

ESERCIZIO 1

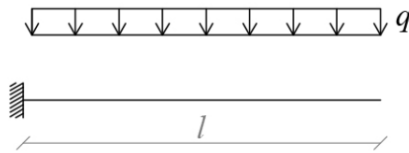


Fig. 1.1 Schema statico

Primo passo: Determinazione delle reazioni vincolari

Sulla struttura agisce un carico regolare che è equivalente, ai soli fini dell'equilibrio di corpo rigido, ad una forza concentrata nell'asse centrale, che in questo caso è sull'asse di simmetria. Per bilanciare questa forza diretta verso il basso nascerà nell'incastro una forza eguale ed opposta. Dal momento che le due forze hanno braccio $l/2$, esse daranno origine ad una coppia oraria di valore $ql^2/2$, che sarà bilanciata dalla coppia reattiva che nasce nell'incastro. Nell'incastro non nasce una componente orizzontale della reazione vincolare perché la forza esterna non ha componenti orizzontali.

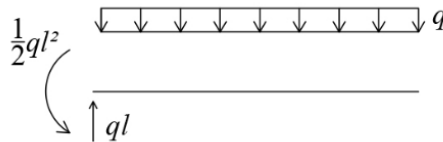


Fig. 1.2 Reazioni vincolari

Secondo passo: Determinazione dei diagrammi delle sollecitazioni

Sforzo assiale

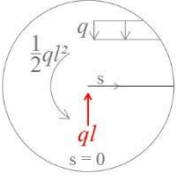
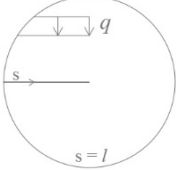
Come visto prima la componente orizzontale è nulla quindi non esistono sforzi normali nella trave

$q_1 = 0$	$N = costante$	1 condizione al bordo		$N(0) = 0$
-----------	----------------	-----------------------	--	------------

Fig. 1.3 Diagramma dello sforzo normale

Sforzo di taglio

Possiamo invece disegnare il taglio che ha un andamento lineare:

$q_2 = \text{costante}$	$T = \text{lineare}$	2 condizioni al bordo		$T(0) = -ql$
				$T(l) = 0$

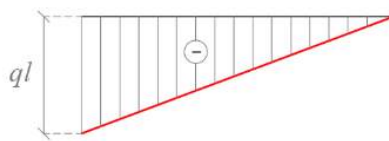
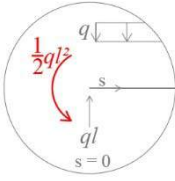
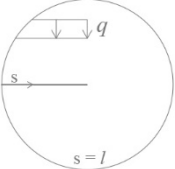
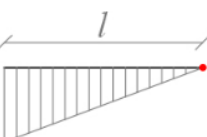


Fig. 1.4 Diagramma dello sforzo di taglio

Momento flettente

Di conseguenza disegniamo il momento parabolico nella parte superiore della trave dove sono presenti le fibre tese. Esso si annulla all'estremo libero della mensola assumendo una tangente orizzontale per via del taglio nullo.

$T = \text{lineare}$	$M = \text{parabolico}$	3 condizioni assegnate		$M(0) = \frac{1}{2}ql^2$
				$M(l) = 0$
				$T(l) = 0$

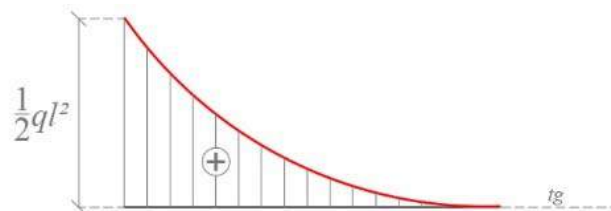


Fig. 1.5 Diagramma del momento flettente

ESERCIZIO 2

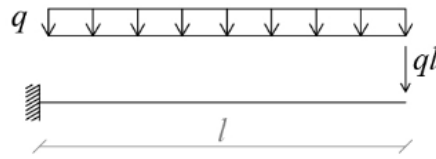


Fig. 2.1 Schema statico

Primo passo: Determinazione delle reazioni vincolari

Sulla struttura agisce un carico concentrato e uno regolare che è equivalente, ai soli fini dell'equilibrio di corpo rigido, ad una forza concentrata nell'asse centrale, che in questo caso è sull'asse di simmetria.

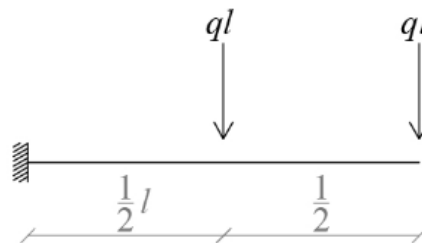


Fig. 2.2

A questo punto le due forze sono equivalenti alla loro risultante applicata sull'asse centrale, che si trova a metà strada tra le due forze, ossia a $\frac{3}{4}$ di l dall'incastro.

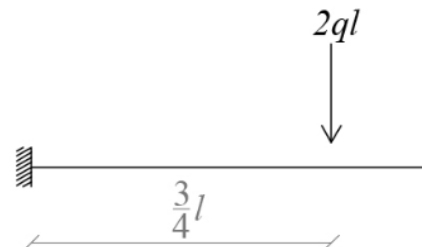


Fig. 2.3

Per bilanciare questa forza verticale e diretta verso il basso, dovrà nascere nell'incastro una forza uguale ed opposta alla medesima. Questo sistema di forze è equivalente ad una coppia oraria di valore pari a $3ql^2/2$ (forza per braccio), per bilanciare la quale nell'incastro dovrà nascere una coppia antioraria di pari valore.

Mentre la componente orizzontale della reazione dell'incastro sarà ovviamente nulla.

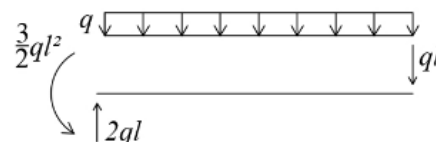


Fig. 2.4

Secondo passo: Determinazione dei diagrammi delle sollecitazioni

Sforzo assiale

Come visto prima la componente orizzontale è nulla quindi non esistono sforzi normali nella trave

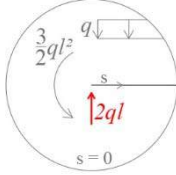
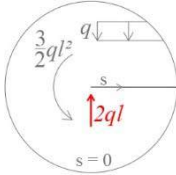
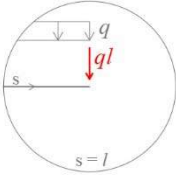
$q_1 = 0$	$N = costante$	1 condizione al bordo		$N(0) = 0$
-----------	----------------	-----------------------	--	------------

Fig. 2.5 Diagramma dello sforzo normale

Sforzo di taglio

Possiamo invece disegnare il taglio che ha un andamento lineare

$q_2 = costante$	$T = lineare$	2 condizioni al bordo		$T(0) = -2ql$
				$T(l) = -ql$

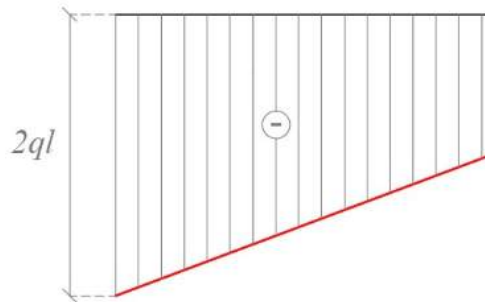
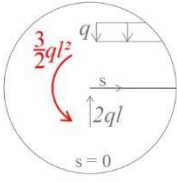
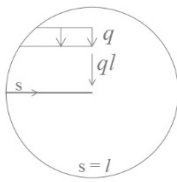
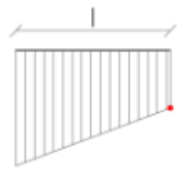


Fig. 2.6 Diagramma dello sforzo di taglio

Momento flettente

<i>T = lineare</i>	<i>M = parabolico</i>	3 condizioni assegnate		$M(0) = \frac{3}{2} ql^2$
				$M(l) = 0$
				$T(l) \neq 0$

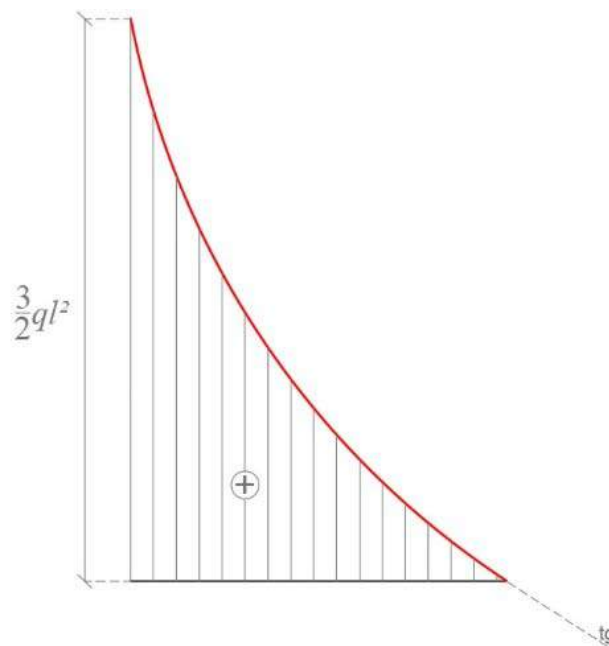


Fig. 2.7 Diagramma del momento flettente

Si può evidenziare un aspetto interessante: la tangente all'estremo libero non è più orizzontale. ciò è legato alla presenza della forza concentrata nell'estremo libero che induce in quella sezione un taglio diverso da zero. Essendo il taglio la derivata del momento, la presenza di un valore non nullo nell'estremo libero implica necessariamente in quella sezione una tangente con coefficiente angolare diverso da zero.

ESERCIZIO 3

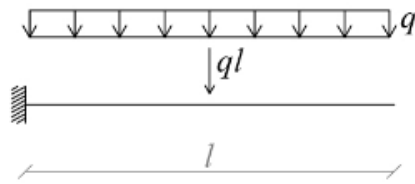


Fig. 3.1 Schema statico

Primo passo: Determinazione delle reazioni vincolari

Sulla struttura agisce un carico concentrato e uno regolare; quest'ultimo è equivalente, ai soli fini dell'equilibrio di corpo rigido, ad una forza concentrata nell'asse centrale, che in questo caso è sull'asse di simmetria.

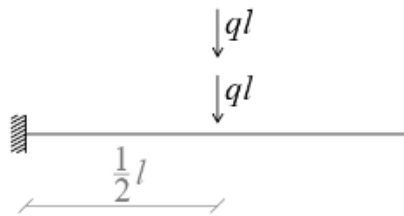


Fig. 3.2

A questo punto le due forze sono a loro volta equivalenti alla loro risultante applicata sull'asse centrale, che si trova a metà della trave.

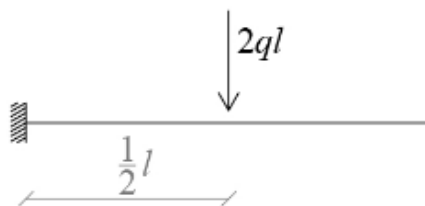


Fig. 3.3

Per bilanciare questa forza verticale e diretta verso il basso, dovrà nascere nell'incastro una forza uguale ed opposta alla medesima. Questo sistema di forze è equivalente ad una coppia oraria di valore pari a ql^2 (forza per braccio), per bilanciare la quale nell'incastro dovrà nascere una coppia antioraria di pari valore. La componente orizzontale della reazione dell'incastro sarà ovviamente nulla.

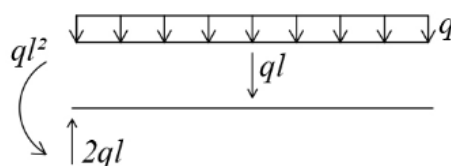


Fig. 3.4 Reazioni vincolari

Secondo passo: Determinazione dei diagrammi delle sollecitazioni

Sforzo assiale

Come visto prima la componente orizzontale è nulla quindi non esistono sforzi normali nella trave

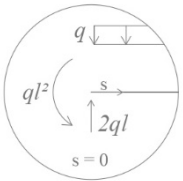
$q_1 = 0$	$N = costante$	1 condizione al bordo		$N(0) = 0$
-----------	----------------	-----------------------	--	------------

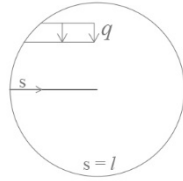
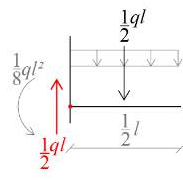
Fig. 2.5 Diagramma dello sforzo normale

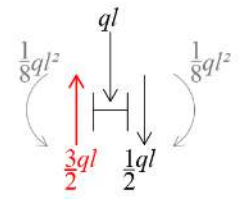
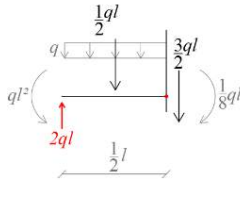
Sforzo di taglio

La forza concentrata determina la suddivisione dell'asta in due tratti regolari, in ognuno dei quali il carico distribuito q_2 vale q , di conseguenza il taglio è costante a tratti. Infatti nel punto di applicazione della forza, il diagramma del taglio è discontinuo; per questo motivo per disegnarlo è necessario conoscere un suo valore sia nel primo tratto che nel secondo. Questi valori andranno ricercati negli estremi dell'asta, dove si impongono le condizioni al bordo.

Per semplicità analizzeremo prima il tratto contenente l'estremo libero della trave, che chiameremo tratto 1, e poi il tratto contenente il vincolo di incastro che chiameremo tratto 2.

Si avrà dunque:

tratto1	$q_2 = costante$	$T = lineare$	2 condizioni assegnate		$T(l) = 0$
					$T\left(\frac{l}{2}\right)^+ = \frac{1}{2} ql$

tratto2	$q_2 = costante$	$T = lineare$	2 condizioni assegnate		$T\left(\frac{l}{2}\right)^- = \frac{3}{2}ql$
					$T(0) = 2ql$

La presenza del carico distribuito trasversale implica la linearità a tratti della sollecitazione di taglio ed il medesimo coefficiente angolare nei due tratti, mentre la presenza della forza concentrata determina un salto nel diagramma, pari all'intensità della forza ql .

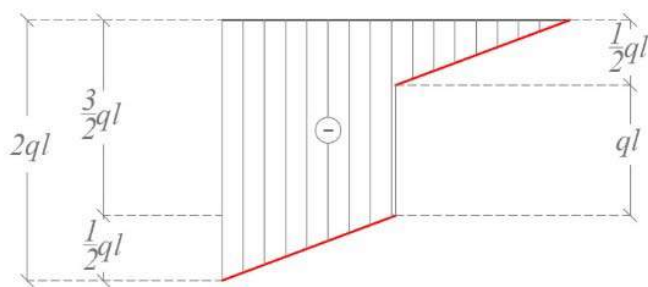
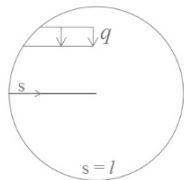
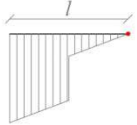
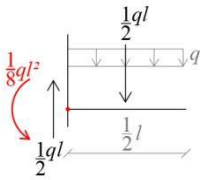
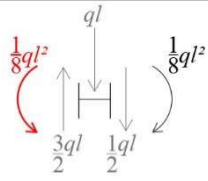
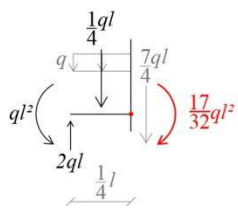
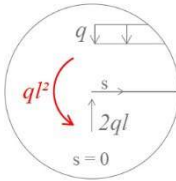


Fig. 2.6 Diagramma dello sforzo di taglio

Momento flettente

La funzione $T(s)$ è l'opposto della derivata della funzione $M(s)$. Dal momento che la funzione taglio è lineare a tratti, la funzione momento sarà parabolica a tratti: sarebbero quindi necessarie tre informazioni per ogni tratto per definire quest'ultima; in realtà, dato che nella singolarità dovuta alla forza concentrata la funzione momento è continua, al posto di 6 informazioni ne serviranno solo 5. Queste saranno ricavate da condizioni al bordo e da talune condizioni assegnate in determinate sezioni, ottenute imponendo l'equilibrio a rotazione delle sezioni medesime.

tratto 1	$T = \text{lineare}$	$M = \text{parabolico}$	3 condizioni assegnate		$M(l) = 0$
					$T(l) = 0$
					$M\left(\frac{l}{2}\right)^+ = \frac{1}{8}ql^2$
tratto 2	$T = \text{lineare}$	$M = \text{parabolico}$	3 condizioni assegnate		$M\left(\frac{l}{2}\right)^- = \frac{1}{8}ql^2$
					$M\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{17}{32}ql^2$
					$M(0) = ql^2$

La discontinuità nel diagramma del taglio implica un diagramma del momento continuo ma con due andamenti diversi, legati all'andamento del taglio. Si può notare infatti come in corrispondenza della singolarità ci sia una variazione brusca della tangente.

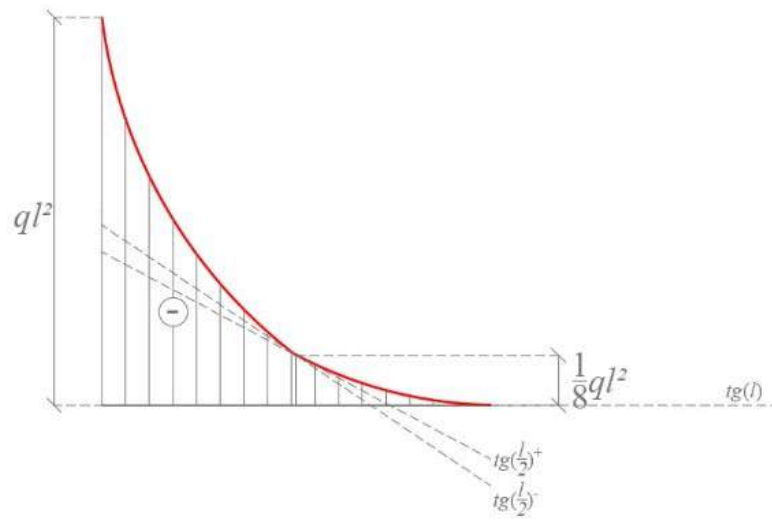


Fig. 2.8 Diagramma del momento flettente

ESERCIZIO 4

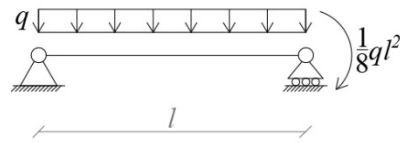


Fig. 4.1 Schema statico

Primo passo: Determinazione delle reazioni vincolari

Sulla struttura agisce un momento concentrato e un carico verticale distribuito che è equivalente, ai soli fini dell'equilibrio di corpo rigido, ad una forza concentrata nell'asse centrale.

A questo punto possiamo scomporre il problema andando a considerare separatamente gli effetti delle due azioni sulla trave.

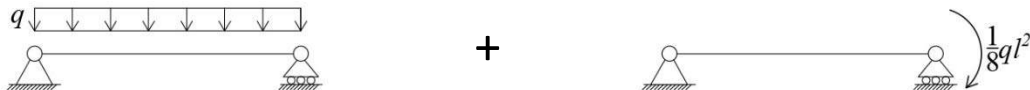


Fig. 4.2 Scomposizione del problema

Relativamente al primo schema, ci troviamo di fronte al caso della trave doppiamente appoggiata e sollecitata da un carico regolare, schema già affrontato nei precedenti esercizi.

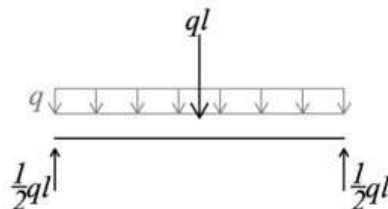


Fig. 4.3 Reazioni vincolari dello schema1

Esaminiamo il secondo schema. I vincoli presenti (cerniera e carrello) per definizione non possono offrire un momento reagente e quindi il momento applicato sulla sezione di estremità genera un coppia di forze reagenti. L'intensità delle due forze si ottiene dividendo il momento per la distanza l , braccio delle due forze.

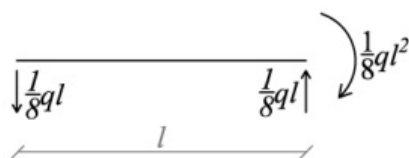


Fig. 4.3 Reazioni vincolari dello schema2

Avendo esaminato separatamente gli effetti delle due condizioni di carico, la somma o sovrapposizione di questi effetti ci fornirà la soluzione del problema iniziale.

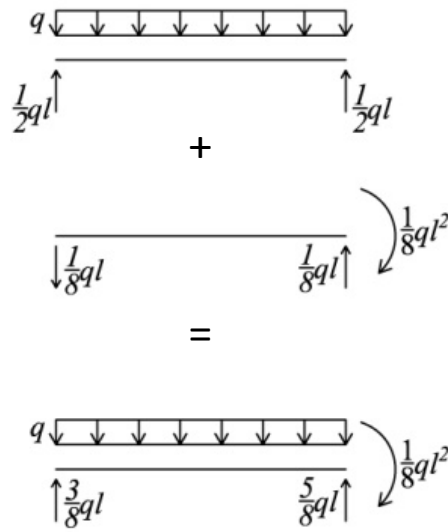


Fig. 4.4 Reazioni vincolari totali

Secondo passo: Determinazione dei diagrammi delle sollecitazioni

Sforzo assiale

La componente orizzontale delle reazioni vincolari è nulla quindi non esistono sforzi normali nella trave

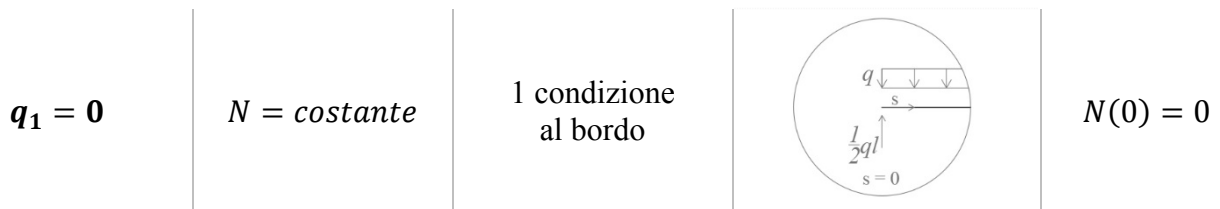
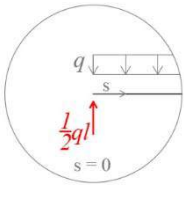
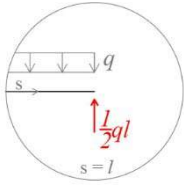


Fig. 4.5 Diagramma dello sforzo normale

Sforzo di taglio

Per semplicità analizzeremo le due azioni separatamente per poi sommare i due contributi grazie al metodo della sovrapposizione degli effetti.

Per quanto riguarda lo SCHEMA 1:

$q_2 = \text{costante}$	$T = \text{lineare}$	2 condizioni al bordo		$T(0) = -\frac{1}{2}ql$
				$T(l) = \frac{1}{2}ql$

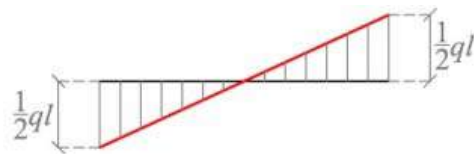


Fig. 4.6 Diagramma dello sforzo di taglio dello SCHEMA 1

Per quanto riguarda lo SCHEMA 2:

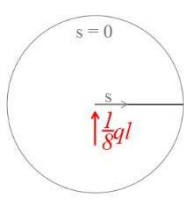
$q_2 = 0$	$T = \text{costante}$	1 condizione al bordo		$T(0) = \frac{1}{8}ql$
-----------	-----------------------	-----------------------	---	------------------------



Fig. 4.7 Diagramma dello sforzo di taglio dello SCHEMA 2

La loro somma varrà:

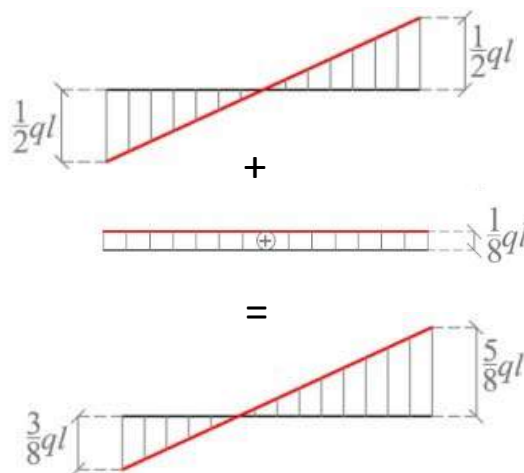
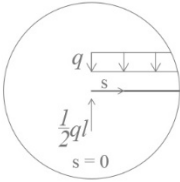
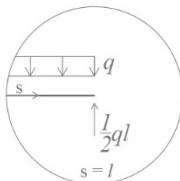
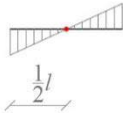


Fig. 4.8 Somma dei diagrammi dello sforzo di taglio

Momento flettente

La funzione $T(s)$ è l'opposto della derivata della funzione $M(s)$. Come per il taglio analizzeremo gli effetti delle due azioni separatamente per poi sommarli.

Per quanto riguarda lo SCHEMA 1

$T = \textit{lineare}$	$M = \textit{parabolico}$	3 condizioni assegnate		$M(0) = 0$
				$M(l) = 0$
				$T(l/2) = 0$

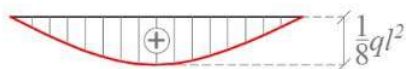


Fig. 4.9 Diagramma del momento flettente dello SCHEMA 1

Per quanto riguarda lo SCHEMA 2

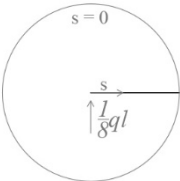
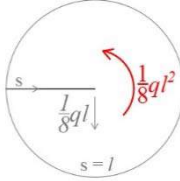
$T = \textit{costante}$	$M = \textit{lineare}$	2 condizioni al bordo		$M(0) = 0$
				$M(l) = \frac{1}{8}ql^2$



Fig. 4.10 Diagramma del momento flettente dello SCHEMA 2

Andando a sommare i due effetti si avrà

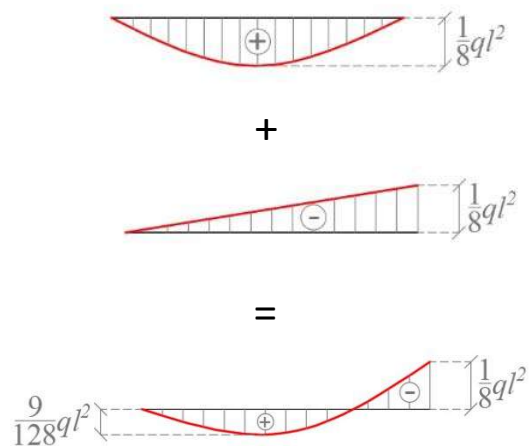
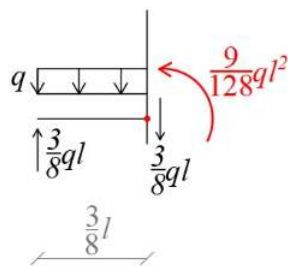


Fig. 4.11 Somma dei diagrammi del momento flettente

Per conoscere il valore del momento in campata bisogna fare riferimento all'ordinata in cui il taglio si annulla e fare l'equilibrio della sezione in quel punto.



Equazione di bilancio:

$$M\left(\frac{3}{8}l\right) = \frac{3}{8}ql \cdot \frac{3}{8}l - q \cdot \frac{3}{8}l \cdot \frac{3}{16}l = \frac{9}{128}ql^2$$

ESERCIZIO 5

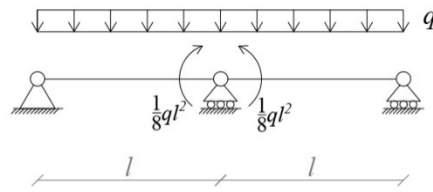


Fig. 5.1 Schema statico

Primo passo: Determinazione delle reazioni vincolari

Siamo in presenza di una struttura simmetrica, quindi possiamo dividerla in due tratti. Ognuno dei due tratti è riconducibile nella sua totalità all'ESERCIZIO 4. Quindi procederemo graficamente, concentrandoci su cosa accade nel punto di congiunzione dei due tratti.



Fig. 5.2

Richiamando quanto fatto nell'esercizio precedente possiamo dedurre le reazioni vincolari come segue:



Fig. 5.3 Reazioni vincolari

Per unire i due tratti bisogna semplicemente sommare le due reazioni verticali in corrispondenza del carrello centrale, risulterà quindi:

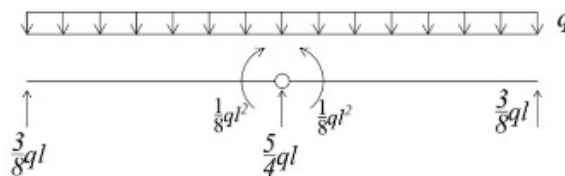


Fig. 5.4 Reazioni vincolari totali

Secondo passo: Determinazione dei diagrammi delle sollecitazioni

Sforzo assiale

Poichè ognuno delle due sottostrutture individuate, sono riconducibili all'esercizio precedente, possiamo dedurre che lo sforzo normale è nullo su entrambi i tratti:

Fig. 5.6 Diagramma dello sforzo normale

Sforzo di taglio

Ricordando che in strutture simmetriche dal punto di vista geometrico e meccanico, lo sforzo normale e il momento flettente sono simmetrici rispetto all'asse di simmetria, mentre lo sforzo di taglio è antisimmetrico. Pertanto determinando lo sforzo di taglio su uno dei due tratti, otteniamo per antisimetria lo sforzo di taglio anche sul secondo tratto.

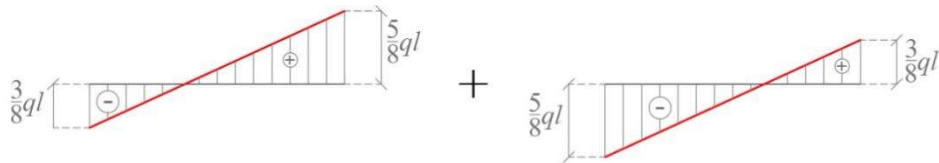


Fig. 5.7 Diagrammi dello sforzo di taglio

Andando ad unire i due tratti si avrà

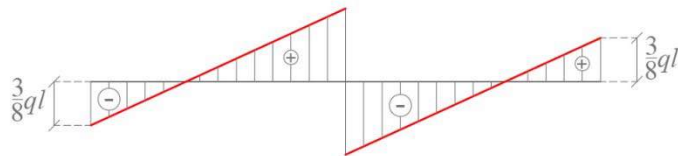


Fig. 5.8 Diagramma complessivo dello sforzo di taglio

Momento flettente

Ricordando sempre che il secondo tratto è specchiato rispetto al prima otteniamo

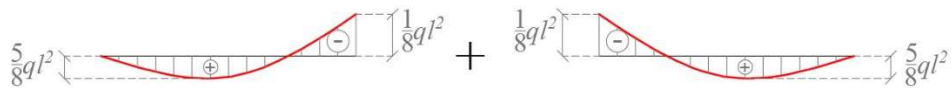


Fig. 5.9 Diagrammi del momento flettente

Andando ad unire i due tratti si avrà:



Fig. 5.10 Diagramma complessivo del momento flettente

ESERCIZIO 6

In questo e nei prossimi due esercizi analizzeremo il caso di una trave di una sola campata con due sbalzi, sotto tre diverse condizioni di carico.

In questo primo esercizio carichiamo solamente il tratto centrale:

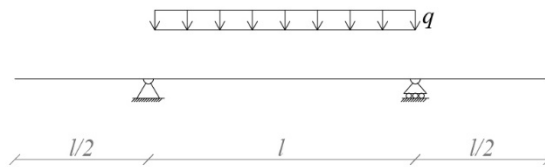


Fig. 6.1 Schema statico

Primo passo: Determinazione delle reazioni vincolari

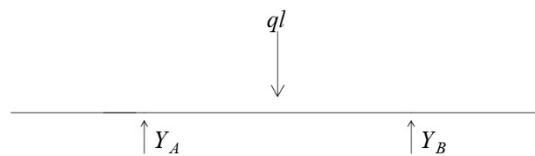


Fig. 6.2

Il problema equivale all'equilibrio della trave doppiamente appoggiata, sottoposta a un carico distribuito con andamento costante.

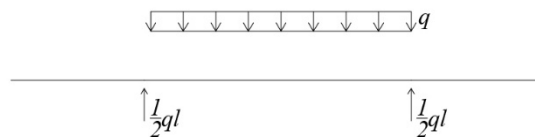


Fig. 6.3 Reazioni vincolari

Secondo passo: Determinazione dei diagrammi delle sollecitazioni

Sforzo assiale

La componente orizzontale delle reazioni vincolari è nulla; quindi non esistono sforzi normali nella trave in nessuno dei tratti

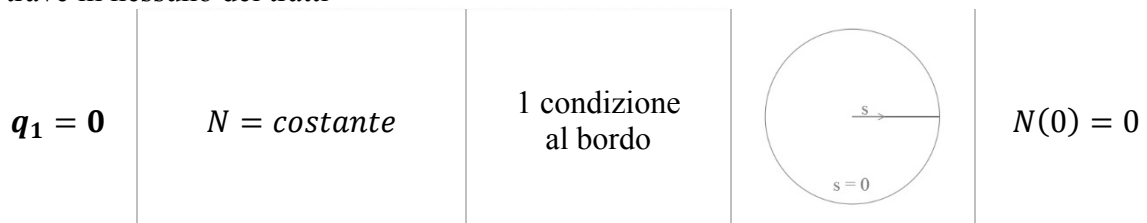


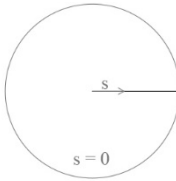
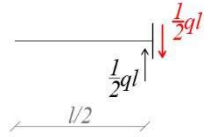
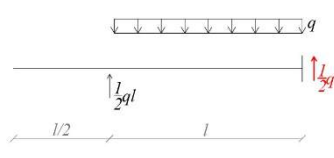
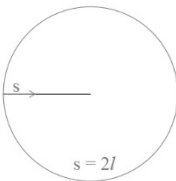
Fig. 6.4 Diagramma dello sforzo normale

Sforzo di taglio

Le reazioni vincolari sono due forze concentrate che suddividono l'asta in tre tratti regolari. Il primo tratto è riconducibile ad uno sbalzo, il secondo tratto corrisponde alla campata centrale, ed il terzo è il secondo sbalzo.

Nel primo e nel terzo tratto il carico distribuito q_2 è nullo, di conseguenza il taglio è costante; mentre nel secondo tratto il carico distribuito q_2 è costante, quindi il taglio è lineare.

Si avrà dunque:

tratto1	$q_2 = 0$	$T = costante$	1 condizione al bordo		$T(0) = 0$
tratto2	$q_2 = costante$	$T = lineare$	2 condizioni assegnate		$T\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{1}{2}ql$
					$T\left(\frac{3}{2}l\right) = \frac{1}{2}ql$
tratto3	$q_2 = 0$	$T = costante$	1 condizione al bordo		$T(2l) = 0$

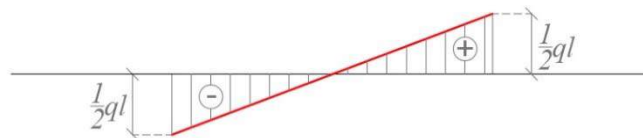
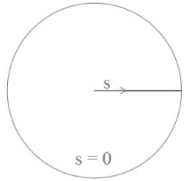


Fig. 6.5 Diagramma dello sforzo di taglio

Momento flettente

tratto1	$T = 0$	$M = costante$	1 condizione al bordo		$M(0) = 0$
---------	---------	----------------	-----------------------	--	------------


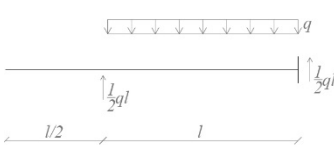
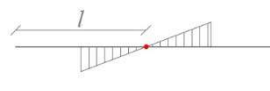
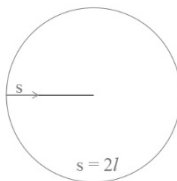
					$M\left(\frac{l}{2}\right) = 0$
tratto2	$T = \text{lineare}$	$M = \text{parabolico}$	3 condizioni assegnate		$M\left(\frac{3}{2}l\right) = 0$
					$T(l) = 0$
tratto3	$T = 0$	$M = \text{costante}$	1 condizione al bordo		$M(2l) = 0$



Fig. 6.6 Diagramma del momento flettente

ESERCIZIO 7

In questo esercizio, la soluzione sarà determinata applicando il principio della sovrapposizione degli effetti.

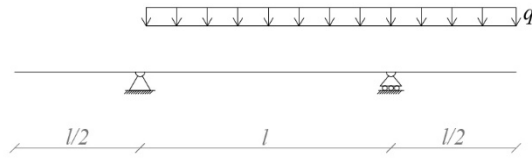


Fig. 7.1 Schema statico

Primo passo: Determinazione delle reazioni vincolari

In questo esempio oltre al tratto centrale viene caricato uno dei due tratti a sbalzo. Applicando la sovrapposizione degli effetti, l'esercizio sarà suddiviso in due sotto-problemi, il primo dei quali è stato già risolto nell'esercizio 6.

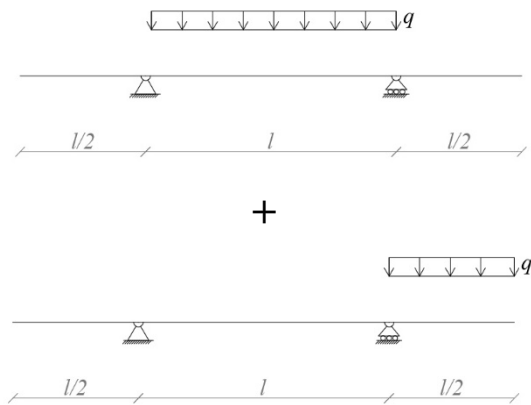


Fig. 7.2

Concentriamoci sul secondo sotto-problema. In questo caso la struttura è caricata solo su uno dei due tratti a sbalzo. Ai soli fini statici, il tratto a sbalzo può essere studiato ricorrendo al modello della mensola, ossia una trave incastrata ad un estremo e con l'altro estremo libero. In questo modo potremo determinare gli effetti del carico distribuito sul tratto a sbalzo per poi trasferirli al resto della struttura. Determiniamo quindi le reazioni vincolari su una mensola soggetta a un carico distribuito uniforme. Esse saranno:

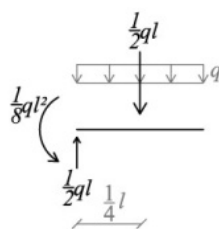


Fig. 7.3

Quelle che nella mensola sono le reazioni vincolari dell'incastro, nel tratto di trave a sbalzo sono le azioni di contatto che vengono trasmesse in corrispondenza della sezione in prossimità dell'appoggio

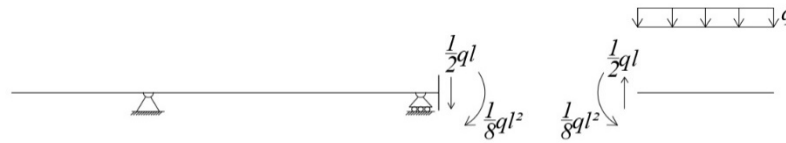


Fig. 7.4

Concentriamoci prima sulla componente verticale dell'azione di contatto. Essendo questa applicata praticamente sul vincolo esterno viene completamente assorbita dal vincolo stesso.



Fig. 7.5

Vediamo cosa accade alla trave applicando invece il momento flettente. Nell'ESERCIZIO 4 abbiamo determinato le reazioni vincolari e le azioni di contatto corrispondenti a questo caso.



Fig. 7.6

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, le reazioni vincolari saranno la somma delle reazioni vincolari degli schemi di Fig. 7.5 e 7.6:

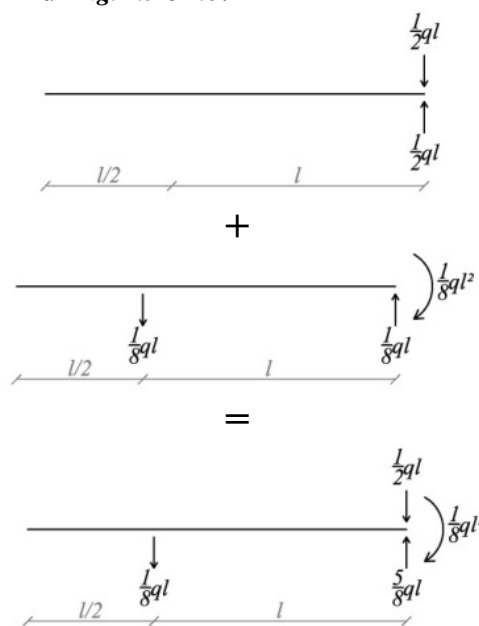


Fig. 7.7 Somma delle reazioni vincolari dello SCHEMA 1

Trovate le reazioni vincolari dovute al carico distribuito sul tratto a sbalzo, è ora possibile sommarle con le reazioni vincolari dovute al carico distribuito in campata.

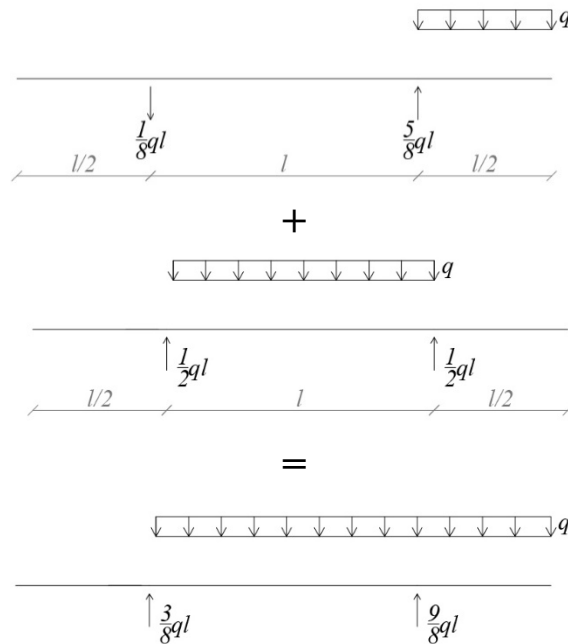


Fig. 7.8 Somma delle reazioni vincolari dello SCHEMA 2

Secondo passo: Determinazione dei diagrammi delle sollecitazioni

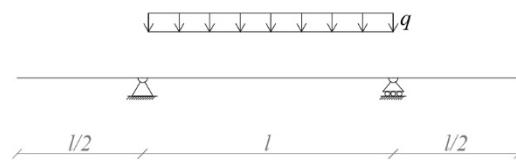


Fig. 7.9 SCHEMA 1



Fig. 7.10 SCHEMA 2

Affrontiamo ora l'analisi delle sollecitazioni considerando separatamente i seguenti schemi in cui quello illustrato nella **Fig. 7.9** (SCHEMA1) è stato completamente risolto nell'**ESERCIZIO 6**. Vengono di seguito riportati i diagrammi del taglio e del momento flettente relativi allo SCHEMA1.

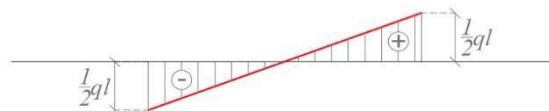


Fig. 7.11 Diagramma dello sforzo di taglio dello SCHEMA1



Fig. 7.12 Diagramma del momento flettente dello SCHEMA1

Passiamo ora ad analizzare lo SCHEMA2.

Sforzo assiale

Il carico distribuito assiale q_1 è nullo, quindi lo sforzo normale ha un andamento costante. Però anche le componenti orizzontali delle reazioni vincolari sono nulle, perciò gli sforzi normali sull'asta sono nulli.

Fig. 7.13 Diagramma dello sforzo normale dello SCHEMA2

Sforzo di taglio

Le reazioni vincolari sono due forze concentrate che suddividono l'asta in tre tratti regolari. Il primo tratto è riconducibile alla prima parte a sbalzo dell'asta, il secondo tratto corrisponde alla campata ed il terzo all'ultima parte a sbalzo dell'asta.

Nel primo e nel secondo tratto il carico distribuito q_2 è nullo, di conseguenza il taglio è costante; mentre nel terzo tratto il carico distribuito q_2 è costante, quindi il taglio è lineare.

Si avrà dunque:

tratto 1	$q_2 = 0$	$T = costante$	1 condizione al bordo		$T(0) = 0$
tratto 2	$q_2 = 0$	$T = costante$	1 condizione assegnata		$T(l) = +\frac{ql}{8}$
tratto 3	$q_2 = costante$	$T = lineare$	2 condizioni assegnate		$T(l) = -\frac{ql}{2}$

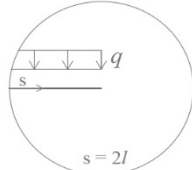
					$T(2l) = 0$
--	--	--	--	--	-------------



Fig. 7.14 Diagramma dello sforzo di taglio dello SCHEMA2

Andando a sommare gli effetti dei due modelli di calcolo arriviamo alla soluzione finale della sollecitazione di taglio:

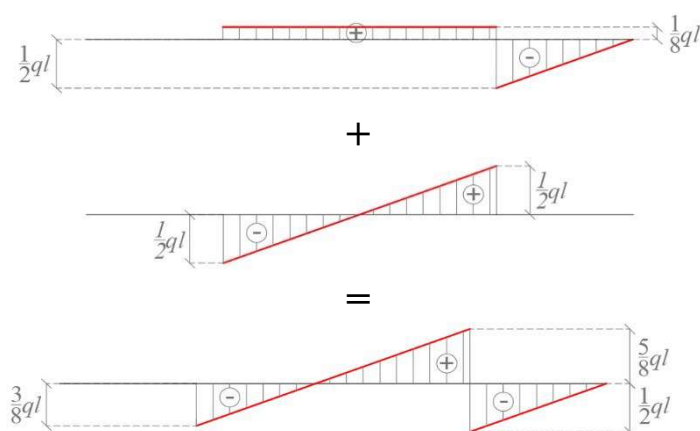
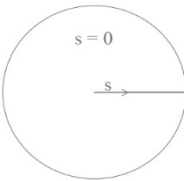



Fig. 7.15 Somma dei diagrammi dello sforzo di taglio

Momento flettente

tratto 1	$T = 0$	$M = costante$	1 condizione al bordo		$M(0) = 0$
tratto 2	$T = costante$	$M = lineare$	2 condizioni assegnate		$M\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

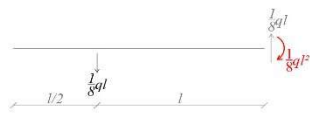
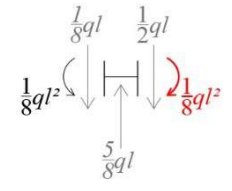
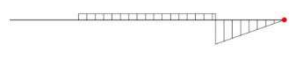
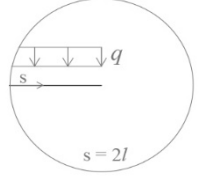
					$M(l)^- = \frac{1}{8}ql^2$
tratto 3	$T = \text{lineare}$	$M = \text{parabolico}$	3 condizione assegnate		$M(l)^+ = M(l)^-$
					$T(2l) = 0$
					$M(2l) = 0$



Fig. 7.16 Diagramma del momento flettente dello SCHEMA2

Riassumiamo i precedenti risultati per evidenziare la somma degli effetti

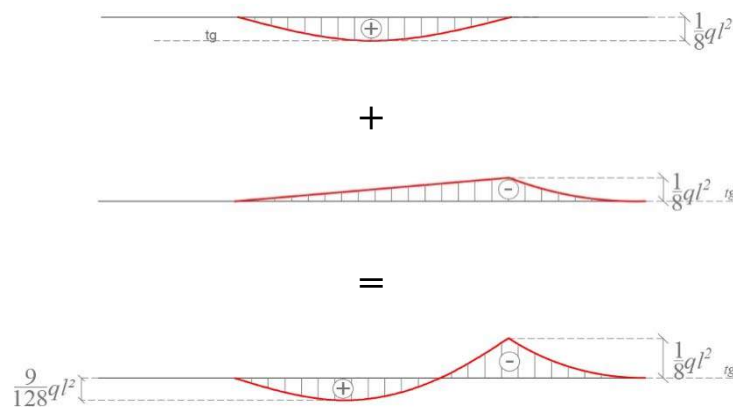
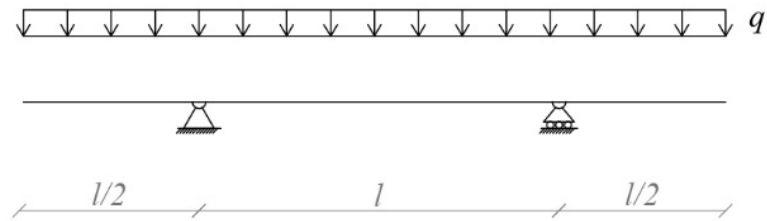


Fig. 7.17 Somma dei diagrammi del momento flettente

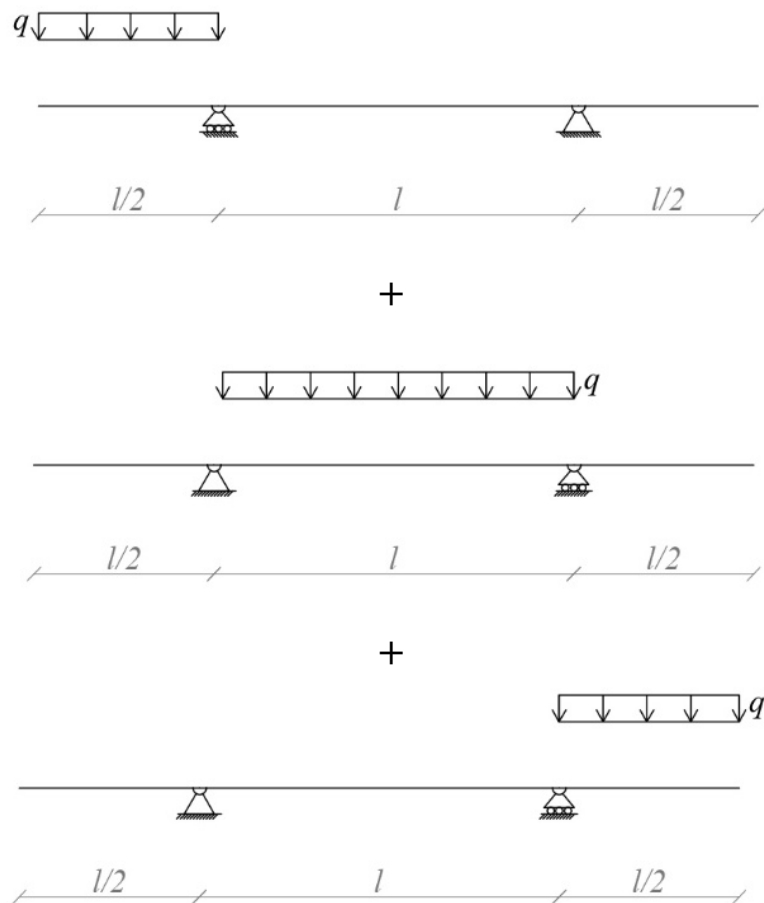
Per calcolare il valore del momento massimo nel tratto centrale possiamo risolvere l'equilibrio rispetto alla sezione dove il taglio si annulla, ovvero nel punto di ascissa $7/8$ di l .

$$M\left(\frac{7}{8}l\right) = \frac{3}{8}ql \cdot \frac{3}{8}l - \frac{3}{8}l \cdot q \cdot \frac{3}{4}l = \frac{9}{128}ql^2$$

ESERCIZIO 8



Affrontiamo ora l'ultimo dei 3 esercizi su questo modello di trave: tutti e tre i tratti sono carichi. Metteremo in evidenza la simmetria del comportamento, operando per via grafica, avendo già effettuato nei precedenti esercizi il metodo di calcolo sia delle reazioni vincolari sia delle sollecitazioni.



Primo passo: Determinazione delle reazioni vincolari

La strada da percorrere è sempre quella di analizzare il contributo di ogni schema per poi utilizzare la sovrapposizione degli effetti.

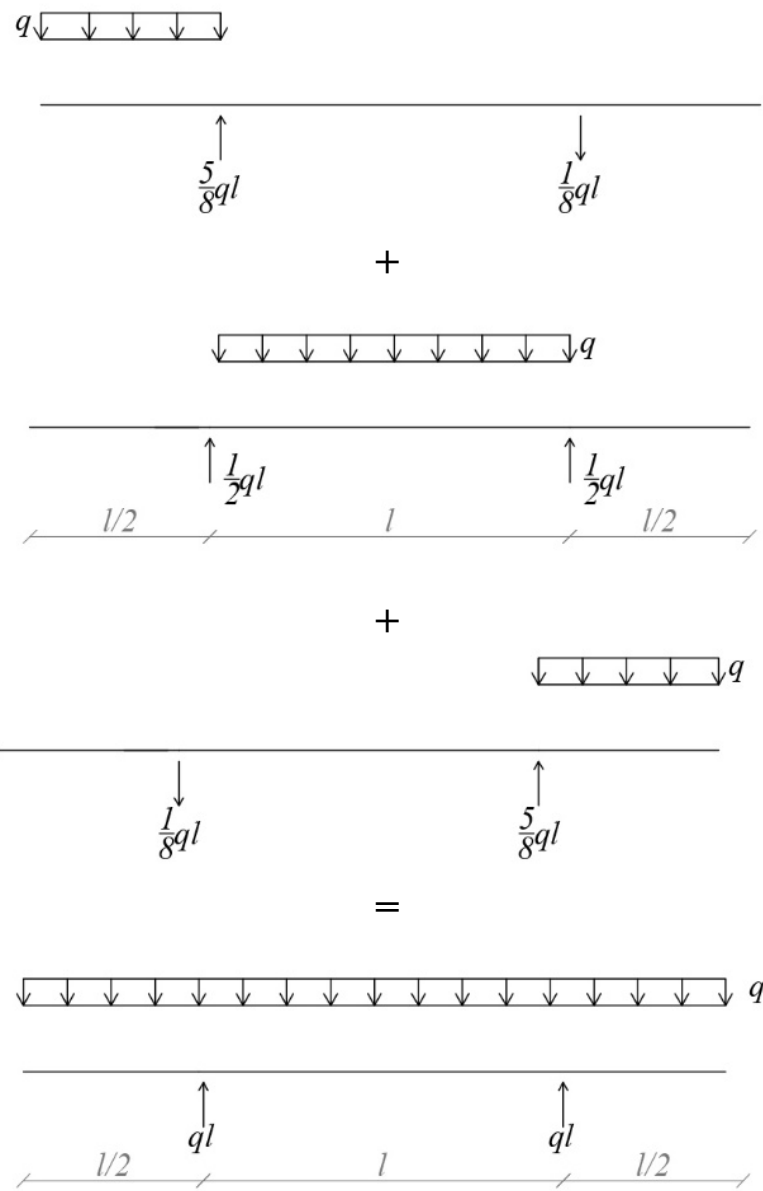
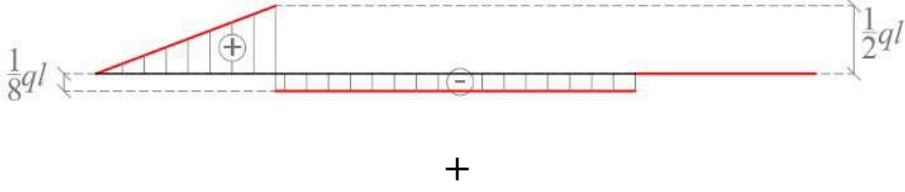


Fig. 8.3 Reazioni vincolari

Secondo passo: Determinazione dei diagrammi delle sollecitazioni

Sforzo di taglio

I tre schemi illustrati in Fig. 8.2 producono separatamente tre diversi diagrammi del taglio che vengono qui di seguito richiamati e sommati. In particolare il diagramma del taglio del terzo schema di Fig. 8.2 viene determinato dal diagramma del taglio del primo schema riflettendolo prima sull'asse di simmetria e poi intorno all'asse della trave (antisimmetria del taglio).



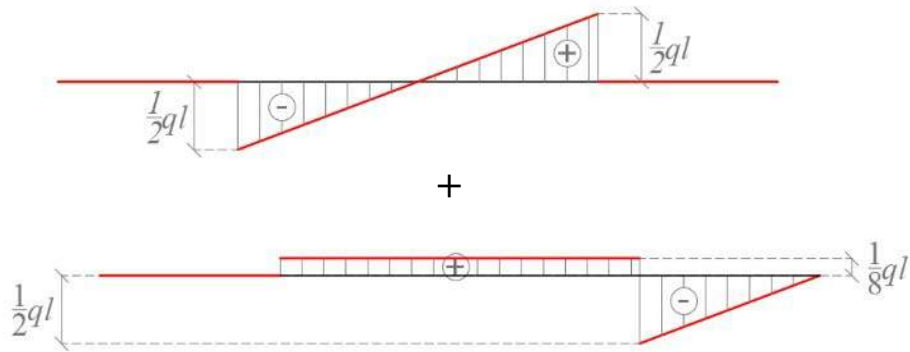


Fig. 8.5 Diagrammi dello sforzo di taglio degli SCHEMI 1, 2 e 3

Sommando i tre schemi si ottiene:

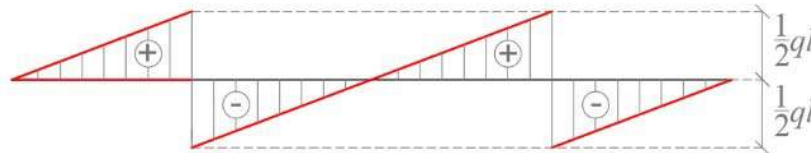


Fig. 8.6 Sommatoria dei diagrammi dello sforzo di taglio

Momento flettente

I tre schemi illustrati in *Fig. 8.2* producono separatamente tre diversi diagrammi del momento flettente che vengono qui di seguito richiamati e sommati. In particolare il diagramma del momento del terzo schema di *Fig. 8.2* viene determinato dal diagramma del momento del primo schema riflettendolo prima sull'asse di simmetria (simmetria del momento flettente).

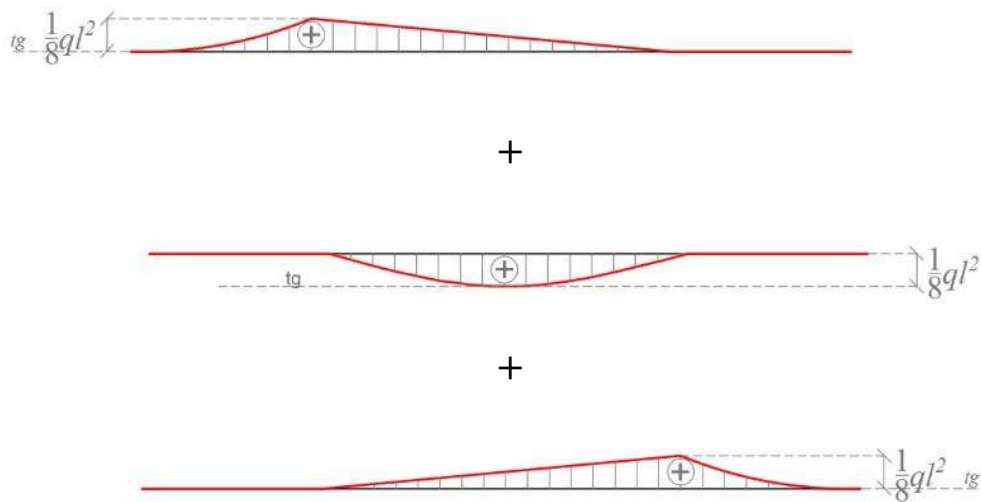


Fig. 8.7 Diagrammi del momento flettente degli SCHEMI 1, 2 e 3

Sommando i tre schemi si ottiene:



Fig. 8.8 Somma dei diagrammi del momento flettente

ESERCIZIO 9

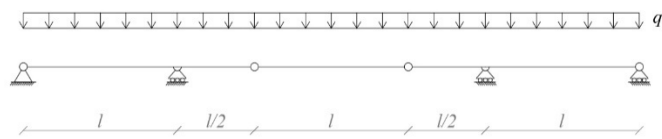


Fig. 9.1 Schema statico

Siamo di fronte ad una trave Gerber, struttura isostatica che ad esempio si utilizza in alcuni ponti.

Primo passo: Determinazione delle reazioni vincolari

Per semplicità partiremo analizzando il tratto centrale compreso tra le due cerniere interne. Per calcolare le componenti verticali delle reazioni vincolari e successivamente le sollecitazioni di taglio e momento flettente si può fare riferimento alla trave doppiamente appoggiata.

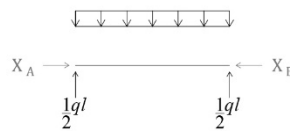


Fig. 9.2

Le due reazioni vincolari diventeranno ora sollecitazioni per i tratti di trave adiacenti oltre al carico distribuito già presente.

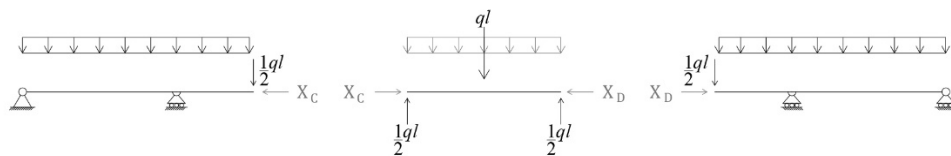


Fig. 9.3

Per l'equilibrio alla traslazione orizzontale di tutti i tratti $X_C = X_D = 0$.

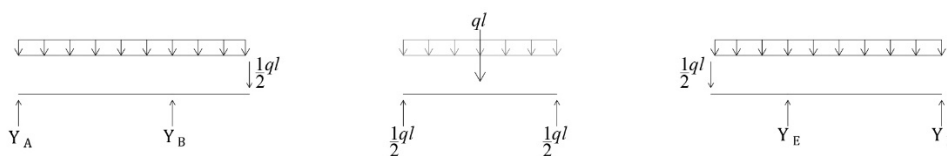


Fig. 9.4

L'annullarsi delle reazioni orizzontali, rende questo schema completamente simmetrico. Pertanto basterà analizzare il tratto centrale ed uno dei due tratti laterali per arrivare alla soluzione. Analizziamo il tratto a sinistra applicando il principio di sovrapposizione degli effetti rispetto alle due condizioni di carico a cui è soggetto.

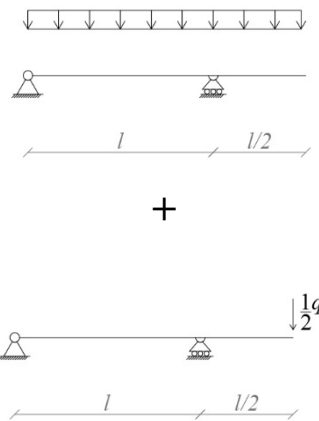


Fig. 9.5

Per i due schemi della *Fig. 9.5*, le reazioni vincolari assumono i seguenti valori:

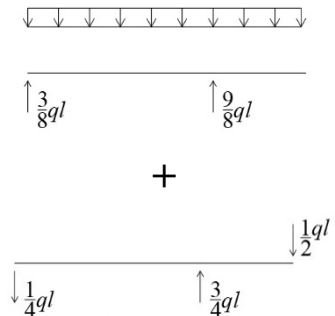


Fig. 9.6

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti e considerando la simmetria otteniamo le reazioni vincolari dell'intera trave Gerber:

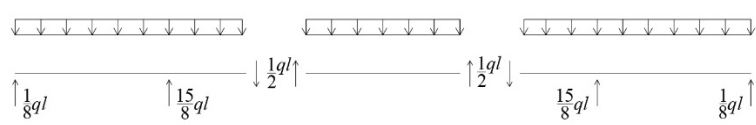


Fig. 9.7 Reazioni vincolari

Secondo passo: Determinazione dei diagrammi delle sollecitazioni

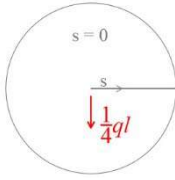
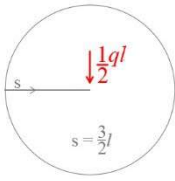
L'intera trave Gerber è stata divisa in tre tratti come si può vedere nella *Fig. 9.8*. Di questi tre tratti, quello centrale è stato risolto svariate volte in precedenza e in aggiunta a ciò il primo schema della *Fig. 9.4* è stato risolto nell'**ESERCIZIO 7**.

Perciò l'unica condizione che deve essere oggetto di approfondimento è il secondo schema della *Fig. 9.5*.

Sull'asta il carico distribuito è nullo, di conseguenza essa è soggetta a sforzo normale costante, a taglio costante ed a momento lineare. Per quanto riguarda lo sforzo normale, la condizione al bordo ci consegna una funzione identicamente nulla. Mentre per lo sforzo di taglio e per il momento flettente, le condizioni al bordo non sono sufficienti per definire i loro diagrammi, a causa della

presenza di forze concentrate, che rappresentano delle singolarità e ci portano a suddividere l'asta in 2 tratti.

Sforzo di taglio

tratto1	$q_2 = 0$	$T = costante$	1 condizione al bordo		$T(0) = +\frac{1}{4}ql$
tratto2	$q_2 = 0$	$T = costante$	1 condizione al bordo		$T\left(\frac{3}{2}l\right) = -\frac{1}{2}ql$

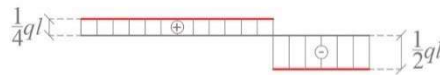
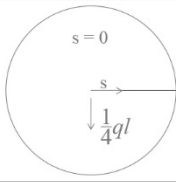
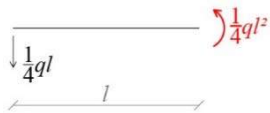
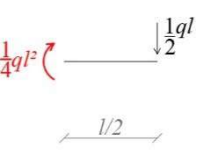
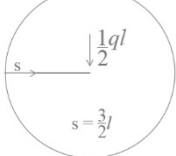


Fig. 9.8 Diagramma dello sforzo di taglio del secondo schema di Fig. 9.4

Momento flettente

tratto1	$T = costante$	$M = lineare$	2 condizioni assegnate		$M(0) = 0$
					$M(l)^- = -\frac{ql^2}{4}$
tratto2	$T = costante$	$M = lineare$	2 condizioni assegnate		$M(l)^+ = M(l)^-$
					$M\left(\frac{3}{2}l\right) = 0$

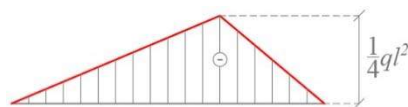


Fig. 9.9 Diagramma del momento flettente del secondo schema di Fig. 9.4

Ora si può determinare il diagramma del taglio e del momento flettente del primo tratto sommando i diagrammi derivanti dalle due diverse condizioni di carico.

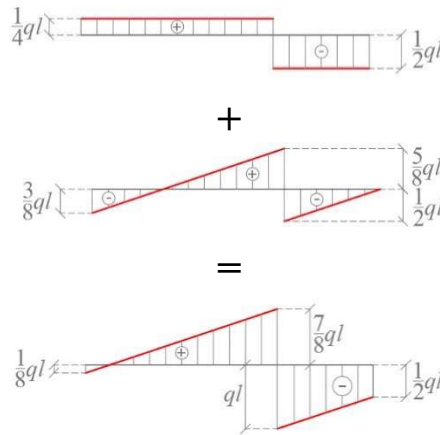


Fig. 9.10 Diagramma dello sforzo di taglio del primo tratto

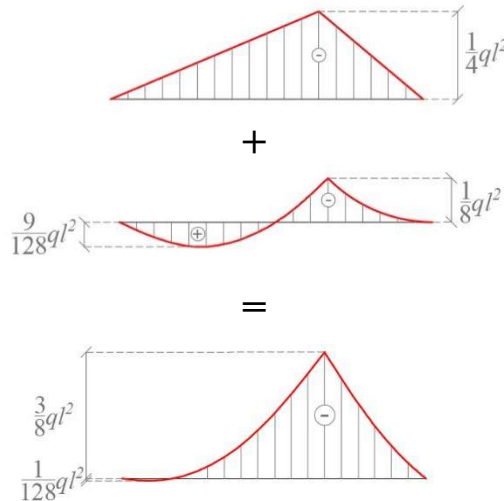


Fig. 9.11 Diagramma del momento flettente del primo tratto

Abbiamo tutte le informazioni per disegnare i diagrammi del taglio e del momento della Gerber, poiché conosciamo i diagrammi dei tre schemi illustrati in **Fig. 9.4**, che vengono qui di seguito richiamati e sommati.

In particolare i diagrammi relativi al terzo schema di **Fig. 9.4** vengono determinati dai diagrammi del primo schema. A causa dell'antisimmetria del taglio, il diagramma del primo schema verrà riflesso prima sull'asse di simmetria e poi intorno all'asse della trave, mentre il diagramma del momento flettente verrà solo riflesso intorno all'asse di simmetria.

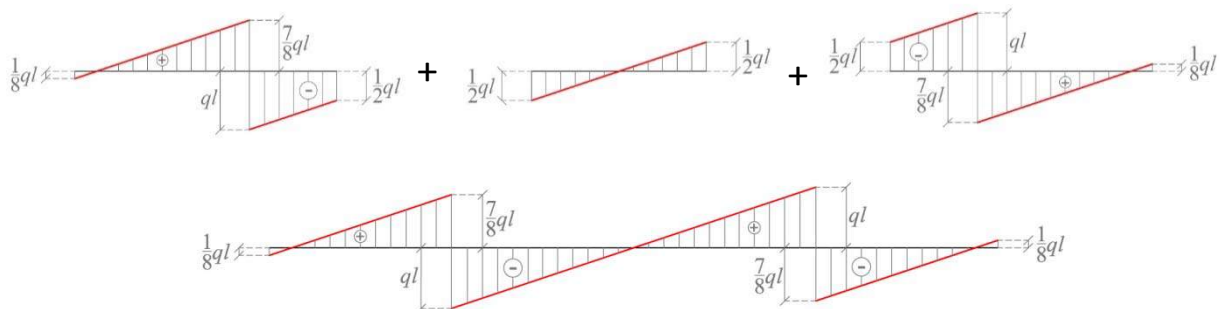


Fig. 9.12 Diagramma del taglio

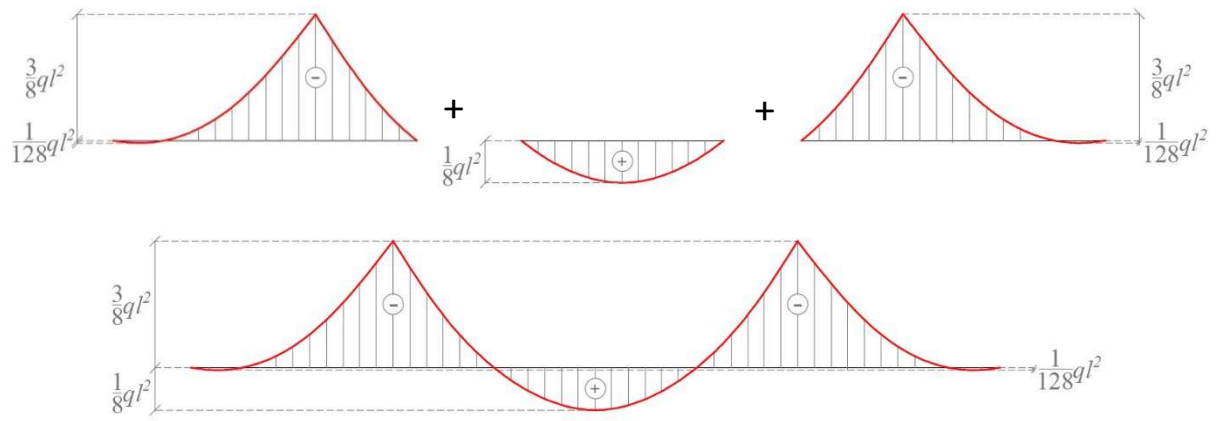


Fig. 9.13 Diagramma del momento flettente

ESERCIZIO 10

Iniziamo ora una serie di tre esercizi su alcuni schemi strutturali isostatici a forma di portale. Un portale è formato da tre aste, una orizzontale e due verticali.

Nel seguente esercizio le tre aste sono reciprocamente incastrate e il sistema è vincolato esternamente da una cerniera e un carrello. Sull'asta orizzontale insiste un carico distribuito costante q .

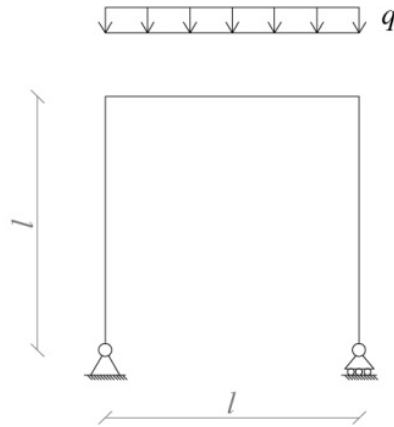


Fig. 10.1 Schema statico

Primo passo: Determinazione delle reazioni vincolari

Esplicitiamo le reazioni vincolari; il sistema si comporta come un unico corpo rigido caricato verticalmente. Pertanto la componente orizzontale della reazioni vincolare è nulla.

Invece le due reazioni verticali, essendo disposte simmetricamente rispetto all'asse di simmetria, sono uguali e si dividono il carico a metà. Pertanto valgono:

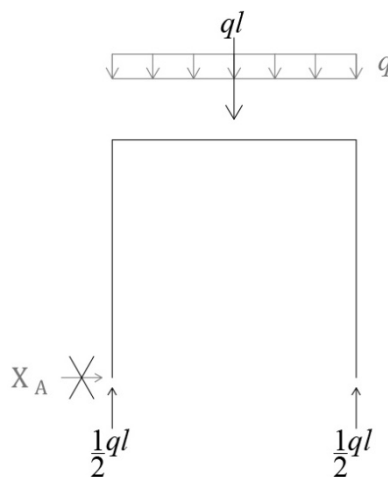


Fig. 10.2 Reazioni vincolari

Secondo passo: Determinazione dei diagrammi delle sollecitazioni

Partiamo dall'analisi dello stato di sollecitazione delle aste verticali: dal momento che su di esse il carico distribuito è nullo, in teoria esse sono soggette a uno sforzo normale costante, a un taglio

costante ed a un momento lineare. Tuttavia in corrispondenza delle reazioni vincolari si leggono le condizioni al bordo, ossia sforzo normale assegnato e pari a $-\frac{ql}{2}$, taglio nullo e momento nullo.

Pertanto, la funzione sforzo normale sarà costante e pari al valore assegnato come nella figura che segue:

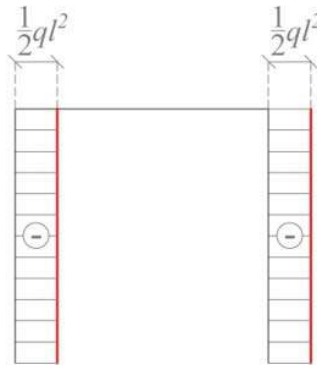


Fig. 10.3 Diagramma dello sforzo normale nelle aste verticali

Per quanto riguarda la funzione taglio nelle medesime aste, la condizione al bordo ci consegna una funzione identicamente nulla. Di conseguenza la funzione momento sarà costante, ed in particolare, pari a zero, in quanto pari al suo valore al bordo.

A questo punto va affrontata la singolarità di spigolo, per determinare con quale azione di contatto la trave orizzontale sta in equilibrio. I due nodi C e D si trovano staticamente in queste condizioni:

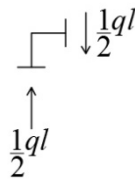


Fig. 10.4 Equilibrio del nodo D

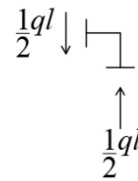


Fig. 10.5 Equilibrio del nodo C

Quindi l'asta orizzontale si trova nella seguente condizione:

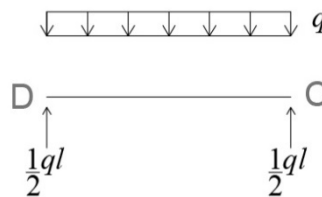


Fig. 10.6

Si tratta di una trave doppiamente appoggiata di cui ben conosciamo il diagramma del taglio e del momento flettente. Quindi possiamo disegnare i diagrammi delle sollecitazioni relativi alla struttura rappresentata in **Fig. 10.1**.

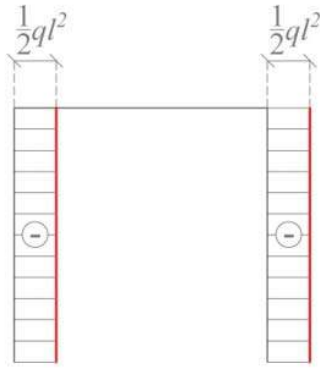


Fig. 10.7 Diagramma dello sforzo normale

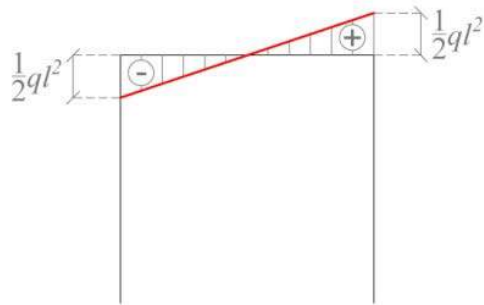


Fig. 10.8 Diagramma dello sforzo di taglio

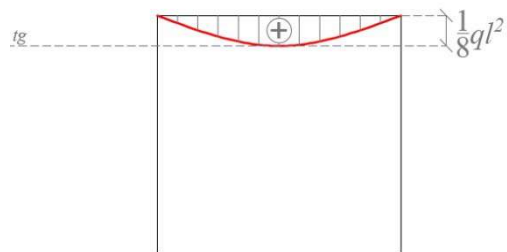


Fig. 10.9 Diagramma del momento flettente

APPROFONDIMENTO

Analizzando il diagramma dei momenti flettenti e ricordando il legame fra momento e curvatura nella trave di Bernoulli, si deduce che i due tratti verticali, nella deformazione indotta dal carico sull'intero portale, non si incurvano, ossia si mantengono rettilinei.

Sviluppando in maniera intuitiva ciò che sarà oggetto di futuri approfondimenti, in questo caso potremo affermare che la trave orizzontale si incurva verso il basso, per effetto del momento flettente agente su di essa, che a causa di questo, i due nodi A e B ruoteranno l'uno in senso orario e l'altro in senso antiorario, e che si conserverà la rigidità dei nodi, ovvero la perpendicolarità dei due tratti confluenti nel nodo.

L'insieme di queste considerazioni produce la seguente deformata:

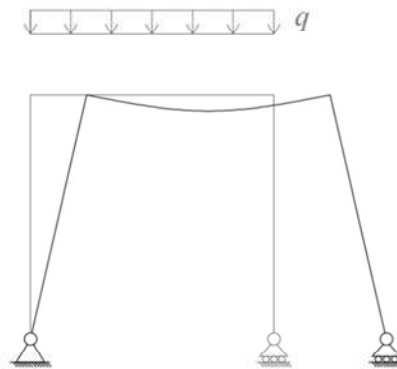


Fig. 10.10

Si evince dalla deformata che se al posto del carrello ci fosse una cerniera, lo spostamento orizzontale sarebbe impedito e nascerebbe di conseguenza una reazione vincolare orizzontale. Quest'ultima produrrebbe taglio e momento flettente nei due elementi verticali ed una deformata abbastanza differente, caratterizzata dalla curvatura dei ritti.

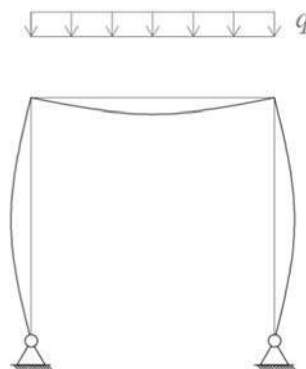


Fig. 10.11 Deformata di un portale doppiamente incernierato

ESERCIZIO 11

Nel seguente esercizio si affronta un tipo di portale isostatico che viene anche detto arco a tre cerniere.

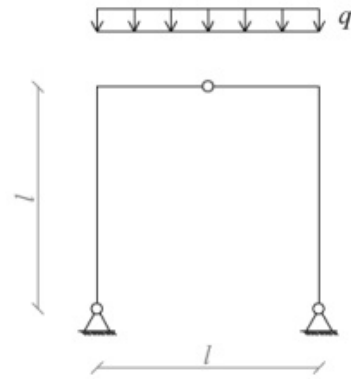


Fig. 11.1 Schema statico

Primo passo: Determinazione delle reazioni vincolari

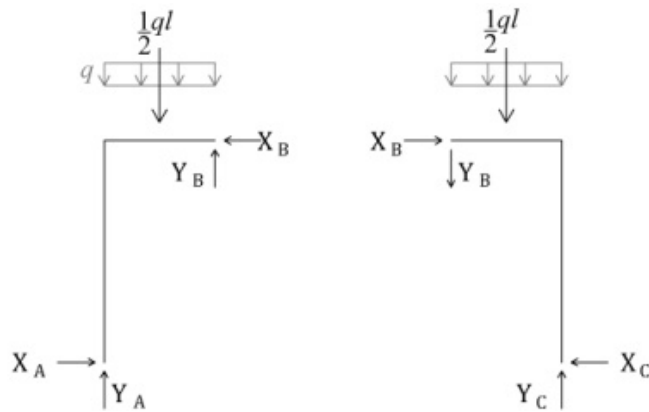


Fig. 11.2

Poiché la struttura è simmetrica sia geometricamente che meccanicamente: la componente verticale della reazione della cerniera interna è nulla.

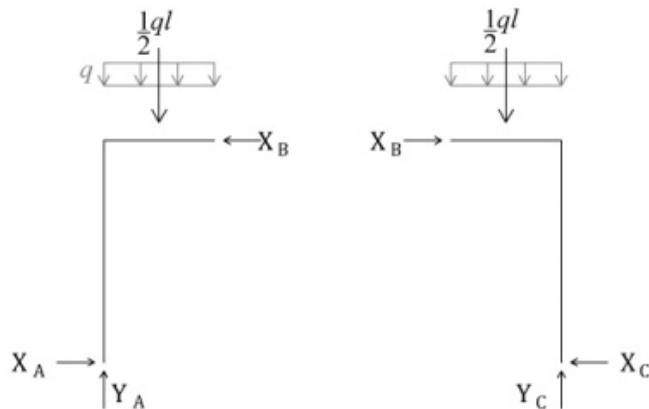


Fig. 11.3

Dall'equilibrio delle forze verticali si ottiene la componente verticale delle reazioni vincolari.

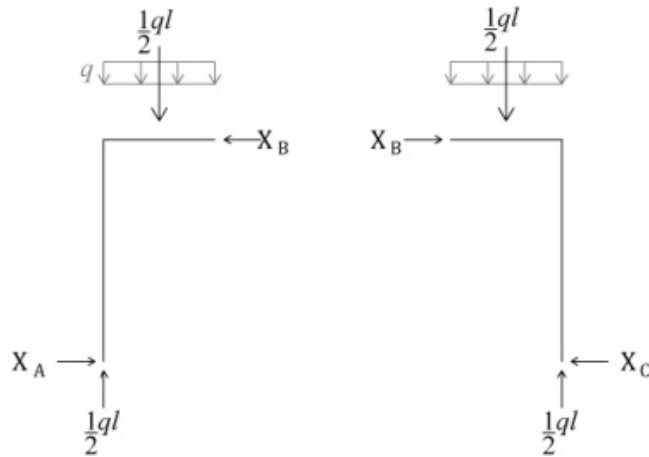


Fig. 11.4

Sul tratto a sinistra, le due forze verticali costituiscono una coppia di verso orario e di braccio pari ad $l/4$. Affinché questa coppia sia bilanciata le due componenti orizzontali delle reazioni vincolari debbono indurre una coppia antioraria di pari modulo.

Dal momento che il braccio delle forze orizzontali è 4 volte il braccio delle forze verticali, le forze orizzontali saranno $1/4$ delle forze verticali.

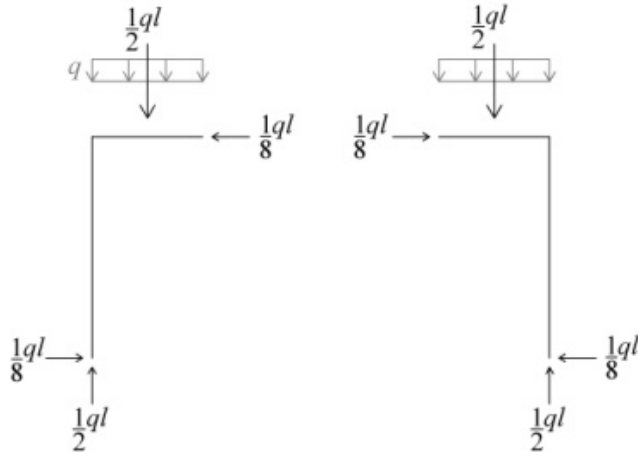
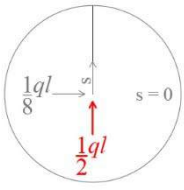
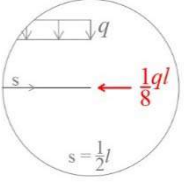


Fig. 11.5

Secondo passo: Determinazione dei diagrammi delle sollecitazioni

Essendo la struttura simmetrica geometricamente e meccanicamente, possiamo analizzare una delle due parti per poi rifletterla simmetricamente, tenendo presente l'eccezione dello sforzo di taglio che ha un comportamento antisimmetrico.

Sforzo normale

asta verticale	$q_1 = 0$	$N = costante$	1 condizione al bordo		$N(0) = -\frac{1}{2}ql$
asta orizzontale	$q_1 = 0$	$N = costante$	1 condizione al bordo		$N\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{1}{8}ql$

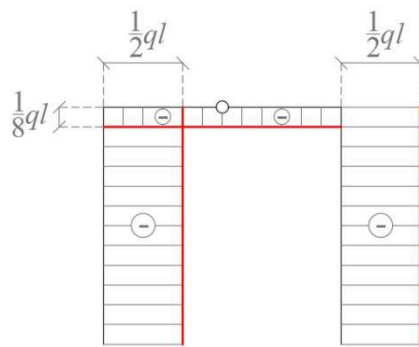
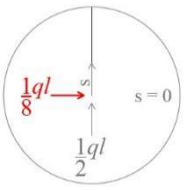
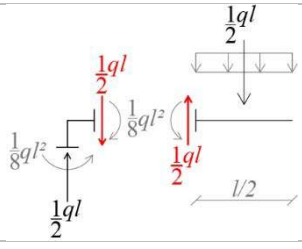
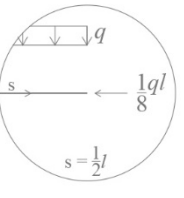


Fig. 11.6 Diagramma dello sforzo normale

Sforzo di taglio

asta verticale	$q_2 = 0$	$T = costante$	1 condizione al bordo		$T(0) = -\frac{1}{8}ql$
asta orizzontale	$q_2 = costante$	$T = lineare$	2 condizioni assegnate		$T(0) = -\frac{1}{2}ql$
					$T\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

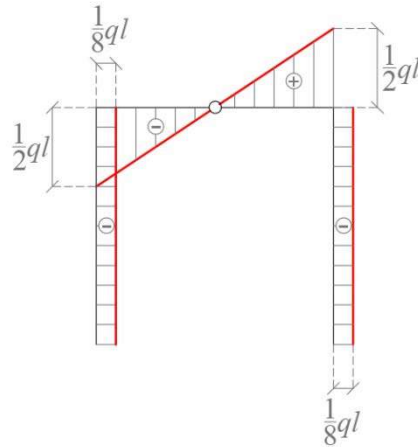


Fig. 11.7 Diagramma dello sforzo di taglio

Momento flettente

L'asta verticale e l'asta orizzontale sono legate da un incastro interno quindi ci sarà continuità nel momento, analizzeremo prima l'asta orizzontale e di conseguenza quella verticale.

asta verticale	$T = costante$	$M = lineare$	2 condizioni assegnate		$M(0) = 0$
					$M(l) = \frac{1}{8} ql^2$
asta orizzontale	$T = lineare$	$M = parabolico$	3 condizioni assegnate		$M(0) = -\frac{1}{8} ql^2$
					$T\left(\frac{l}{2}\right) = 0$
					$M\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

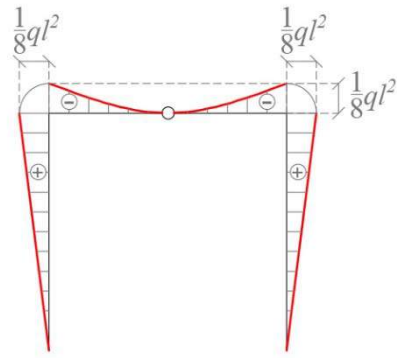


Fig. 11.8 Diagramma del momento flettente

ESERCIZIO 12

Nella figura che segue è mostrato un portale caricato lateralmente con una forza concentrata F .

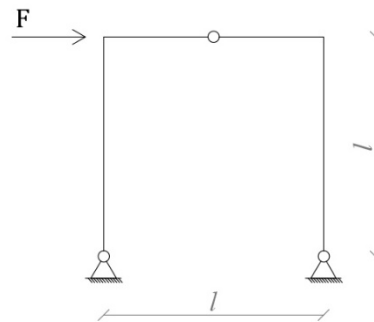


Fig. 12.1 Schema statico

Primo passo: Determinazione delle reazioni vincolari

Le componenti verticali delle reazioni vincolari nei punti A e C vengono stimate utilizzando l'equazione di bilancio della componente verticale della forza e l'equazione di bilancio dei momenti rispetto ad uno dei due poli dell'intero sistema strutturale, concepito come un unico corpo rigido. Tali componenti sono mostrate nella *Fig. 12.2*.

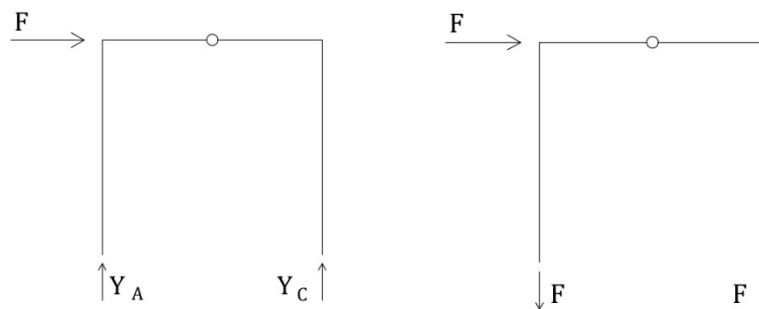


Fig. 12.2

Per determinare le altre reazioni vincolari interne ed esterne, si utilizzano le rimanenti equazioni di bilancio delle due sottostrutture, individuate dalla cerniera interna, a questo punto rese isostatiche dalla determinazione delle reazioni verticali esterne.

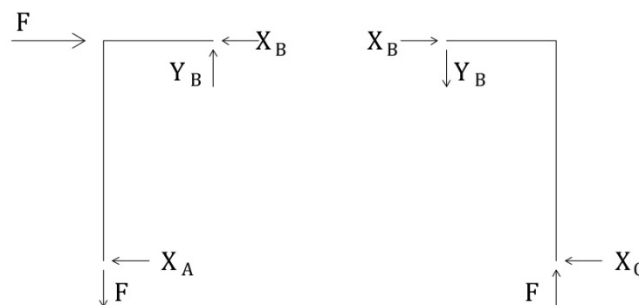


Fig. 12.3

Le equazioni di bilancio per la prima sottostruttura sono le seguenti e forniscono la soluzione che segue:

$$\begin{cases} F - X_A - X_B = 0 \\ Y_B = F \\ F \frac{l}{2} - X_A l = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_B = \frac{F}{2} \\ Y_B = F \\ X_A = \frac{F}{2} \end{cases}$$

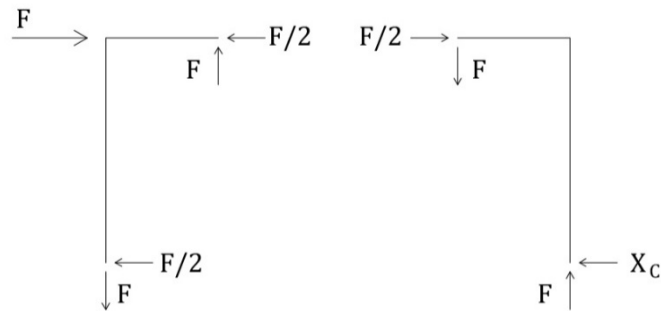


Fig. 12.4

A questo punto l'unica reazione vincolare agente sulla seconda sottostruttura che deve essere determinata risulta essere X_C , che dall'equilibrio alla traslazione orizzontale risulta pari a:

$$X_C = \frac{F}{2}$$

La soluzione finale del problema della determinazione delle reazioni vincolari è illustrata nella figura che segue:

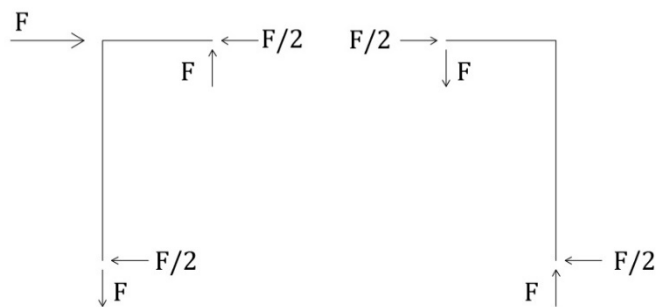


Fig. 12.5

Secondo passo: Determinazione dei diagrammi delle sollecitazioni

La struttura è simmetrica geometricamente ma non meccanicamente quindi andremo ad analizzare le due sottostrutture separatamente

Sforzo normale

Sottostruttura 1

asta verticale	$q_1 = 0$	$N = costante$	1 condizione al bordo		$N = +F$
asta orizzontale	$q_1 = 0$	$N = costante$	1 condizione al bordo		$N = -\frac{F}{2}$

Sottostruttura 2

asta verticale	$q_1 = 0$	$N = costante$	1 condizione al bordo		$N = +F$
asta orizzontale	$q_1 = 0$	$N = costante$	1 condizione al bordo		$N = -\frac{F}{2}$

Si ottiene quindi:

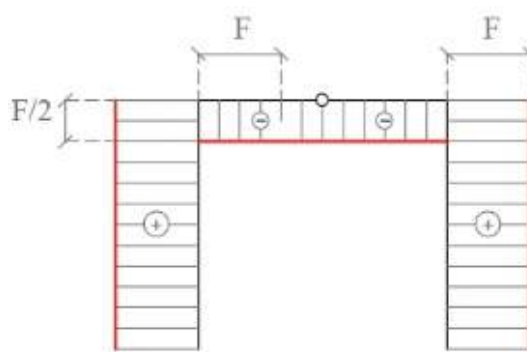
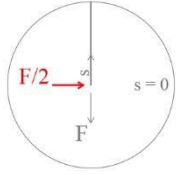
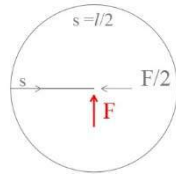


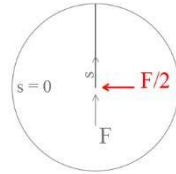
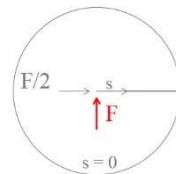
Fig. 12.6 *Diagramma dello sforzo normale*

Sforzo di taglio

Sottostruttura 1

asta verticale	$q_2 = 0$	$T = costante$	1 condizione al bordo		$T(0) = -\frac{F}{2}$
asta orizzontale	$q_2 = 0$	$T = costante$	1 condizione al bordo		$T(0) = +F$

Sottostruttura 2

asta verticale	$q_2 = 0$	$T = costante$	1 condizione al bordo		$T(0) = -\frac{F}{2}$
asta orizzontale	$q_2 = 0$	$T = costante$	1 condizione al bordo		$T(0) = -F$

In sintesi si avrà:

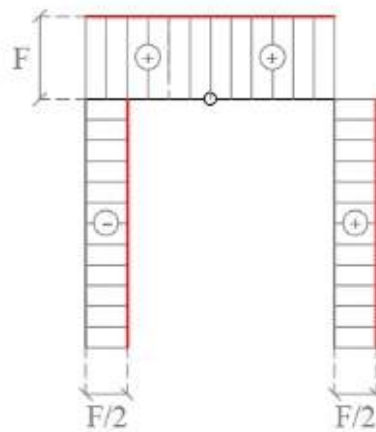
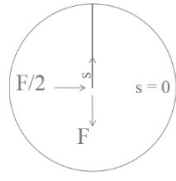
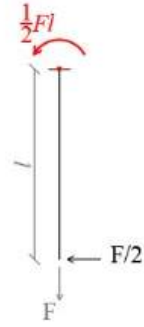
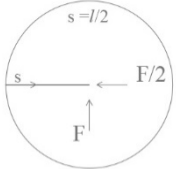
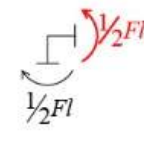


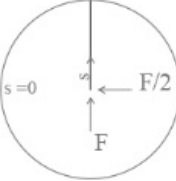
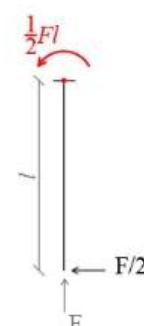
Fig. 12.7 Diagramma dello sforzo di taglio

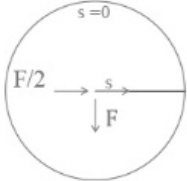
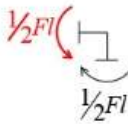
Momento flettente

Sottostruttura 1

asta verticale	$T = costante$	$M = lineare$	2 condizioni al bordo		$M(0) = 0$
					$M(l) = \frac{Fl}{2}$
asta orizzontale	$T = costante$	$M = lineare$	2 condizioni al bordo		$M(0) = +\frac{Fl}{2}$
					$M\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

Sottostruttura 2

asta verticale	$T = costante$	$M = lineare$	2 condizioni al bordo		$M(0) = 0$
					$M(l) = \frac{Fl}{2}$

asta orizzontale	$T = costante$	$M = lineare$	2 condizioni al bordo		$M(0) = 0$
					$M\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Fl}{2}$

Si ottiene quindi il seguente diagramma:

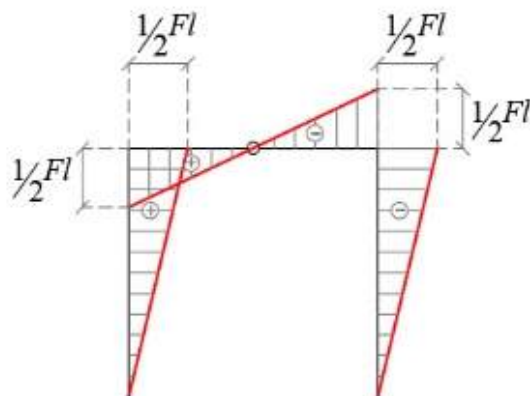


Fig. 12.8 Diagramma del momento flettente