioni al bordo.

Si avrà dunque:

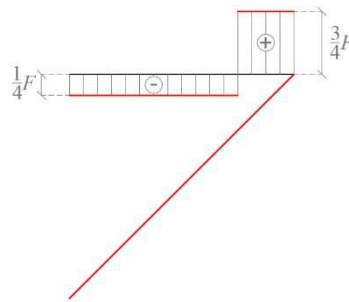


**Fig. 14.11** Tratti regolari

|                          |           |                  |                       |  |                         |
|--------------------------|-----------|------------------|-----------------------|--|-------------------------|
| <b>asta1</b><br>tratto 1 | $q_2 = 0$ | $T_1 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $T_1(0) = -\frac{F}{4}$ |
| <b>asta1</b><br>tratto 2 | $q_2 = 0$ | $T_1 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $T_1(l) = +\frac{3}{4}$ |
| <b>asta2</b>             | $q_2 = 0$ | $T_2 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $T_2(0) = 0$            |

L'assenza del carico distribuito trasversale sulle asta1, implica la costanza della sollecitazione di taglio, mentre la presenza della forza concentrata, determina un salto nel diagramma, pari all'intensità della forza  $F$ , come si può vedere dal diagramma stesso.

Inoltre viene confermato il carattere reticolare dell'asta2, mostrando l'assenza della sollecitazione di taglio:

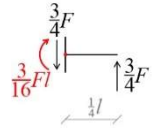
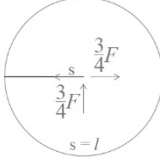
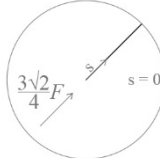


**Fig. 14.12** Diagramma dello sforzo di taglio

### Momento flettente

La funzione  $T(s)$  è l'opposto della derivata della funzione  $M(s)$ . Dal momento che la funzione taglio è costante a tratti, il Momento è lineare a tratti e sarebbero quindi necessarie due informazioni per ogni tratto regolare dell'asta; in realtà, dato che nella singolarità il momento è continuo, serviranno in tutto 3 informazioni, due ricavabili dalle condizioni al bordo, e la terza ottenuta, imponendo l'equilibrio a rotazione di uno dei due tratti.

|                          |                  |                 |                        |  |   |
|--------------------------|------------------|-----------------|------------------------|--|---|
| <b>asta1</b><br>tratto 1 | $T_1 = costante$ | $M_1 = lineare$ | 2 condizioni assegnate |  | $M_1(0) = 0$                                    |
|                          |                  |                 |                        |  | $M_1\left(\frac{3}{4}l\right) = \frac{3}{16}Fl$ |

|                   |                  |                  |                        |  |   |
|-------------------|------------------|------------------|------------------------|--|---|
| asta1<br>tratto 2 | $T_1 = costante$ | $M_1 = lineare$  | 2 condizioni assegnate |  | $M_1\left(\frac{3}{4}l\right) = \frac{3}{16}Fl$ |
|                   |                  |                  |                        |  | $M_1(l) = 0$                                    |
| asta2             | $T_2 = 0$        | $M_2 = costante$ | 1 condizione al bordo  |  | $M_2(0) = 0$                                    |

La discontinuità nel diagramma del taglio sull'asta1, implica un diagramma del momento continuo ma con due andamenti diversi, legati al valore del taglio.

Pertanto nel primo tratto, dove il taglio è pari a  $-\frac{F}{4}$ , la retta che descrive il momento avrà una direzione opposta e una pendenza minore rispetto al secondo tratto, dove il taglio è pari a  $+\frac{3}{4}$ .

Mentre per quanto riguarda l'asta2, il valore nullo del momento è una conseguenza del carattere reticolare dell'asta.

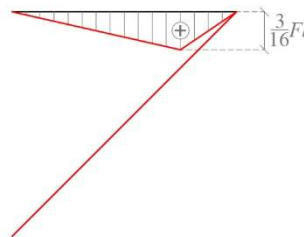
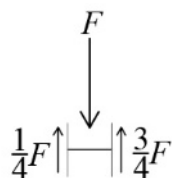
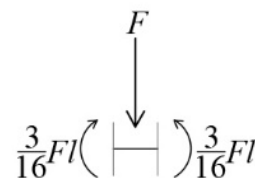


Fig. 14.13 Diagramma del momento flettente

Facendo un focus nel punto in cui è applicata la forza si riassumono gli effetti della singolarità sul taglio e sul momento:



La funzione  $T(s)$  è discontinua, assumendo due valori diversi a destra e a sinistra della forza concentrata; di conseguenza il diagramma presenta un salto, che è pari all'intensità della forza  $F$ .



La funzione  $M(s)$  è continua, ma presenta un punto angoloso. Infatti il taglio a destra e a sinistra della forza, assume due valori di modulo diverso e di segno opposto. Il modulo del taglio governa la pendenza del diagramma del momento, mentre il segno ne determina la crescita o la decrescenza.

## ESERCIZIO 15

Si consideri la seguente struttura isostatica, costituita da due sottostrutture: un'asta orizzontale (che verrà indicata con il pedice 1) doppiamente appoggiata ed un'asta inclinata di  $45^\circ$  lungo l'orizzontale (che verrà indicata con il pedice 2), collegata alla prima da una cerniera, sulla quale è concentrata una forza  $F$ .

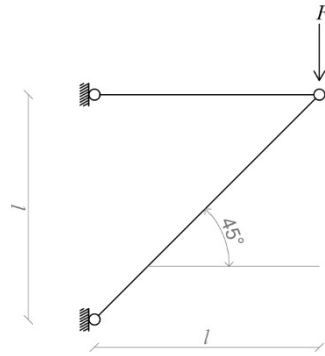


Fig. 15.1 Schema statico

**Primo passo:** Riconoscere il carattere reticolare di un'asta

L'asta1 e l'asta2 sono entrambe rettilinee, vincolate ai due estremi con due cerniere e non presentano carichi di nessuna natura lungo il loro asse, quindi si può affermare che entrambe le aste sono reticolari, ossia soggette a solo sforzo assiale.

La forza concentrata spinge verso il basso l'asta1, cercando di imprimerle una rotazione rigida oraria; poiché l'asta è vincolata, non subirà una rotazione, ma ci sarà un piccolo abbassamento nella direzione della forza. Ciò ci permette di immaginare come l'asta1 è tesa sotto l'azione della forza; mentre l'asta2, spinta a sua volta verso il basso, è compressa.

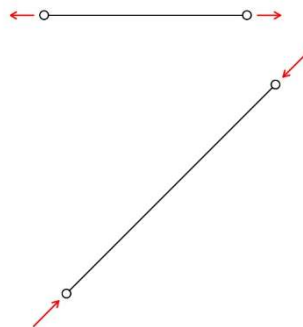


Fig. 15.2


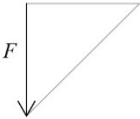
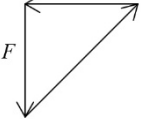
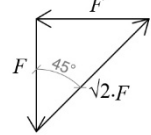
**Secondo passo:** Determinazione delle reazioni vincolari

Per determinare le reazioni vincolari di questa struttura reticolare possiamo utilizzare il triangolo delle forze, percorrendo due strade: l'equilibrio di tutte le forze agenti sul nodo, oppure l'equivalenza della forza esterna al sistema di forze trasmesso alle aste.

L'equilibrio delle forze agenti sul nodo implica che la somma vettoriale di tali forze sia nulla.

Sul nodo agisce la forza esterna e due forze (che rappresentano l'azione delle aste sul nodo) dirette parallelamente alla direzione delle aste.

EQUILIBRIO AL NODO:

|   |   |  |  |
|---|---|--|--|
|  <p>Costruisco un triangolo, con i lati paralleli alle direzioni delle tre forze</p> |  <p>L'unico verso che conosco è il verso di <math>F</math>, che è un dato del problema</p> |  <p>Per garantire l'equilibrio delle forze, i versi delle frecce si devono rincorrere.</p> |  <p>Sapendo che l'angolo di inclinazione è di <math>45^\circ</math>, determiniamo il valore del modulo delle due forze incognite.</p> |
|---|---|--|--|

Abbiamo così trovato verso e modulo di ogni reazione vincolare.

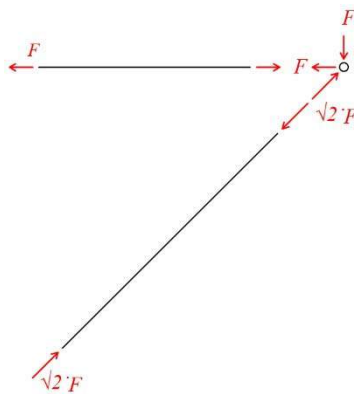
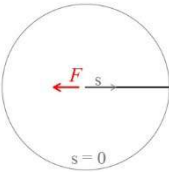



Fig. 15.3

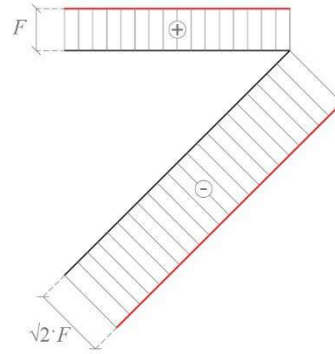
**Terzo passo:** Determinazione dei diagrammi delle sollecitazione

*Sforzo assiale*

|                     |                             |                                    |                              |   |   |
|---------------------|-----------------------------|------------------------------------|------------------------------|---|---|
| <p><b>asta1</b></p> | <p><math>q_1 = 0</math></p> | <p><math>N_1 = costante</math></p> | <p>1 condizione al bordo</p> |  | <p><math>N_1(0) = +F</math></p>         |
| <p><b>asta2</b></p> | <p><math>q_1 = 0</math></p> | <p><math>N_2 = costante</math></p> | <p>1 condizione al bordo</p> |  | <p><math>N_2(0) = -\sqrt{2}F</math></p> |



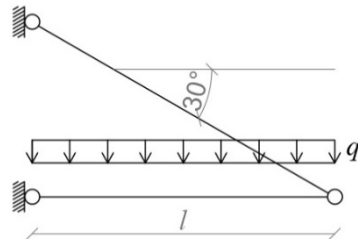
La struttura ha un carattere reticolare per questo sappiamo che le aste non presentano sollecitazioni di taglio o di momento flettente, bensì sono sollecitate da soli sforzi assiali di natura costante. Pertanto la determinazione di un valore dello sforzo normale per mezzo di una condizione al bordo consente di dire che lo sforzo normale è dappertutto pari a quel valore al bordo.



**Fig. 15.4** Diagramma dello sforzo normale

## ESERCIZIO 16

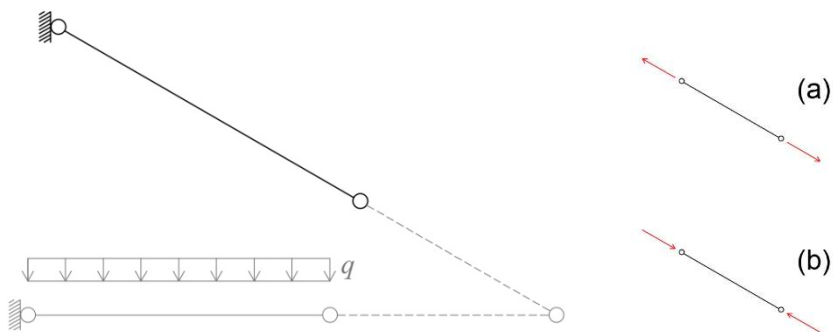
Si consideri la seguente struttura isostatica, costituita da due sottostrutture: un'asta orizzontale (che verrà indicata con il pedice 1) doppiamente appoggiata, su cui insiste un carico uniformemente distribuito, e un'asta inclinata di  $30^\circ$  lungo l'orizzontale (che verrà indicata con il pedice 2), collegata alla prima da una cerniera.



*Fig. 16.1 Schema statico*

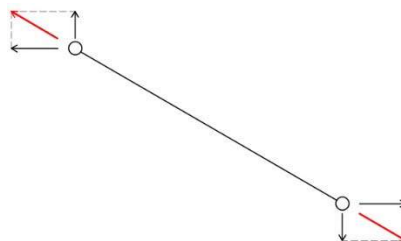
**Primo passo:** Riconoscere il carattere reticolare di un'asta

L'asta2 è un'asta rettilinea, vincolata ai due estremi con due cerniere e non presenta carichi lungo il suo asse. Queste informazioni ci permettono di affermare che l'asta2 è un'asta reticolare e di conseguenza sappiamo che è soggetta a solo sforzo assiale, o di trazione(a) o di compressione (b).



*Fig. 16.2*

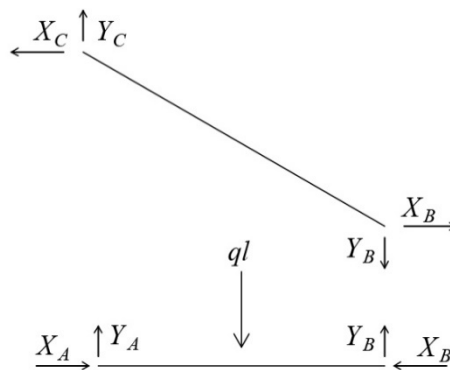
Il carico distribuito spinge verso il basso l'asta1, che è collegata all'asta2; di conseguenza quest'ultima viene messa in trazione.



*Fig. 16.3 Asta reticolare tesa*

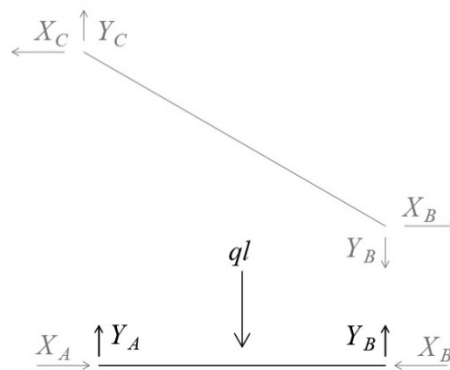
**Secondo passo:** Determinazione delle reazioni vincolari

Alla luce di quanto appena detto, esplicitiamo le reazioni vincolari.



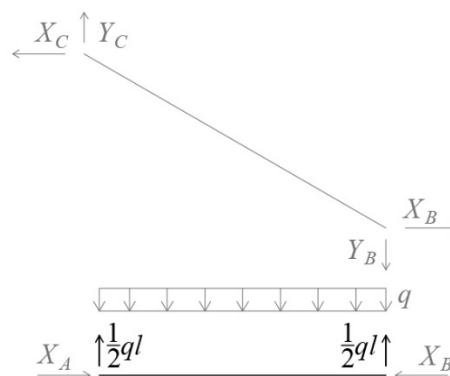
**Fig. 16.4**

La struttura è costituita da due sottostrutture iperstatiche, ma presenta un sottoproblema isostatico; infatti l'asta1 risulta isostatica per forze trasversali.



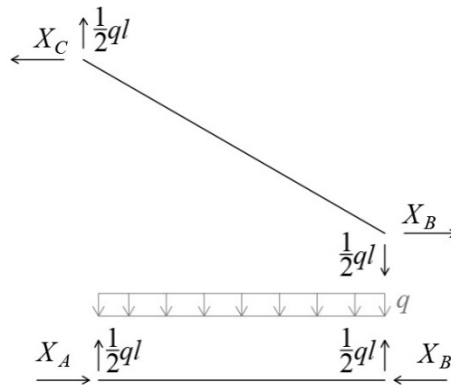
**Fig. 16.5**

Per l'evidente simmetria geometrica e meccanica dell'asta1,  $Y_A$  e  $Y_B$  sono immediatamente determinate, sapendo che la risultante  $qL$  del carico si distribuisce in parti uguali.



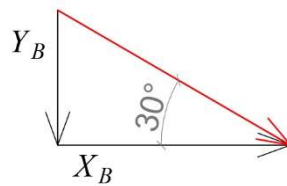
**Fig. 16.6**

Conoscendo il valore delle componenti verticali delle reazioni vincolari nell'asta1 ed imponendo l'equilibrio a traslazione verticale, determiniamo le componenti verticali delle rimanenti reazioni vincolari.



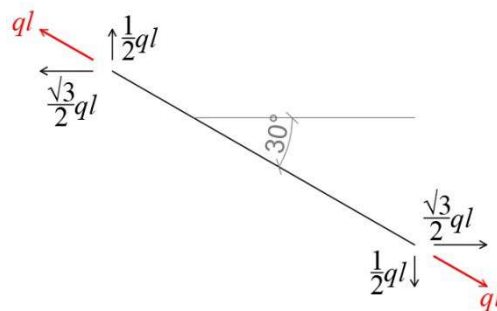
**Fig. 16.7** Equilibrio a traslazione verticale

Per determinare le componenti orizzontali delle reazioni vincolari, dobbiamo banalmente ricordare che la reazione vincolare sull'asta2 è parallela all'asse, dato il carattere reticolare dell'asta medesima. Pertanto tra la reazione vincolare e le sue componenti orizzontale e verticale, sussistono semplici relazioni trigonometriche, illustrate nella figura che segue:



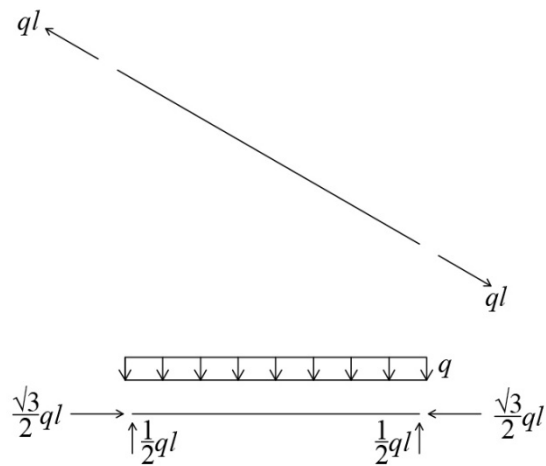
$$X_B = Y_B \cdot \cotg 30 = Y_B \cdot \sqrt{3}$$

Le reazioni vincolari sono dunque le seguenti, ove in nero sono rappresentate le componenti verticali e orizzontali delle forze, rappresentate in rosso:



**Fig. 16.8** Reazioni vincolari dell'asta reticolare e loro componenti

A questo punto è possibile determinare tutte le reazioni vincolari:

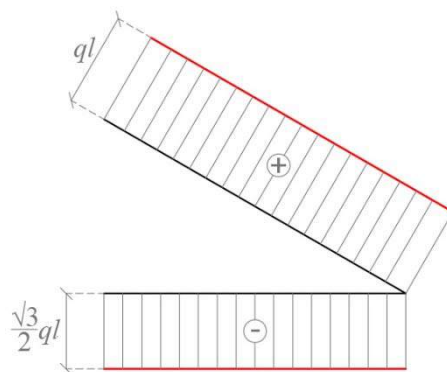


**Fig. 16.9** Reazioni vincolari

**Terzo passo:** Determinazione dei diagrammi delle sollecitazione

*Sforzo assiale*

|              |           |                  |                       |  |                                   |
|--------------|-----------|------------------|-----------------------|--|-----------------------------------|
| <b>asta1</b> | $q_1 = 0$ | $N_1 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $N_1(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} ql$ |
| <b>asta2</b> | $q_1 = 0$ | $N_2 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $N_2(0) = +ql$                    |



**Fig. 16.10** Diagramma dello sforzo normale

Sforzo di taglio

|              |                         |                         |                       |  |                          |
|--------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------|--|--------------------------|
| <b>asta1</b> | $q_2 = \text{costante}$ | $T_1 = \text{lineare}$  | 2 condizioni al bordo |  | $T_1(0) = -\frac{ql}{2}$ |
|              |                         |                         |                       |  | $T_1(l) = +\frac{ql}{2}$ |
| <b>asta2</b> | $q_2 = 0$               | $T_2 = \text{costante}$ | 1 condizione al bordo |  | $T_2(0) = 0$             |

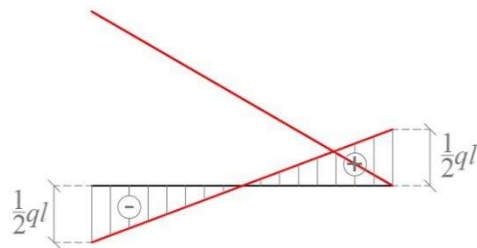
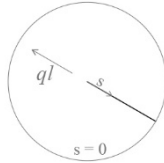


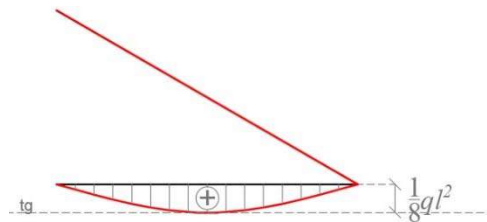
Fig. 16.11 Diagramma dello sforzo di taglio

Momento flettente

|              |                        |                           |                        |  |                                   |
|--------------|------------------------|---------------------------|------------------------|--|-----------------------------------|
| <b>asta1</b> | $T_1 = \text{lineare}$ | $M_1 = \text{parabolico}$ | 3 condizioni assegnate |  | $M_1(0) = 0$                      |
|              |                        |                           |                        |  | $M_1(l) = 0$                      |
|              |                        |                           |                        |  | $T_1\left(\frac{l}{2}\right) = 0$ |

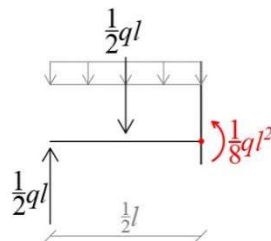
|              |           |                  |                       |   |              |
|--------------|-----------|------------------|-----------------------|---|--------------|
| <b>asta2</b> | $T_2 = 0$ | $M_2 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $M_2(0) = 0$ |
|--------------|-----------|------------------|-----------------------|---|--------------|

La linearità del taglio implica l'andamento parabolico del momento. Le tre informazioni individuate per disegnare la parabola sono state ricercate nelle condizioni al bordo e nel diagramma del taglio. Infatti dove il taglio ha valore nullo, il momento ha tangente orizzontale e questo ci consente di disegnare il diagramma del momento come segue:



**Fig. 16.12** Diagramma del momento flettente

Per conoscere il valore massimo del momento, che si attinge in mezzeria, effettuiamo un taglio virtuale nella sezione di mezzeria e determiniamo il valore del momento necessario a garantire l'equilibrio a rotazione della parte individuata dal taglio virtuale:



**Fig. 16.13** Equilibrio

## ESERCIZIO 17

Si consideri la seguente struttura isostatica, costituita da due sottostrutture: un'asta orizzontale (che verrà indicata con il pedice 1) doppiamente appoggiata, sul cui asse agisce una forza concentrata e un'asta inclinata di  $30^\circ$  lungo l'orizzontale (che verrà indicata con il pedice 2), collegata alla prima da una cerniera.

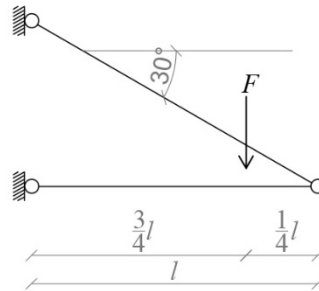


Fig. 17.1 Schema statico

**Primo passo:** Riconoscere il carattere reticolare di un'asta

L'asta1 e l'asta2 sono entrambe rettilinee e vincolate ai due estremi con due cerniere; però l'asta1 subisce l'azione di una forza concentrata sul suo asse e questo esclude la possibilità che si tratti di un'asta reticolare. Invece l'asta2, non presenta carichi lungo l'asse, quindi si può affermare che l'asta2 è un'asta reticolare e di conseguenza sappiamo che è soggetta a solo sforzo assiale, o di trazione (a) o di compressione (b).

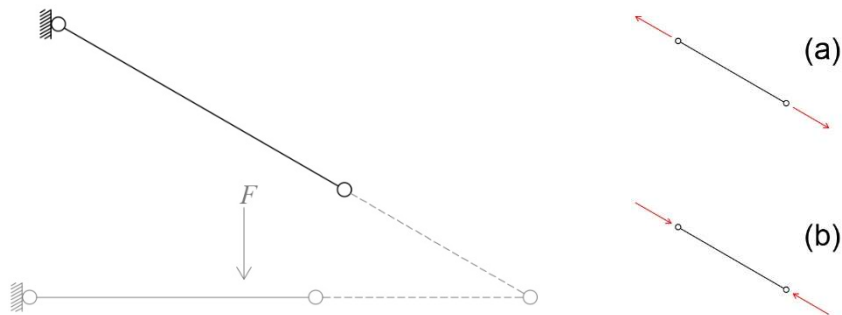


Fig. 17.2

La forza concentrata spinge verso il basso l'asta1, che è sostenuto dall'asta2, a sua volta tirata verso il basso. Per questo motivo intuitivamente ci aspetteremo una trazione dell'asta reticolare.

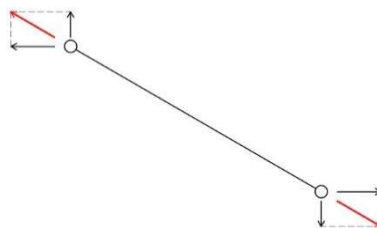
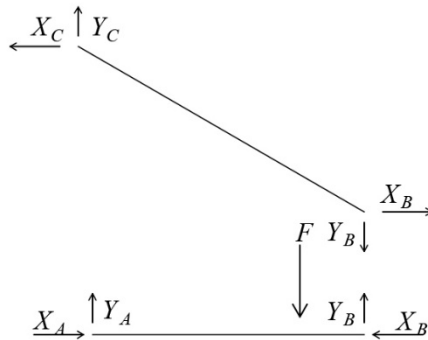


Fig. 17.3 Asta reticolare tesa



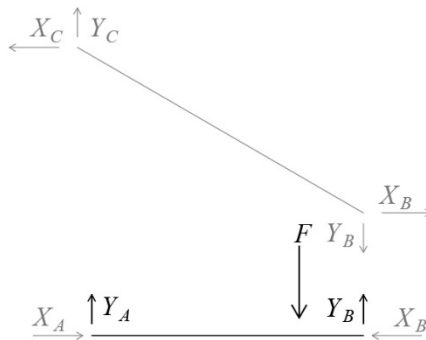
**Secondo passo:** Determinazione delle reazioni vincolari

Alla luce di quanto appena detto, esplicitiamo le reazioni vincolari.



**Fig. 17.4**

La struttura contiene un sottoproblema isostatico, infatti l'asta1 risulta isostatica per forze trasversali.



**Fig. 17.5**

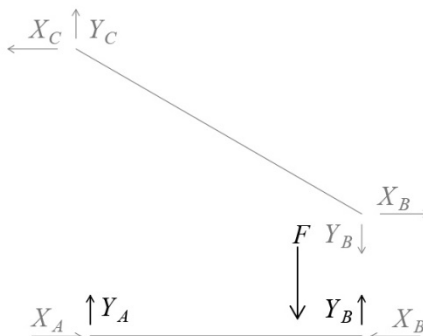
Riconosciuta l'isostaticità alle forze trasversali dell'asta1, determiniamo per prime  $Y_A$  e  $Y_B$ , imponendo l'equilibrio a traslazione verticale e imponendo l'equilibrio a rotazione, applicando il principio della leva di Archimede.

$$\begin{cases} Y_A + Y_B = F \\ Y_A \cdot \frac{3}{4}L = Y_B \cdot \frac{L}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_A + Y_B = F \\ 3Y_A = Y_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4Y_A = F \\ 3Y_A = Y_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_A = \frac{F}{4} \\ Y_B = \frac{3}{4}F \end{cases}$$



**Fig. 17.6**

Conoscendo il valore delle componenti verticali delle reazioni vincolari nell'asta1, determiniamo tutte le componenti verticali delle rimanenti reazioni vincolari.

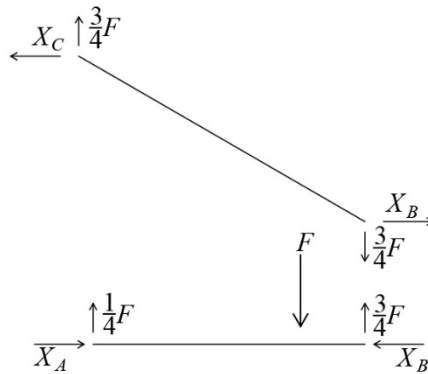
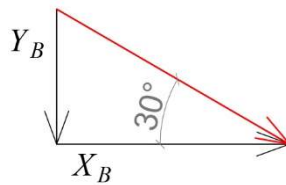


Fig. 17.7 Equilibrio a traslazione verticale

Per determinare le componenti orizzontali delle reazioni vincolari, dobbiamo semplicemente ricordare che la reazione vincolare sull'asta2 è parallela all'asse, dato il carattere reticolare dell'asta medesima. Pertanto tra la reazione vincolare e le sue componenti orizzontale e verticale, sussistono semplici relazioni trigonometriche, illustrate nella figura che segue:



$$X_B = Y_B \cdot \cotg 30$$

quindi:

$$X_B = \sqrt{3} \cdot Y_B$$

Le reazioni vincolari sono dunque le seguenti, ove in nero sono rappresentate le componenti verticali e orizzontali delle forze, rappresentate in rosso:

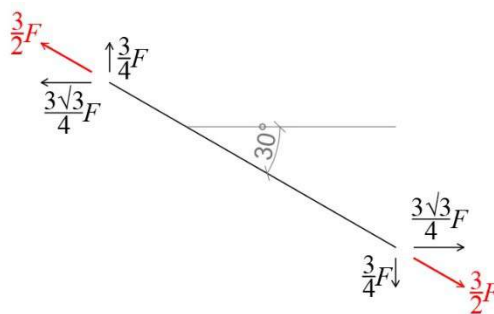


Fig. 17.8 Reazioni vincolari dell'asta reticolare e loro componenti

A questo punto è possibile determinare tutte le reazioni vincolari:

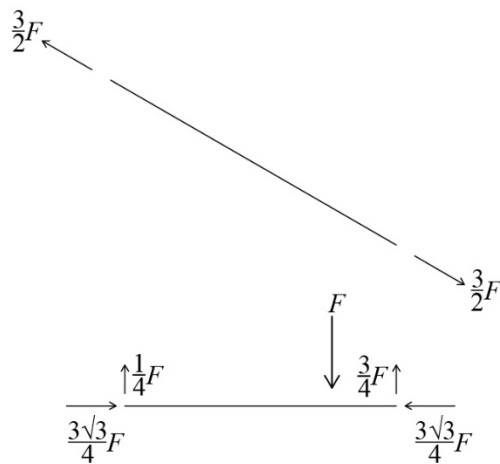


Fig. 17.9 Reazioni vincolari

**Terzo passo:** Determinazione dei diagrammi delle sollecitazione

*Sforzo assiale*

|              |           |                  |                       |  |                                  |
|--------------|-----------|------------------|-----------------------|--|----------------------------------|
| <b>asta1</b> | $q_1 = 0$ | $N_1 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $N_1(0) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}F$ |
| <b>asta2</b> | $q_1 = 0$ | $N_2 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $N_2(0) = +\frac{3}{2}F$         |

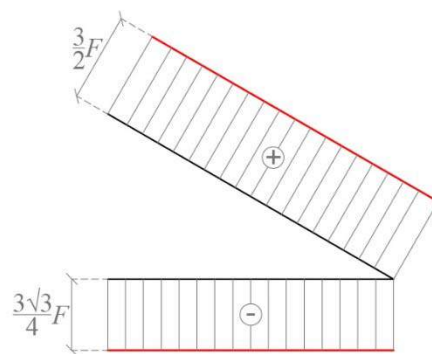


Fig. 17.10 Diagramma dello sforzo normale

## Sforzo di taglio

La forza concentrata sull'asta1 determina la suddivisione dell'asta in due tratti regolari, come mostra la figura seguente:

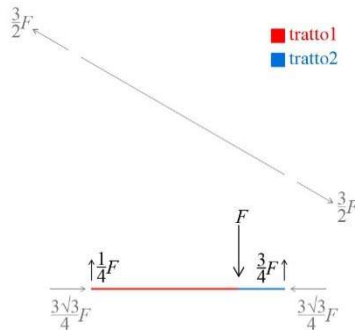


Fig. 17.11 Tratti regolari

|                          |           |                  |                       |  |                         |
|--------------------------|-----------|------------------|-----------------------|--|-------------------------|
| <b>asta1</b><br>tratto 1 | $q_2 = 0$ | $T_1 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $T_1(0) = -\frac{F}{4}$ |
| <b>asta1</b><br>tratto 2 | $q_2 = 0$ | $T_1 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $T_1(l) = +\frac{3}{4}$ |
| <b>asta2</b>             | $q_2 = 0$ | $T_2 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $T_2(0) = 0$            |

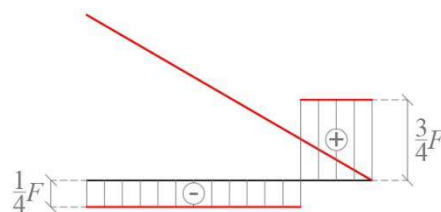


Fig. 17.12 Diagramma dello sforzo di taglio

Momento flettente

|                                 |                         |                         |                        |  |   |
|---------------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|--|---|
| <b>asta1</b><br><b>tratto 1</b> | $T_1 = \text{costante}$ | $M_1 = \text{lineare}$  | 2 condizioni assegnate |  | $M_1(0) = 0$                                    |
|                                 |                         |                         |                        |  | $M_1\left(\frac{3}{4}l\right) = \frac{3}{16}Fl$ |
| <b>asta1</b><br><b>tratto 2</b> | $T_1 = \text{costante}$ | $M_1 = \text{lineare}$  | 2 condizioni assegnate |  | $M_1\left(\frac{3}{4}l\right) = \frac{3}{16}Fl$ |
|                                 |                         |                         |                        |  | $M_1(l) = 0$                                    |
| <b>asta2</b>                    | $T_2 = 0$               | $M_2 = \text{costante}$ | 1 condizione al bordo  |  | $M_2(0) = 0$                                    |

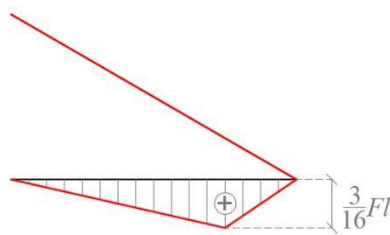
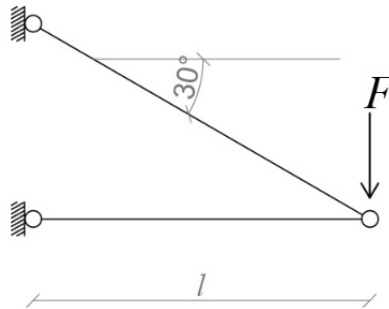


Fig. 19.10 Diagramma del momento flettente

## ESERCIZIO 18

Si consideri la seguente struttura isostatica, costituita da due sottostrutture: un'asta orizzontale (che verrà indicata con il pedice 1) doppiamente appoggiata ed un'asta inclinata di  $30^\circ$  lungo l'orizzontale (che verrà indicata con il pedice 2), collegata alla prima da una cerniera, sulla quale è concentrata una forza  $F$ .

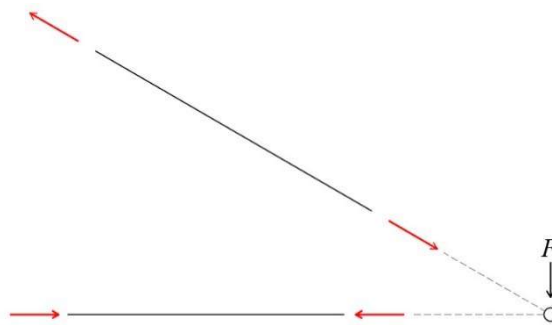


*Fig. 18.1 Schema statico*

**Primo passo:** Riconoscere il carattere reticolare di un'asta

L'asta1 e l'asta2 sono entrambe rettilinee, vincolate ai due estremi con due cerniere e non presentano carichi di nessuna natura lungo il loro asse, quindi si può affermare che entrambe le aste sono reticolari, ossia soggette a solo sforzo assiale.

La forza concentrata spinge verso il basso l'asta2, cercando di imprimerle una rotazione oraria; ma l'asta1 blocca tale la rotazione. Per bloccare questo cinematicismo nascono sforzi di trazione nell'asta2 e sforzi di compressione nell'asta1.

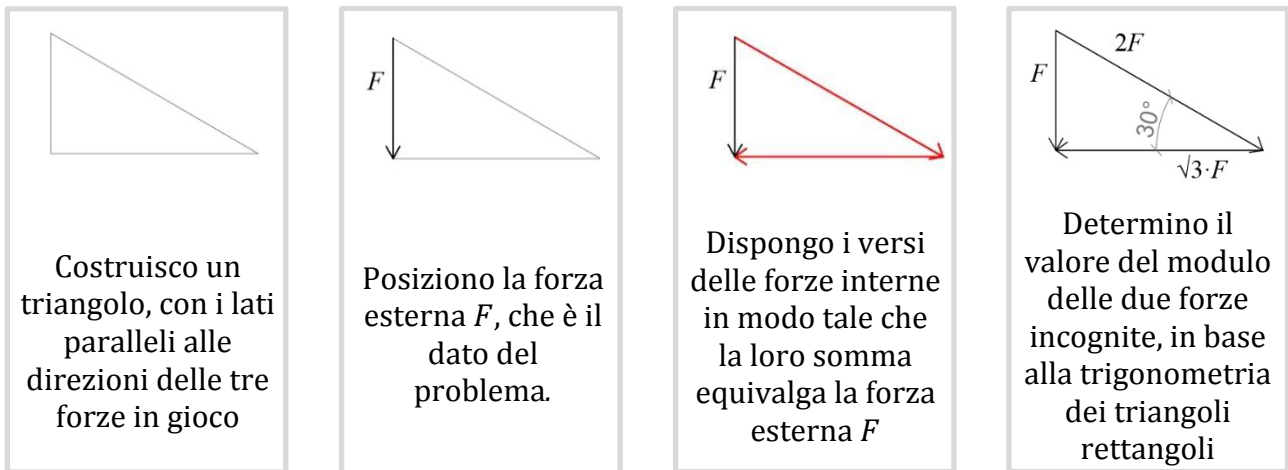


*Fig. 18.2*

**Secondo passo:** Determinazione delle reazioni vincolari

Per determinare le reazioni vincolari di questa struttura reticolare utilizziamo il triangolo delle forze, imponendo l'equivalenza della forza esterna al sistema di forze interne alle aste e quindi parallele agli assi rispettivi.

EQUIVALENZA:



Abbiamo così trovato verso e modulo di ogni reazione vincolare.

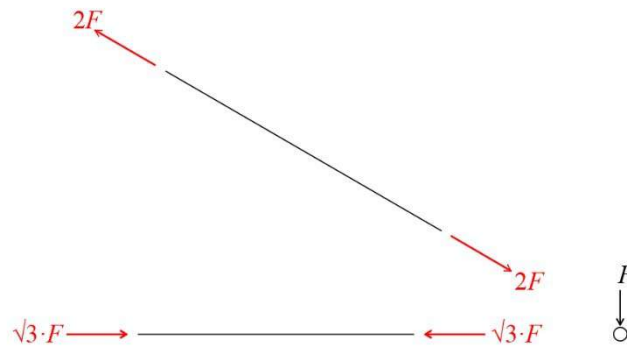
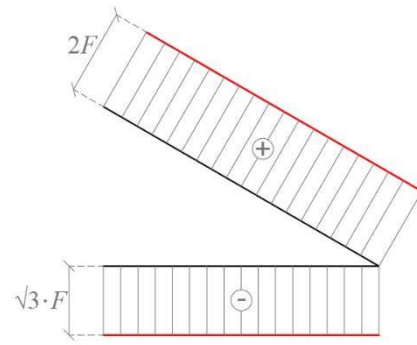


Fig. 18.3

**Terzo passo:** Determinazione del diagramma dello sforzo assiale

|       |           |                  |                       |  |                       |
|-------|-----------|------------------|-----------------------|--|-----------------------|
| asta1 | $q_1 = 0$ | $N_1 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $N_1(0) = -\sqrt{3}F$ |
| asta2 | $q_1 = 0$ | $N_2 = costante$ | 1 condizione al bordo |  | $N_2(0) = +2F$        |

La struttura ha un carattere reticolare e quindi le aste non presentano sollecitazioni di taglio o di momento flettente.

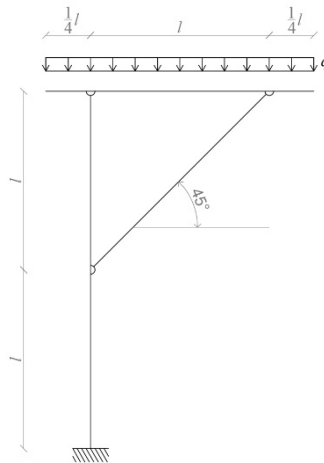


**Fig. 18.4** Diagramma dello sforzo normale



## ESERCIZIO 19

Si consideri la seguente pensilina, realizzata con una struttura isostatica, costituita da tre sottostrutture: un'asta orizzontale (che verrà indicata con il pedice 1) doppiamente appoggiata, su cui insiste un carico uniformemente distribuito, un'asta inclinata di  $45^\circ$  lungo l'orizzontale (che verrà indicata con il pedice 2) e un'asta verticale, incastrata a terra (che verrà indicata con il pedice 3).



**Fig. 19.1** Schema statico

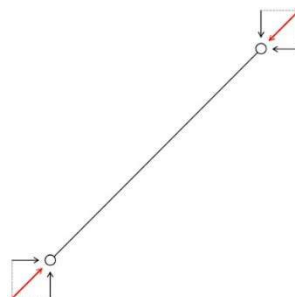
**Primo passo:** Riconoscere il carattere reticolare di un'asta

L'asta1 è soggetta ad un carico distribuito, perciò non può essere un'asta reticolare; l'asta 3 è incastrata a terra e quindi non può comportarsi come un'asta reticolare; invece l'asta2 è un'asta rettilinea, vincolata ai due estremi con due cerniere e non presenta carichi lungo il suo asse. Pertanto l'asta2 è un'asta reticolare e di conseguenza è soggetta a solo sforzo assiale, o di trazione (a) o di compressione (b).



**Fig. 19.2**

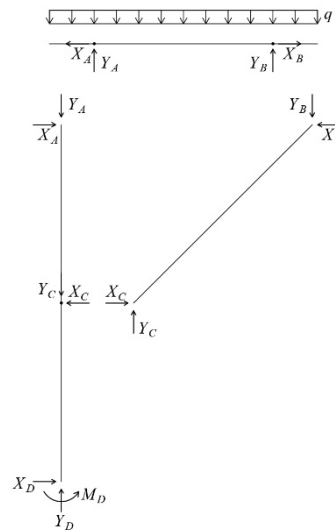
Il carico distribuito spinge verso il basso l'asta1, che è collegata all'asta2; di conseguenza quest'ultima viene messa in compressione.



**Fig. 19.3**

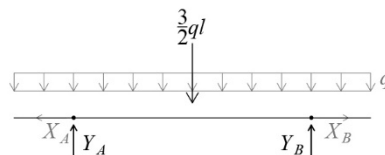
**Secondo passo:** Determinazione delle reazioni vincolari

Alla luce di quanto appena detto, esplicitiamo le reazioni vincolari.



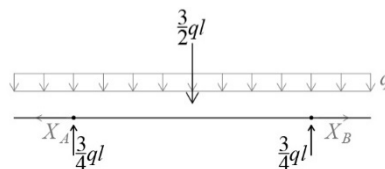
**Fig. 19.4**

La struttura è costituita da tre sottostrutture iperstatiche, perché ogni asta ha un numero di incognite superiori rispetto al numero di equazioni di equilibrio. Ma l'asta1 presenta un sottoproblema isostatico; infatti risulta isostatica per forze trasversali.



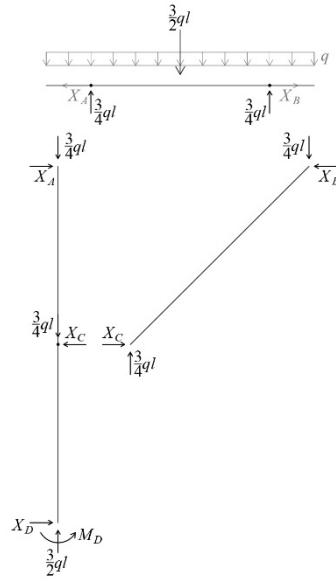
**Fig. 19.5**

Per l'evidente simmetria geometrica e meccanica dell'asta1,  $Y_A$  e  $Y_B$  sono immediatamente determinate, sapendo che la risultante  $\frac{3}{2}ql$  del carico si distribuisce in parti uguali.



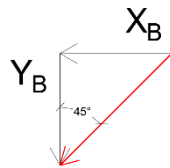
**Fig. 19.6**

Conoscendo il valore delle componenti verticali delle reazioni vincolari nell'asta1 ed imponendo l'equilibrio a traslazione verticale dell'intera struttura, determiniamo le componenti verticali delle rimanenti reazioni vincolari.



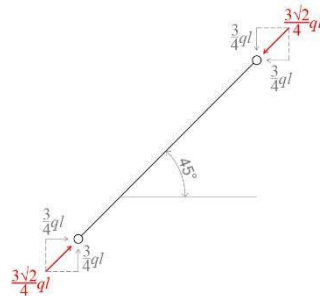
**Fig. 19.7**

Per determinare le componenti orizzontali delle reazioni vincolari, dobbiamo ricordare che la reazione vincolare sull'asta2 è parallela all'asse, dato il carattere reticolare dell'asta medesima. Pertanto tra la reazione vincolare e le sue componenti orizzontale e verticale, sussistono semplici relazioni trigonometriche, illustrate nella figura che segue:



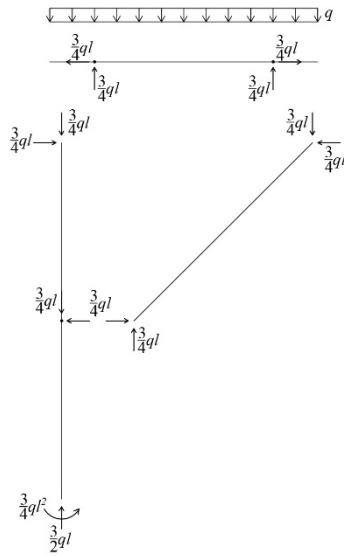
$$X_B = Y_B \cdot \cotg 45 = Y_B$$

Le reazioni vincolari sono dunque le seguenti, ove in grigio sono rappresentate le componenti verticali e orizzontali delle forze, rappresentate in rosso:



**Fig. 19.8** Reazioni vincolari dell'asta reticolare e loro componenti

A questo punto è possibile determinare tutte le reazioni vincolari:



**Fig. 19.9** Reazioni vincolari

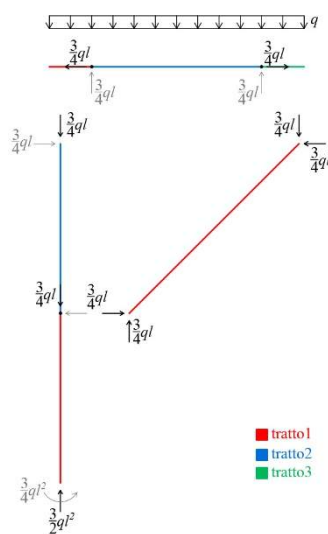
**Terzo passo:** Determinazione dei diagrammi delle sollecitazione

*Sforzo assiale*

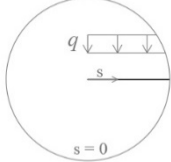
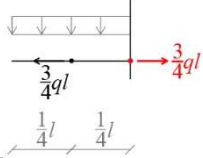
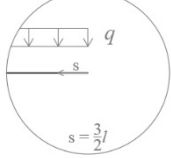
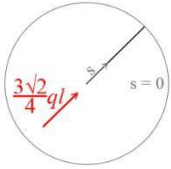
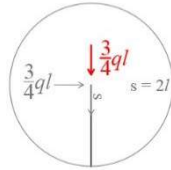
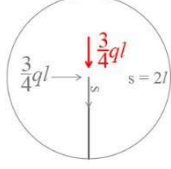
Il carico distribuito  $q_1$  è nullo su tutte le aste, quindi lo sforzo normale è sempre descritto da una funzione costante. Però per disegnarne il diagramma è indispensabile anche tener conto della presenza di forze concentrate sulle aste che le dividono in più tratti regolari, in ognuno dei quali lo sforzo assiale può assumere valori differenti.

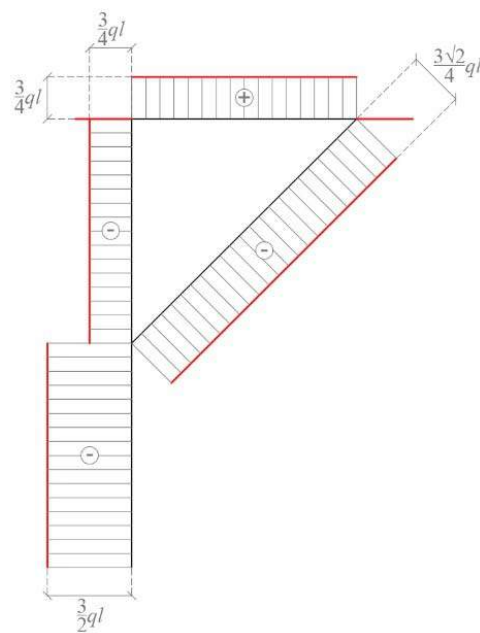
Sull'asta1 agiscono due forze concentrate orizzontali, che sono le componenti orizzontali delle reazioni vincolari in A e in B. Le due forze concentrate individuano 3 tratti regolari nell'asta1. Anche sull'asta3 c'è una forza concentrata in asse alla trave, che divide la stessa in due tratti regolari.

Si avrà dunque:



**Fig. 19.10** Tratti regolari

|                         |           |                  |                           |  |   |
|-------------------------|-----------|------------------|---------------------------|--|---|
| <b>asta1</b><br>tratto1 | $q_1 = 0$ | $N_1 = costante$ | 1 condizione<br>al bordo  |    | $N_1(0) = 0$                                    |
| <b>asta1</b><br>tratto2 | $q_1 = 0$ | $N_1 = costante$ | 1 condizione<br>assegnata |    | $N_1\left(\frac{1}{2}l\right) = +\frac{3}{4}ql$ |
| <b>asta1</b><br>tratto3 | $q_1 = 0$ | $N_1 = costante$ | 1 condizione<br>al bordo  |    | $N_1\left(\frac{3}{2}l\right) = 0$              |
| <b>asta2</b>            | $q_1 = 0$ | $N_2 = costante$ | 1 condizione<br>al bordo  |    | $N_2(0) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}ql$               |
| <b>asta3</b><br>tratto1 | $q_1 = 0$ | $N_3 = costante$ | 1 condizione<br>al bordo  |   | $N_3(0) = -\frac{3}{2}ql$                       |
| <b>asta3</b><br>tratto2 | $q_1 = 0$ | $N_3 = costante$ | 1 condizione<br>al bordo  |  | $N_3(2l) = -\frac{3}{4}ql$                      |



**Fig. 19.11** Diagramma dello sforzo normale

## Sforzo di taglio

Il carico distribuito  $q_2$  è presente solo sull'asta1 ed ha un valore costante, quindi su quell'asta lo sforzo di taglio è descritto da una funzione lineare .

Però anche lo sforzo di taglio è condizionato dalla presenza di forze concentrate trasversali rispetto all'asse della trave; nello specifico: sull'asta1 agiscono due forze concentrate che individuano 3 tratti regolari, mentre sull'asta3 c'è una sola forza concentrata perpendicolare all'asse e che divide la trave in due tratti regolari.

Si avrà dunque:

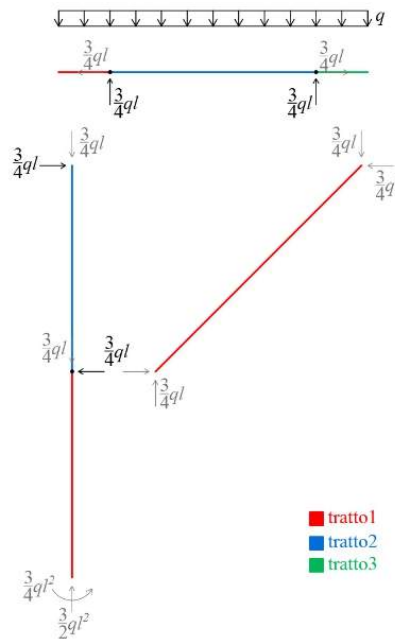
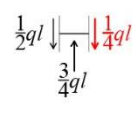
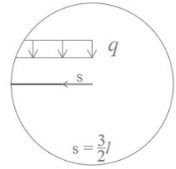
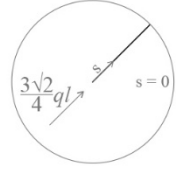
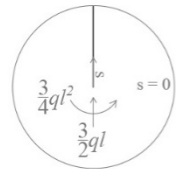
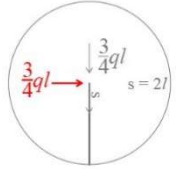


Fig. 19.12 Tratti regolari

|                                 |                                    |                                   |                               |  |  |
|---------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|--|--|
| <p><b>asta1</b><br/>tratto1</p> | <p><math>q_2 = costante</math></p> | <p><math>T_1 = lineare</math></p> | <p>2 condizioni assegnate</p> |  | <p><math>T_1(0) = 0</math></p> $T_1\left(\frac{l}{4}\right)^- = +\frac{ql}{4}$                   |
| <p><b>asta1</b><br/>tratto2</p> | <p><math>q_2 = costante</math></p> | <p><math>T_1 = lineare</math></p> | <p>2 condizioni assegnate</p> |  | $T_1\left(\frac{l}{4}\right)^+ = -\frac{ql}{2}$ $T_1\left(\frac{5}{4}l\right)^- = +\frac{ql}{2}$ |

|                         |                         |                         |                        |   |  |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|---|--|
| <b>asta1</b><br>tratto3 | $q_2 = \text{costante}$ | $T_1 = \text{lineare}$  | 2 condizioni assegnate |  | $T_1 \left( \frac{5}{4} l \right)^+ = -\frac{ql}{4}$ |
|                         |                         |                         |                        |   | $T_1 \left( \frac{3}{2} l \right) = 0$               |
| <b>asta2</b>            | $q_2 = 0$               | $T_2 = \text{costante}$ | 1 condizione al bordo  |   | $T_2(0) = 0$   |
| <b>asta3</b><br>tratto1 | $q_2 = 0$               | $T_3 = \text{costante}$ | 1 condizione al bordo  |   | $T_3(0) = 0$   |
| <b>asta3</b><br>tratto2 | $q_2 = 0$               | $T_3 = \text{costante}$ | 1 condizione al bordo  |  | $T_3(2l) = -\frac{3}{4} ql$                          |

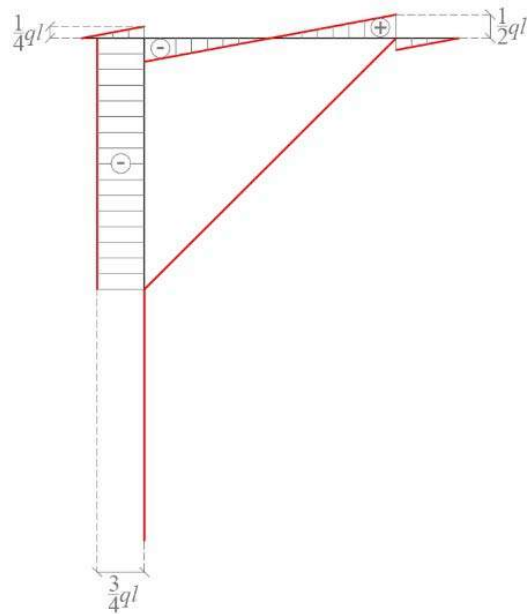
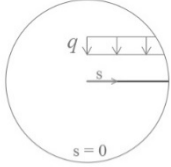
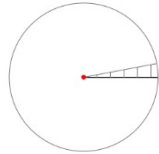
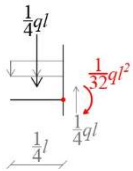
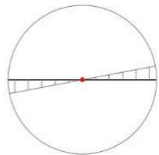
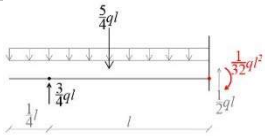
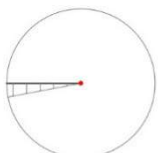
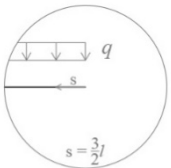
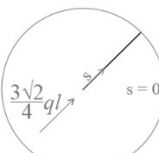
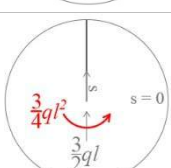


Fig. 19.13 Diagramma dello sforzo di taglio

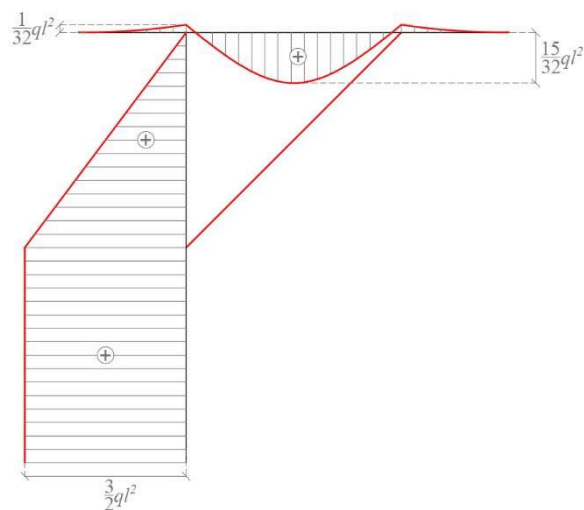
## Momento flettente

Sull'asta1 la funzione taglio è lineare a tratti, quindi la funzione momento è parabolica a tratti: sarebbero quindi necessarie tre informazioni per ognuno dei tre tratti regolari dell'asta; in realtà, dato che nelle singolarità indotte dalle forze concentrate la funzione momento è continua, serviranno in tutto 7 informazioni, ricavabili dalle condizioni al bordo, dal diagramma del taglio e imponendo l'equilibrio a rotazione di parti specifiche dell'asta.

|                         |                        |                           |                        |  |   |
|-------------------------|------------------------|---------------------------|------------------------|--|---|
| <b>asta1</b><br>tratto1 | $T_1 = \text{lineare}$ | $M_1 = \text{parabolico}$ | 3 condizioni assegnate |    | $M_1(0) = 0$                                      |
|                         |                        |                           |                        |    | $T_1(0) = 0$                                      |
| <b>asta1</b><br>tratto2 | $T_1 = \text{lineare}$ | $M_1 = \text{parabolico}$ | 3 condizioni assegnate |  | $M_1\left(\frac{l}{4}\right) = -\frac{ql^2}{32}$  |
|                         |                        |                           |                        |  | $T_1\left(\frac{3}{4}l\right) = 0$                |
| <b>asta1</b><br>tratto3 | $T_1 = \text{lineare}$ | $M_1 = \text{parabolico}$ | 3 condizioni assegnate |  | $M_1\left(\frac{5}{4}l\right) = -\frac{ql^2}{32}$ |
|                         |                        |                           |                        |  | $T_1(0) = 0$                                      |
| <b>asta2</b>            | $T_2 = 0$              | $M_2 = \text{costante}$   | 1 condizione al bordo  |  | $M_2\left(\frac{3}{2}l\right) = 0$                |
|                         |                        |                           |                        |  | $M_2(0) = 0$                                      |
| <b>asta3</b><br>tratto1 | $T_3 = 0$              | $M_3 = \text{costante}$   | 1 condizione al bordo  |  | $M_3(0) = \frac{3}{4}ql^2$                        |

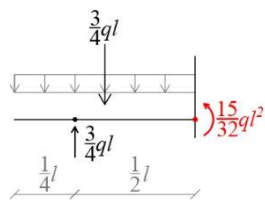


|                  |                  |                 |                        |  |                             |
|------------------|------------------|-----------------|------------------------|--|-----------------------------|
| asta3<br>tratto2 | $T_3 = costante$ | $M_3 = lineare$ | 2 condizioni assegnate |  | $M_3(l) = \frac{3}{4} ql^2$ |
|                  |                  |                 |                        |  | $M_3(2l) = 0$               |



**Fig. 19.14** Diagramma del momento flettente

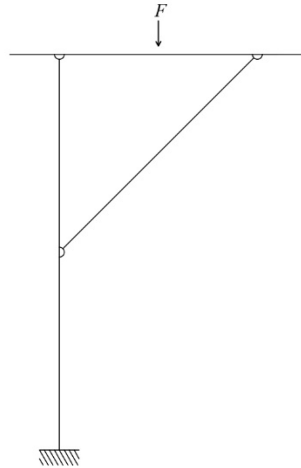
Per conoscere il valore massimo del momento sull'asta1, che si attinge in mezzeria, effettuiamo un taglio virtuale nella sezione di mezzeria e determiniamo il valore del momento necessario a garantire l'equilibrio a rotazione della parte individuata dal taglio virtuale:



**Fig. 19.15** Equilibrio

## ESERCIZIO 20

Si consideri la seguente pensilina, realizzata con una struttura isostatica, costituita da tre sottostrutture: un'asta orizzontale (che verrà indicata con il pedice 1) doppiamente appoggiata, su cui insiste una forza concentrata, un'asta inclinata di  $45^\circ$  lungo l'orizzontale (che verrà indicata con il pedice 2) e un'asta verticale, incastrata a terra (che verrà indicata con il pedice 3).



*Fig. 20.1 Schema statico*

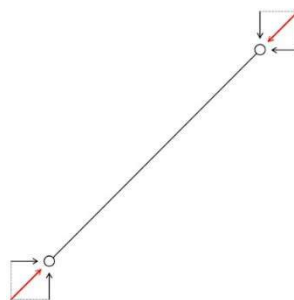
**Primo passo:** Riconoscere il carattere reticolare di un'asta

L'asta1 è soggetta ad una forza concentra sul suo asse, perciò non può essere un'asta reticolare; l'asta 3 è incastrata a terra e quindi non può comportarsi come un'asta reticolare; invece l'asta2 è un'asta rettilinea, vincolata ai due estremi con due cerniere e non presenta carichi lungo il suo asse. Pertanto l'asta2 è un'asta reticolare e di conseguenza è soggetta a solo sforzo assiale, o di trazione (a) o di compressione (b).



*Fig. 20.2*

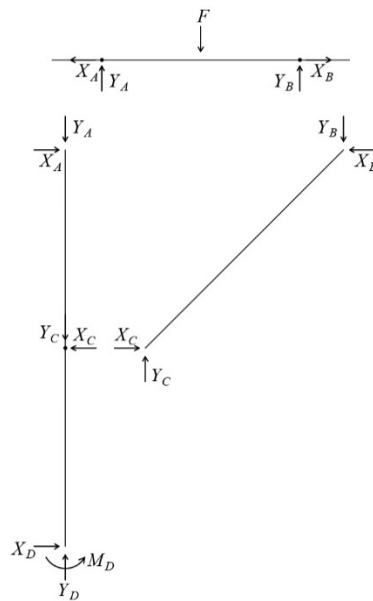
La forza concentrata spinge verso il basso l'asta1, che è collegata all'asta2; di conseguenza quest'ultima viene messa in compressione.



*Fig. 20.3*

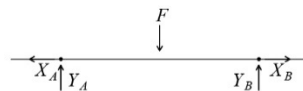
**Secondo passo:** Determinazione delle reazioni vincolari

Alla luce di quanto appena detto, esplicitiamo le reazioni vincolari.



**Fig. 20.4**

La struttura è costituita da tre sottostrutture iperstatiche, perché ogni asta ha un numero di incognite superiori rispetto al numero di equazioni di equilibrio. Ma l'asta1 presenta un sottoproblema isostatico; infatti risulta isostatica per forze trasversali.



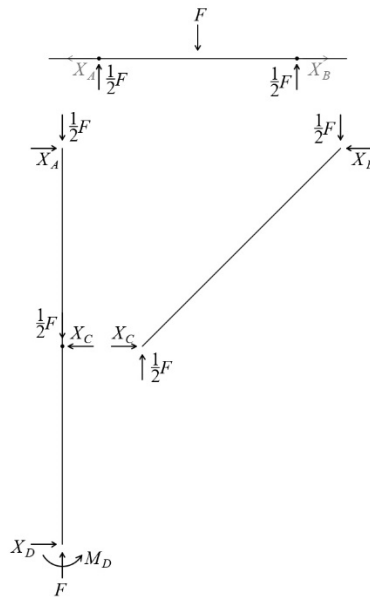
**Fig. 20.5**

Per simmetria geometrica e meccanica dell'asta1, le reazioni vincolari  $Y_A$  e  $Y_B$  sono immediatamente determinate, sapendo che la forza  $F$  del carico si distribuisce in parti uguali.



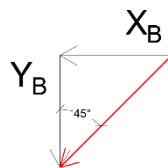
**Fig. 20.6**

Conoscendo il valore delle componenti verticali delle reazioni vincolari nell'asta1 ed imponendo l'equilibrio a traslazione verticale dell'intera struttura, determiniamo le componenti verticali delle rimanenti reazioni vincolari.



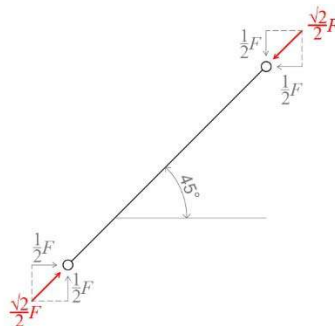
**Fig. 20.7**

Per determinare le componenti orizzontali delle reazioni vincolari, dobbiamo ricordare che la reazione vincolare sull'asta2 è parallela all'asse, dato il carattere reticolare dell'asta medesima. Pertanto tra la reazione vincolare e le sue componenti orizzontale e verticale sussistono semplici relazioni trigonometriche, illustrate nella figura che segue:



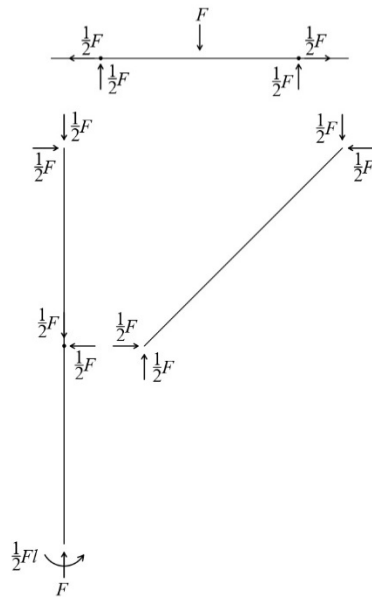
$$X_B = Y_B \cdot \cotg 45 = Y_B$$

Le reazioni vincolari sono dunque le seguenti, ove in grigio sono rappresentate le componenti verticali e orizzontali delle forze, rappresentate in rosso:



**Fig. 20.8** Reazioni vincolari dell'asta reticolare e loro componenti

A questo punto è possibile determinare tutte le reazioni vincolari:



**Fig. 20.9** Reazioni vincolari

**Terzo passo:** Determinazione dei diagrammi delle sollecitazione

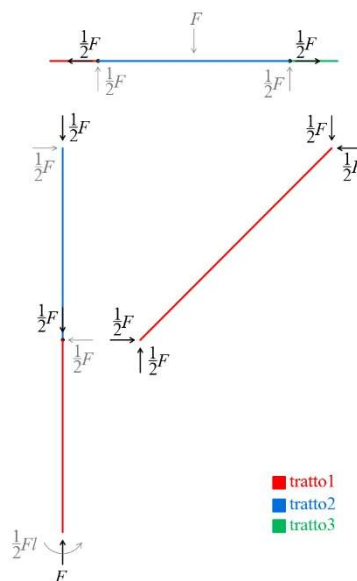
*Sforzo assiale*

Il carico distribuito  $q_1$  è nullo su tutte le aste, quindi lo sforzo normale è sempre descritto da una funzione costante. Però per disegnare il diagramma è indispensabile anche tener conto della presenza di forze concentrate sulle aste che le dividono in più tratti regolari, in ognuno dei quali lo sforzo assiale assume valori diversi.

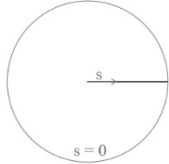
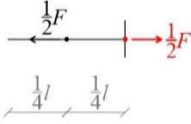
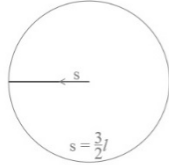
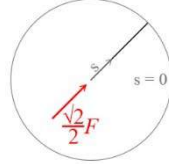
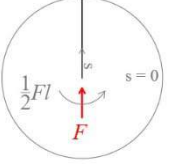
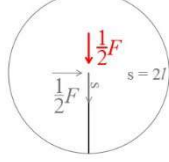
Sull'asta1 agiscono due forze concentrate orizzontali, che sono le componenti orizzontali delle reazioni vincolari in A e in B. Le due forze concentrate individuano 3 tratti regolari nell'asta1.

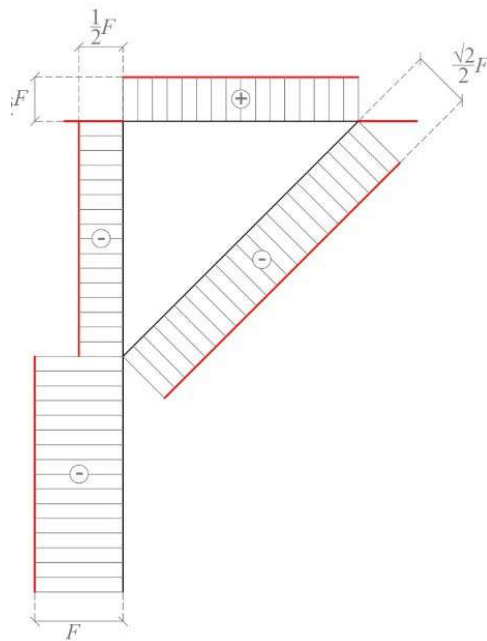
Anche sull'asta3 c'è una forza concentrata in asse che la divide in due tratti regolari.

Si avrà dunque:



**Fig. 20.10** Tratti regolari

|                         |           |                  |                           |  |  |
|-------------------------|-----------|------------------|---------------------------|--|--|
| <b>asta1</b><br>tratto1 | $q_1 = 0$ | $N_1 = costante$ | 1 condizione<br>al bordo  |    | $N_1(0) = 0$                                   |
| <b>asta1</b><br>tratto2 | $q_1 = 0$ | $N_1 = costante$ | 1 condizione<br>assegnata |    | $N_1\left(\frac{1}{2}l\right) = +\frac{1}{2}F$ |
| <b>asta1</b><br>tratto3 | $q_1 = 0$ | $N_1 = costante$ | 1 condizione<br>al bordo  |    | $N_1\left(\frac{3}{2}l\right) = 0$             |
| <b>asta2</b>            | $q_1 = 0$ | $N_2 = costante$ | 1 condizione<br>al bordo  |    | $N_2(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}F$                |
| <b>asta3</b><br>tratto1 | $q_1 = 0$ | $N_3 = costante$ | 1 condizione<br>al bordo  |   | $N_3(0) = -F$                                  |
| <b>asta3</b><br>tratto2 | $q_1 = 0$ | $N_3 = costante$ | 1 condizione<br>al bordo  |  | $N_3(2l) = -\frac{F}{2}$                       |



**Fig. 20.11** Diagramma dello sforzo normale

## Sforzo di taglio

Il carico distribuito  $q_2$  è nullo su tutte le aste, quindi lo sforzo di taglio è sempre descritto da una funzione costante. Però per disegnare il diagramma è indispensabile anche tener conto della presenza di forze concentrate sulle aste che le dividono in più tratti regolari, in ognuno dei quali lo sforzo di taglio assume valori diversi.

Sull'asta1 agiscono tre forze concentrate, due sono le componenti orizzontali delle reazioni vincolari in A e in B ed una è la forza agente esterna. Le tre forze concentrate individuano 4 tratti regolari nell'asta1.

Anche sull'asta3 c'è una forza concentrata trasversale all'asse della trave, che la divide in due tratti regolari.

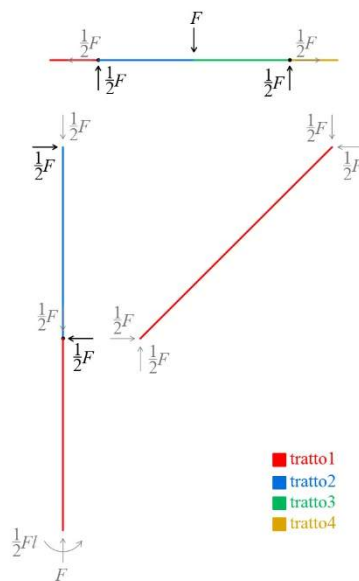
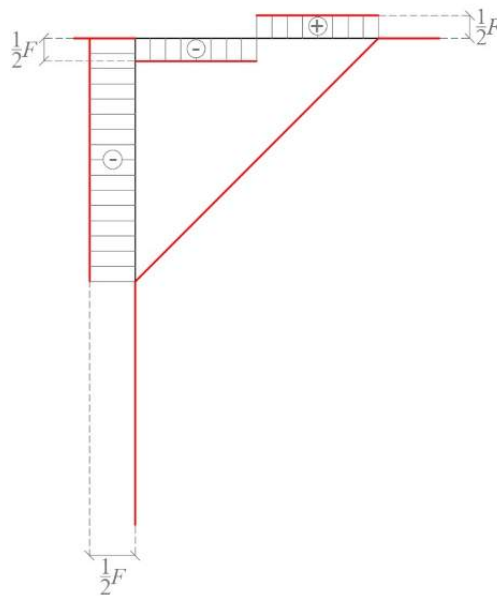


Fig. 20.12

Si avrà dunque:

|                                |           |                  |                        |  |  |
|--------------------------------|-----------|------------------|------------------------|--|--|
| <b>asta1</b><br><b>tratto1</b> | $q_2 = 0$ | $T_1 = costante$ | 1 condizione al bordo  |  | $T_1(0) = 0$   |
| <b>asta1</b><br><b>tratto2</b> | $q_2 = 0$ | $T_1 = costante$ | 1 condizione assegnata |  | $T_1\left(\frac{l}{4}\right) = -\frac{F}{2}$         |
| <b>asta1</b><br><b>tratto3</b> | $q_2 = 0$ | $T_1 = costante$ | 1 condizione assegnata |  | $T_1\left(\frac{3}{4}l\right)^+$<br>$= +\frac{F}{2}$ |

|                         |           |                  |                          |  |                                    |
|-------------------------|-----------|------------------|--------------------------|--|------------------------------------|
| <b>asta1</b><br>tratto4 | $q_2 = 0$ | $T_1 = costante$ | 1 condizione<br>al bordo |  | $T_1\left(\frac{3}{2}l\right) = 0$ |
| <b>asta2</b>            | $q_2 = 0$ | $T_2 = costante$ | 1 condizione<br>al bordo |  | $T_2(0) = 0$                       |
| <b>asta3</b><br>tratto1 | $q_2 = 0$ | $T_3 = costante$ | 1 condizione<br>al bordo |  | $T_3(0) = 0$                       |
| <b>asta3</b><br>tratto2 | $q_2 = 0$ | $T_3 = costante$ | 1 condizione<br>al bordo |  | $T_3(2l) = -\frac{F}{2}$           |



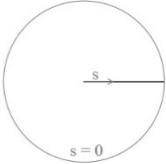

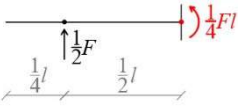
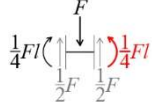

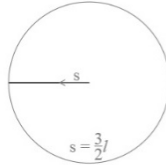
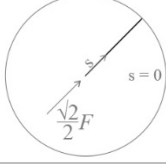
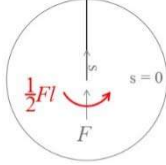
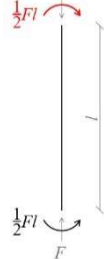
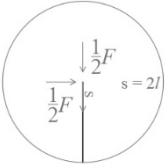
**Fig. 20.13** Diagramma dello sforzo di taglio

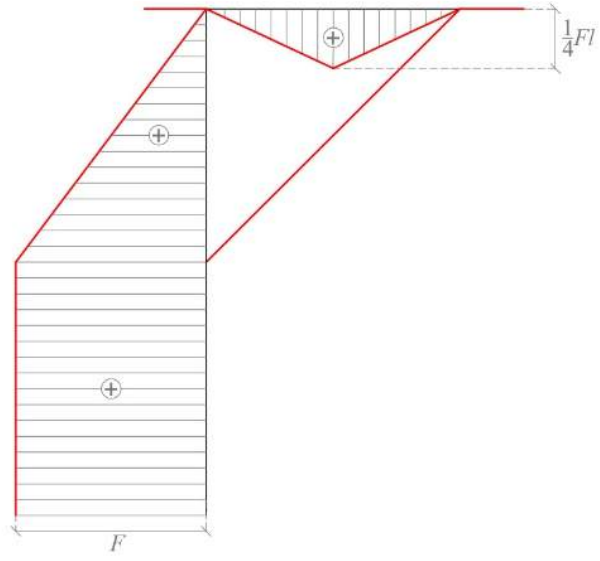
### Momento flettente

La funzione  $T(s)$  è l'opposto della derivata della funzione  $M(s)$ ; quindi nei tratti in cui il taglio è una funzione costantemente nulla, il momento è funzione costante e nei tratti in cui il taglio è funzione costante, il momento è funzione lineare.

In teoria per disegnare il diagramma del momento è necessario conoscere almeno un valore nei tratti in cui è costante, e almeno due valori nei tratti in cui è lineare; in realtà dato che nella singolarità il momento è continuo, serviranno meno informazioni, poiché il valore del momento nel punto in cui agisce la singolarità è comune a due tratti.



|                         |                  |                  |                        |  |  |
|-------------------------|------------------|------------------|------------------------|--|--|
| <b>asta1</b><br>tratto1 | $T_1 = 0$        | $M_1 = costante$ | 1 condizione al bordo  |    | $M_1(0) = 0$                                     |
| <b>asta1</b><br>tratto2 | $T_1 = costante$ | $M_1 = lineare$  | 2 condizioni assegnate |   | $M_1\left(\frac{l}{4}\right) = 0$                |
|                         |                  |                  |                        |    | $M_1\left(\frac{3}{4}l\right)^- = -\frac{Fl}{4}$ |
| <b>asta1</b><br>tratto3 | $T_1 = costante$ | $M_1 = lineare$  | 2 condizioni assegnate |    | $M_1\left(\frac{3}{4}l\right)^+ = -\frac{Fl}{4}$ |
|                         |                  |                  |                        |    | $M_1\left(\frac{5}{4}l\right) = 0$               |
| <b>asta1</b><br>tratto4 | $T_1 = 0$        | $M_1 = costante$ | 1 condizione al bordo  |  | $M_1\left(\frac{3}{2}l\right) = 0$               |
| <b>asta2</b>            | $T_1 = 0$        | $M_1 = costante$ | 1 condizione al bordo  |  | $M_2(0) = 0$                                     |
| <b>asta3</b><br>tratto1 | $T_3 = 0$        | $M_3 = costante$ | 1 condizione assegnata |  | $M_3(0) = +\frac{Fl}{2}$                         |
| <b>asta3</b><br>tratto2 | $T_3 = costante$ | $M_3 = lineare$  | 2 condizioni assegnate |  | $M_3(l) = +\frac{Fl}{2}$                         |
|                         |                  |                  |                        |  | $M_3(2l) = 0$                                    |



**Fig. 20.14** Diagramma del momento flettente