

RISOLUZIONE DI UN TELAIO PIANO

METODO DELLE RIGIDENZE

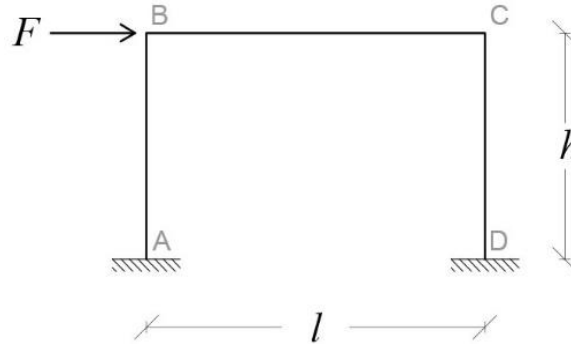


FIG. 01

Dato il seguente schema statico di un telaio piano incastrato a terra e soggetto ad una forza orizzontale F , lo si risolve applicando il metodo delle rigidzze.

Inizialmente si ipotizzano tutti i possibili movimenti dovuti alla forza esterna al fine di determinare le incognite cinematiche.

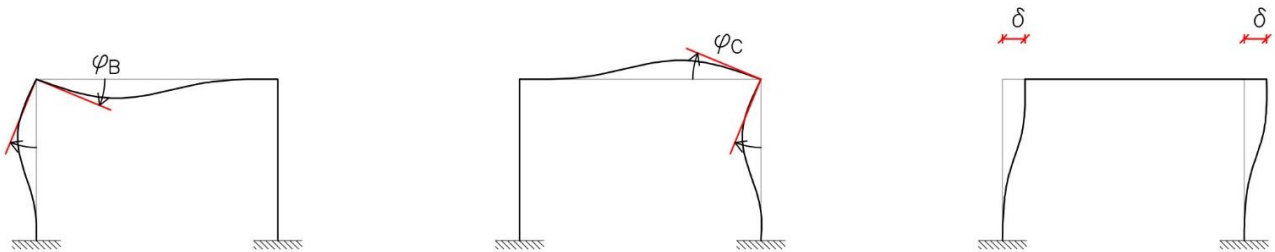


FIG. 02

Si riconoscono gli schemi notevoli associati alle diverse deformate e si ottengono le seguenti sollecitazioni di momento flettente e di taglio:

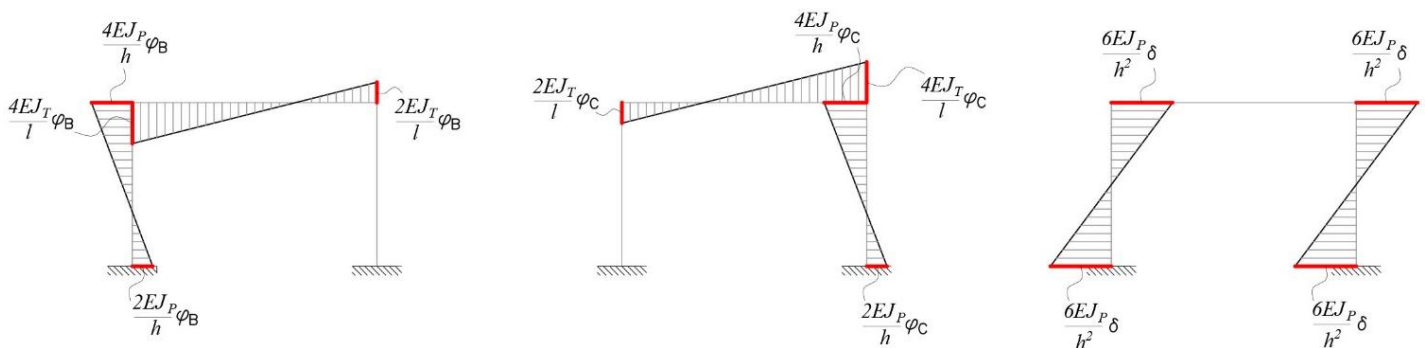


FIG. 03

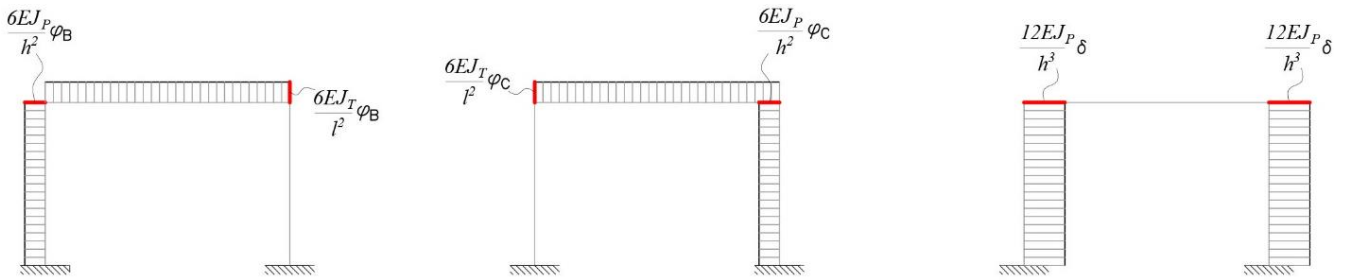


FIG. 04

Poiché si hanno 3 incognite è necessario avere almeno 3 equazioni per trovare il loro valore; perciò si impongono:

- L'equilibrio a rotazione del nodo B
- L'equilibrio a rotazione del nodo C
- L'equilibrio a traslazione orizzontale

Equilibrio a rotazione del nodo B

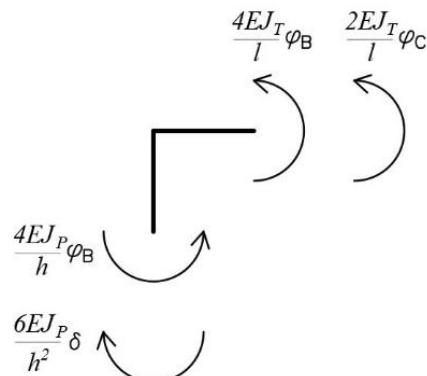


FIG. 05

$$\sum M_B = \left(\frac{4EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h} \right) \varphi_B + \frac{2EJ_T}{l} \varphi_C - \frac{6EJ_P}{h^2} \delta = 0 \quad (1)$$

Equilibrio a rotazione del nodo C

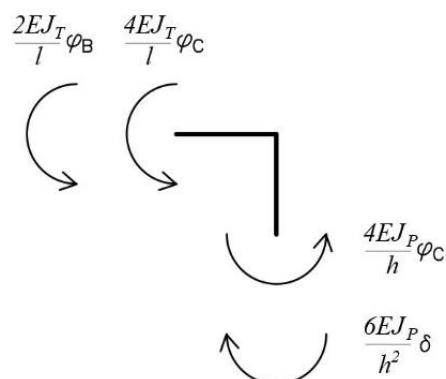


FIG. 06

$$\sum M_C = \left(\frac{4EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h} \right) \varphi_C + \frac{2EJ_T}{l} \varphi_B - \frac{6EJ_P}{h^2} \delta = 0 \quad (2)$$

Equilibrio a traslazione

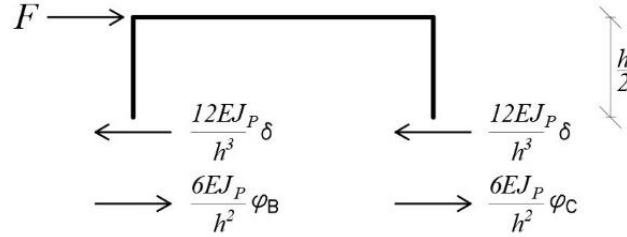


FIG. 07

$$\sum F_x = F - \frac{24EJ_P}{h^3} \delta + \frac{6EJ_P}{h^2} \varphi_B + \frac{6EJ_P}{h^2} \varphi_C = 0 \quad (3)$$

Quindi si ottiene un sistema di 3 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} \left(\frac{4EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h} \right) \varphi_B + \frac{2EJ_T}{l} \varphi_C - \frac{6EJ_P}{h^2} \delta = 0 \\ \frac{2EJ_T}{l} \varphi_B + \left(\frac{4EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h} \right) \varphi_C - \frac{6EJ_P}{h^2} \delta = 0 \\ -\frac{6EJ_P}{h^2} \varphi_B - \frac{6EJ_P}{h^2} \varphi_C + \frac{24EJ_P}{h^3} \delta = F \end{cases} \quad (4)$$

Che può essere scritto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{4EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h} & \frac{2EJ_T}{l} & -\frac{6EJ_P}{h^2} \\ \frac{2EJ_T}{l} & \frac{4EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h} & -\frac{6EJ_P}{h^2} \\ -\frac{6EJ_P}{h^2} & -\frac{6EJ_P}{h^2} & +\frac{24EJ_P}{h^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_C \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Per semplicità scriveremo:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{13} \\ k_{12} & k_{11} & -k_{13} \\ -k_{13} & -k_{13} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_C \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Risolviamo quindi il sistema di equazione:

$$\begin{cases} k_{11}\varphi_B + k_{12}\varphi_C - k_{13}\delta = 0 \\ k_{12}\varphi_B + k_{11}\varphi_C - k_{13}\delta = 0 \\ -k_{13}\varphi_B - k_{13}\varphi_C + k_{33}\delta = F \end{cases} \quad (7)$$

Dalla prima e dalla seconda si ottiene rispettivamente:

$$\delta = \frac{k_{11}\varphi_B + k_{12}\varphi_C}{k_{13}} \quad (8)$$

$$\delta = \frac{k_{12}\varphi_B + k_{11}\varphi_C}{k_{13}} \quad (9)$$

Uguagliandole:

$$\frac{k_{11}\varphi_B + k_{12}\varphi_C}{k_{13}} = \frac{k_{12}\varphi_B + k_{11}\varphi_C}{k_{13}} \quad (10)$$

$$k_{11}\varphi_B + k_{12}\varphi_C = k_{12}\varphi_B + k_{11}\varphi_C$$

$$k_{11}\varphi_B - k_{12}\varphi_B - k_{11}\varphi_C + k_{12}\varphi_C = 0$$

$$(k_{11} - k_{12})\varphi_B - (k_{11} - k_{12})\varphi_C = 0$$

$$(k_{11} - k_{12})\varphi_B = (k_{11} - k_{12})\varphi_C$$

$$\varphi_B = \varphi_C = \varphi \quad (10)$$

Alla luce di ciò si può riscrivere la (8) come segue:

$$\delta = \frac{k_{11} + k_{12}}{k_{13}} \varphi \quad (11)$$

Perciò sostituendo la (10) e la (11) nella terza equazione del sistema (7), si ha:

$$-k_{13}\varphi - k_{13}\varphi + k_{33} \left(\frac{k_{11} + k_{12}}{k_{13}} \varphi \right) = F \quad (12)$$

$$-2k_{13}\varphi + \frac{k_{33}(k_{11} + k_{12})}{k_{13}} \varphi = F$$

$$\frac{k_{33}(k_{11} + k_{12}) - 2k_{13}^2}{k_{13}} \varphi = F$$

Da cui:

$$\varphi = \frac{k_{13} \cdot F}{k_{33}(k_{11} + k_{12}) - 2k_{13}^2} \quad (12)$$

E dalla (11) si ha che:

$$\delta = \frac{k_{11} + k_{12}}{k_{13}} \cdot \frac{k_{13} \cdot F}{k_{33}(k_{11} + k_{12}) - 2k_{13}^2}$$

$$\delta = \frac{(k_{11} + k_{12})F}{k_{33}(k_{11} + k_{12}) - 2k_{13}^2} \quad (12)$$

Sostituendo nuovamente alle rigidezze i loro rispettivi valori si trova il valore della rotazione:

$$\varphi = \frac{\frac{6EJ_P}{h^2} \cdot F}{\frac{24EJ_P}{h^3} \left(\frac{4EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h} + \frac{2EJ_T}{l} \right) - 2 \left(\frac{6EJ_P}{h^2} \right)^2}$$

$$\varphi = \frac{\frac{6EJ_P}{h^2} \cdot F}{\frac{24EJ_P}{h^3} \left(\frac{6EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h} \right) - 2 \left(\frac{6EJ_P}{h^2} \right)^2} \quad (13)$$

e il valore dello spostamento:

$$\delta = \frac{\left(\frac{4EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h} + \frac{2EJ_T}{l} \right) F}{\frac{24EJ_P}{h^3} \left(\frac{4EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h} + \frac{2EJ_T}{l} \right) - 2 \left(\frac{6EJ_P}{h^2} \right)^2}$$

$$\delta = \frac{\left(\frac{6EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h} \right) F}{\frac{24EJ_P}{h^3} \left(\frac{6EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h} \right) - 2 \left(\frac{6EJ_P}{h^2} \right)^2} \quad (14)$$

Quindi la (13) e la (14) descrivono la rotazione e lo spostamento dei nodi B e C di un generico telaio piano. Si analizzino adesso i due casi limite:

Rigidezza flessionale della trave \rightarrow infinita

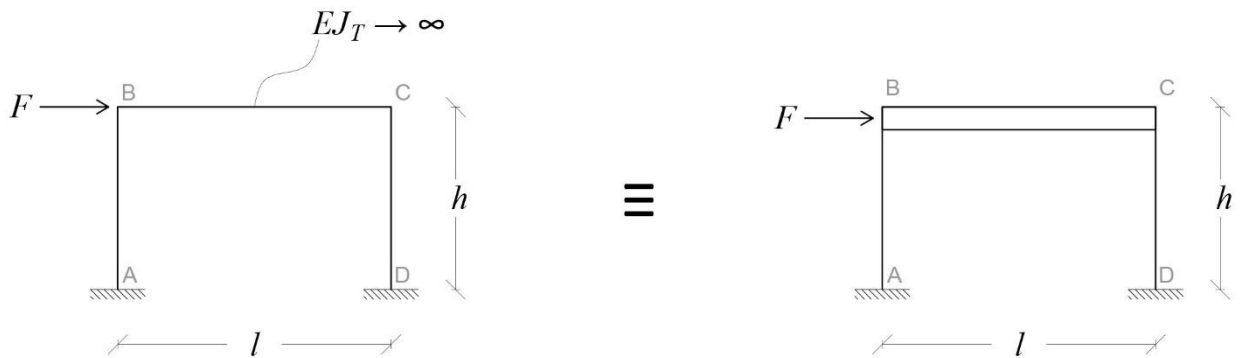


FIG. 08

Se la rigidità flessionale della trave tende ad infinito il generico telaio si definisce Shear Type. Per determinare le incognite cinematiche è possibile utilizzare le soluzioni appena trovate, avendo cura di effettuare un processo al limite, per cui:

$$\lim_{EJ_T \rightarrow \infty} \varphi = \frac{\frac{6EJ_P}{h^2} \cdot F}{\frac{24EJ_P}{h^3} \left(\frac{6EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h} \right) - 2 \left(\frac{6EJ_P}{h^2} \right)^2} \rightarrow \frac{\frac{6EJ_P}{h^2} \cdot F}{\infty} = 0 \quad (15)$$

$$\lim_{EJ_T \rightarrow \infty} \delta = \frac{\left(\frac{6EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h}\right) F}{\frac{24EJ_P}{h^3} \left(\frac{6EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h}\right) - 2 \left(\frac{6EJ_P}{h^2}\right)^2} = \frac{F}{\frac{24EJ_P}{h^3} - 2 \frac{\left(\frac{6EJ_P}{h^2}\right)^2}{\left(\frac{6EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h}\right)}}$$

$$\rightarrow \frac{F}{\frac{24EJ_P}{h^3} - 2 \frac{\left(\frac{6EJ_P}{h^2}\right)^2}{\infty}} \rightarrow \frac{F}{\frac{24EJ_P}{h^3} - 0} = \frac{Fh^3}{24EJ_P} \quad (16)$$

$$\delta = \frac{Fh^3}{24EJ_P}$$

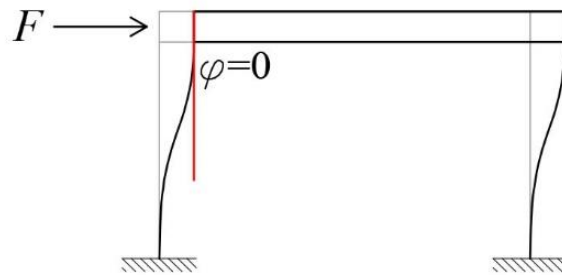


FIG. 09

Rigidità flessionale della trave \rightarrow nulla

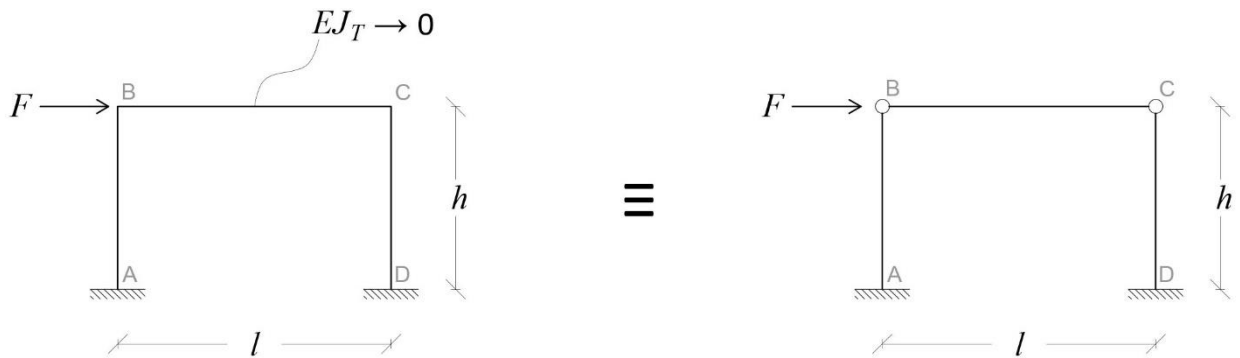


FIG. 10

Quando invece la rigidità flessionale della trave tende a 0, si ha:

$$\lim_{EJ_T \rightarrow 0} \varphi = \frac{\frac{6EJ_P}{h^2} \cdot F}{\frac{24EJ_P}{h^3} \left(\frac{6EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h}\right) - 2 \left(\frac{6EJ_P}{h^2}\right)^2} \rightarrow \frac{\frac{6EJ_P}{h^2} \cdot F}{\frac{24EJ_P}{h^3} \left(0 + \frac{4EJ_P}{h}\right) - 2 \left(\frac{6EJ_P}{h^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{6EJ_P}{h^2} \cdot F}{96 \frac{(EJ_P)^2}{h^4} - 72 \frac{(EJ_P)^2}{h^4}} = \frac{\frac{6EJ_P}{h^2} \cdot F}{24 \frac{(EJ_P)^2}{h^4}} = \frac{Fh^2}{4EJ_P} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \lim_{EJ_T \rightarrow 0} \delta &= \frac{\left(\frac{6EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h}\right) F}{\frac{24EJ_P}{h^3} \left(\frac{6EJ_T}{l} + \frac{4EJ_P}{h}\right) - 2 \left(\frac{6EJ_P}{h^2}\right)^2} \rightarrow \frac{\left(0 + \frac{4EJ_P}{h}\right) F}{\frac{24EJ_P}{h^3} \left(0 + \frac{4EJ_P}{h}\right) - 2 \left(\frac{6EJ_P}{h^2}\right)^2} \\ &\rightarrow \frac{\frac{4EJ_P}{h} F}{96 \frac{(EJ_P)^2}{h^4} - 72 \frac{(EJ_P)^2}{h^4}} = \frac{4Fh^3}{24EJ_P} = \frac{Fh^3}{6EJ_P} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\delta = \frac{Fh^3}{6EJ_P}$$

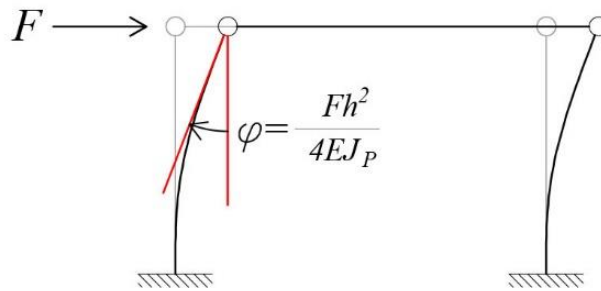


FIG. 11