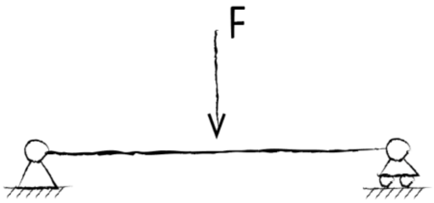
Commento all’esercizio svolto in aula il 23-11-2016

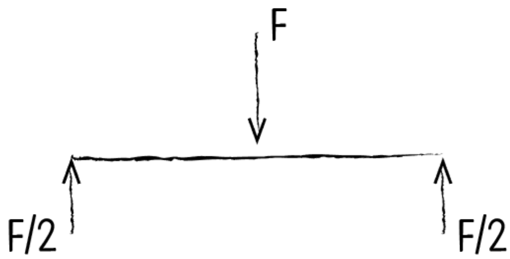
Trave appoggiata con forza concentrata in mezzeria



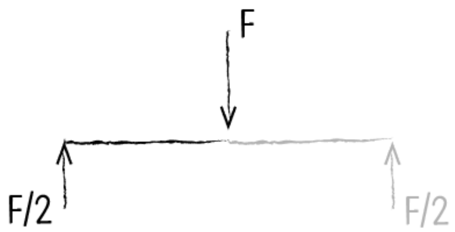
Trovare l’equazione che descrive l’abbassamento e la rotazione delle sezioni della trave, applicando il metodo della linea elastica.

Risoluzione:

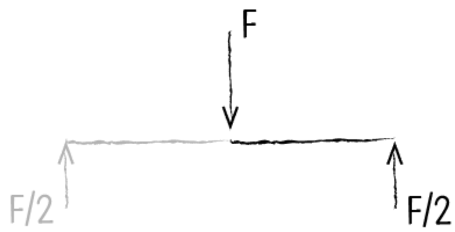
1. Reazioni vincolari:



La forza concentrata rappresenta una singolarità e, in quanto tale, produce una discontinuità nei diagrammi delle sollecitazioni, per cui è opportuno dividere in due tratti la trave, come illustra la figura successiva.



$$0 \leq s < \frac{l}{2}$$



$$\frac{l}{2} < s \leq l$$

2. Integrazione dell’equazione della linea elastica

Per l’equazione della linea elastica:

$$v^{\mathrm{IV}} = -\frac{q}{EI}$$

Poiché in questo esercizio $q = 0$

$$v^{\mathrm{IV}} = 0$$

Integrando, in ogni tratto, arriviamo fino all’equazione che descrive gli spostamenti v, a meno di qualche costante.

$$v^{\mathrm{IV}} = 0$$

$$v^{\mathrm{III}} = c_1$$

$$v^{\mathrm{II}} = c_1 s + c_2$$

$$v^{\mathrm{I}} = c_1 \frac{s^2}{2} + c_2 s + c_3$$

$$v = c_1 \frac{s^3}{6} + c_2 \frac{s^2}{2} + c_3 s + c_4$$

$$v^{\mathrm{IV}} = 0$$

$$v^{\mathrm{III}} = c_5$$

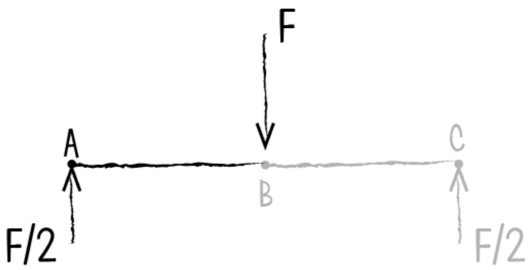
$$v^{\mathrm{II}} = c_5 s + c_6$$

$$v^{\mathrm{I}} = c_5 \frac{s^2}{2} + c_6 s + c_7$$

$$v = c_5 \frac{s^3}{6} + c_6 \frac{s^2}{2} + c_7 s + c_8$$

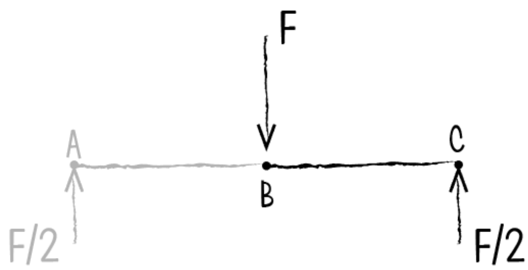
3. Trovare le condizioni al bordo

Per la precisione, integrando, compaiono 8 costanti di integrazione, pertanto è necessario imporre *8 condizioni al bordo*.



Nel punto A:

1. $v(s = 0) = 0$
2. $M(s = 0) = 0$
3. $T(s = 0) = -\frac{F}{2}$



Nel punto C:

4. $v(s = l) = 0$
5. $M(s = l) = 0$
6. $T(s = l) = \frac{F}{2}$

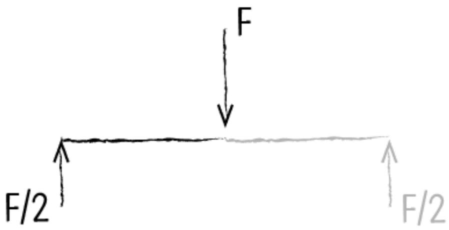
Guardando i bordi della trave, riusciamo ad imporre solo 6 condizioni delle 8 necessarie. Le 2 condizioni al bordo, che mancano all’appello, vanno ricercate nel bordo comune ai due tratti; infatti non dobbiamo dimenticare che la trave è un unico elemento, per cui l’abbassamento della sezione che si trova a destra della sezione mediana, deve essere uguale all’abbassamento della sezione che si trova a sinistra. Lo stesso discorso vale per la rotazione, per cui:

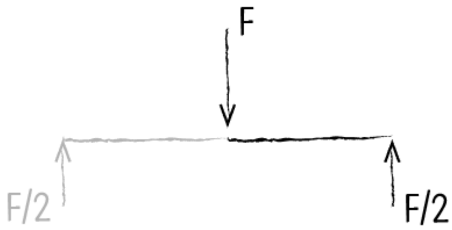
Nel punto B:

7. $v\left(s = \frac{l^-}{2}\right) = v\left(s = \frac{l^+}{2}\right)$

8. $\varphi\left(s = \frac{l^-}{2}\right) = \varphi\left(s = \frac{l^+}{2}\right)$

4. Imporre le condizioni al bordo





1. $c_4 = 0$
2. $c_2 = 0$
3. $c_1 = \frac{F}{2EI}$

4. $c_5\frac{l^3}{6} + c_6\frac{l^2}{2} + c_7 l + c_8 = 0$
5. $c_5 l + c_6 = 0$
6. $c_5 = -\frac{F}{2EI}$

7. $c_1\frac{l^3}{48} + c_2\frac{l^2}{8} + c_3\frac{l}{2} + c_4 = c_5\frac{l^3}{48} + c_6\frac{l^2}{8} + c_7\frac{l}{2} + c_8$
8. $c_1\frac{l^2}{8} + c_2\frac{l}{2} + c_3 = c_5\frac{l^2}{8} + c_6\frac{l}{2} + c_7$

5. Risolvere le equazioni per trovare le costanti

1. $c_4 = 0$
2. $c_2 = 0$
3. $c_1 = \frac{F}{2EI}$

4. $c_8 = \frac{Fl^3}{48EI}$
5. $c_6 = \frac{F}{2EI}l$
6. $c_5 = -\frac{F}{2EI}$

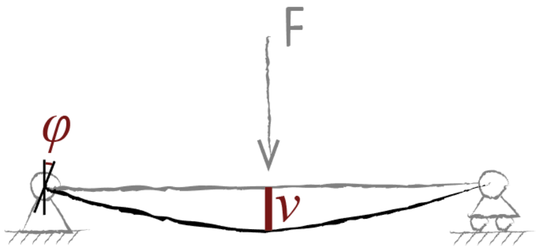
7. $c_7 = -\frac{3Fl^2}{16EI}$

8. $c_3 = -\frac{Fl^2}{16EI}$

6. Riscrivere le equazioni dello spostamento e della rotazione per trovare i valori notevoli:

$$v^{\mathrm{I}} = \frac{F}{4EI}s^2 - \frac{Fl^2}{16EI}$$
$$v = \frac{F}{12EI}s^3 - \frac{Fl^2}{16EI}s$$

$$v^{\mathrm{I}} = -\frac{F}{4EI}s^2 + \frac{F}{2EI}ls - \frac{3Fl^2}{16EI}$$
$$v = -\frac{F}{12EI}s^3 + \frac{F}{4EI}ls^2 - \frac{3Fl^2}{16EI}s + \frac{Fl^3}{48EI}$$



$$\varphi(s=0) = -\frac{Fl^2}{16EI}$$

$$\varphi(s=l) = \frac{Fl^2}{16EI}$$

$$v\left(s=\frac{l}{2}\right) = -\frac{Fl^3}{48EI}$$