EDOARDO BENVENUTO

La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico

Premessa di

ANTONIO BECCHI, MASSIMO CORRADI, FEDERICO FOCE

EDIZIONI DI STORIA E LETTERATURA

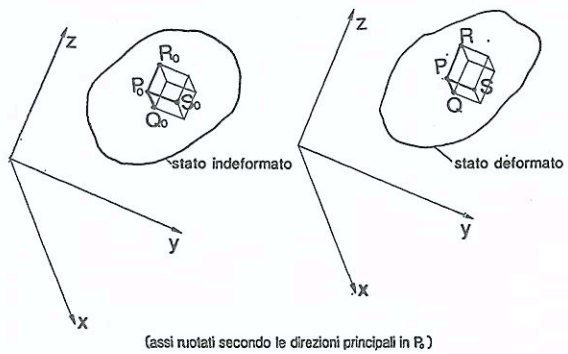

Fig. 11.31.

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon_{xx}-\varepsilon)\,n_x+\varepsilon_{yx}\,n_y+\varepsilon_{zx}\,n_z=0\\
&\varepsilon_{xy}\,n_x+(\varepsilon_{yy}-\varepsilon)\,n_y+\varepsilon_{zy}\,n_z=0\\
&\varepsilon_{xz}\,n_x+\varepsilon_{yz}\,n_y+(\varepsilon_{zz}-\varepsilon)\,n_z=0
\end{aligned}
\tag{11.15.1}
$$

Affinché esistano soluzioni non tutte nulle per n_x, n_y, n_z occorre imporre che sia nullo il determinante dei coefficienti:

$$
\det\begin{vmatrix}\varepsilon_{xx}-\varepsilon & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx}\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy}-\varepsilon & \varepsilon_{zy}\\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz}-\varepsilon\end{vmatrix}=0 \tag{11.15.2}
$$

Cioè:

$$
\varepsilon^3-I_\varepsilon\,\varepsilon^2+II_\varepsilon\,\varepsilon-III_\varepsilon=0 \tag{11.15.3}
$$

dove le quantità:

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon &= \varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}\\
II_\varepsilon &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}+\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{xy}^2-\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{yz}^2\\
III_\varepsilon &= \det\,[\varepsilon_{ij}]
\end{aligned}
\tag{11.15.4}
$$

sono gli invarianti della deformazione. L'equazione (11.15.3) dà luogo a tre radici reali ε_I, ε_{II}, ε_{III} ($\varepsilon_I \geqslant \varepsilon_{II} \geqslant \varepsilon_{III}$). E in corrispondenza di esse il sistema (11.15.1) ammette soluzioni non nulle ulteriormente determinate dalla condizione trigonometrica:

$$
n_x^2+n_y^2+n_z^2=1 \tag{11.15.5}
$$

Tutto torna, senza modifiche rispetto a quel che abbiamo già detto per le tensioni e le direzioni principali nel par. 11.8. Alla radice ε_I è connessa, in generale, una terna di valori n_{xI}, n_{yI}, n_{zI} che definiscono una direzione $\mathbf{n}_I$; analogamente alle radici ε_{II}, ε_{III} sono connesse le terne (n_{xII}, n_{yII}, n_{zII}) e (n_{xIII}, n_{yIII}, n_{zIII}) che definiscono, rispettivamente una direzione $\mathbf{n}_{II}$ e una direzione $\mathbf{n}_{III}$. Si può dimostrare che $\mathbf{n}_I$, $\mathbf{n}_{II}$, $\mathbf{n}_{III}$ sono mutuamente ortogonali.

Le radici ε_I, ε_{II}, ε_{III} prendono il nome di *deformazioni principali*: tra di esse, la ε_I rappresenta la dilatazione massima e la ε_{III} la dilatazione minima nel punto considerato. Le direzioni $\mathbf{n}_I$, $\mathbf{n}_{II}$, $\mathbf{n}_{III}$ sono dette *direzioni principali della deformazione* e, in generale, non coincidono con quelle relative alla tensione; la coincidenza si verifica quando il corpo è *isotropo*.

11.16 IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Nei paragrafi precedenti abbiamo esplorato due « mondi », quello della statica e quello della geometria: sono due mondi separati, anche se in certo modo analoghi; sono governati da una loro interna coerenza gravitante nel primo caso sul concetto di equilibrio e nel secondo sul concetto di congruenza, e nulla potrebbe far sospettare che vi sia un momento in cui i due mondi vengano a contatto congiungendosi in un'unica relazione che ne suggella non solo l'analogia, ma addirittura la « specularità ».

Invece, tale relazione esiste ed è la più antica relazione che la storia della meccanica abbia incontrata sul suo cammino: si tratta del *principio dei lavori virtuali* che sta come sul crinale tra i due « mondi », dove cioè si può scorgere uno di essi poggiando i piedi sull'altro, ovvero, per essere più espliciti, si possono stabilire le equazioni di congruenza facendo appello alle equazioni di equilibrio e si possono ottenere le equazioni di equilibrio a partire dalle equazioni di congruenza.

Noi già conosciamo il principio dei lavori virtuali: sappiamo, al seguito di innumerevoli scienziati antichi e recenti, da Aristotele a Giordano Nemorario, da Cartesio a Lagrange, che se un sistema meccanico è in *equilibrio*, il lavoro virtuale compiuto da tutte le forze attive e reattive agenti sul sistema, per qualunque stato di spostamento infinitesimo dei punti del sistema *compatibile* con i vincoli, è nullo.

Volendo applicare questo principio al corpo deformabile considerato per l'analisi della tensione e della deformazione, le cose sono un poco più complesse. Nel corpo infatti operano, certamente, le forze di volume $\mathbf{F}$ e di superficie $\mathbf{f}$; ma operano anche quelle « forze interne » che abbiamo denominato tensioni. E nello stesso corpo si può, certamente, assegnare uno stato di spostamento infinitesimo $\delta\mathbf{u}$ di ogni suo punto compatibile con i vincoli geometrici eventualmente presenti su parte del contorno; ma in corrispondenza di $\delta\mathbf{u}$ si manifestano su ogni elemento del corpo dilatazioni lineari e scorrimenti angolari che sono rappresentati dalle componenti della deformazione.

È dunque prevedibile che il principio dei lavori virtuali dovrà tener conto

Ciò vuol dire che imporre l'equazione dei lavori virtuali nella nuova forma qui utilizzata, con riferimento alle « forze virtuali » δf_j, δF_j, è del tutto equivalente a imporre che le deformazioni ε_{ij} obbediscano alle equazioni di congruenza in ogni punto del corpo.

Questa seconda interpretazione del principio dei lavori virtuali è utilissima per le applicazioni, quanto la prima e forse ancor di più. Ne faremo largo uso per l'analisi delle travature elastiche in capitoli successivi.

Tutto quello che si è detto sinora dovrebbe essere ulteriormente motivato: si dovrebbe cioè dimostrare che *effettivamente* l'equazione (11.16.7) produce, in virtù delle (11.16.5), le equazioni di equilibrio (11.7.8) e (11.7.11), e che *effettivamente* la (11.16.9) produce, in virtù delle (11.16.8), le equazioni di congruenza. Ma la cosa non presenta alcuna difficoltà concettuale ed esige soltanto pedissequi passaggi formali.

11.17 CENNO ALLE TEORIE SUI LEGAMI COSTITUTIVI

È ormai necessario uscire dagli astratti costrutti e dai concetti mentali (nel senso già illustrato nel par. 11.5) e rivolgere finalmente l'attenzione alla realtà, così com'è, o, per essere più cauti, così come è esibita dall'esperienza. Sino ad ora abbiamo immaginato l'esistenza di un ente, la tensione, raffigurandola come forza associata a una certa *giacitura*; poi abbiamo definito la deformazione, ad esempio la dilatazione lineare, come quantità associata a un *elemento lineare*. Tutto ciò ha favorito il nostro interessamento non per il comportamento fenomenologico del materiale che costituisce il corpo, ma per alcuni elementari aspetti relativi alla geometria della porzione di spazio occupata dal corpo. Per questo, la struttura formale delle equazioni di equilibrio e di congruenza che si sono ottenute non è direttamente connessa all'interpretazione fisico-meccanica delle grandezze considerate: ad esempio, in altri settori della fisica, quando sia lecito stabilire un bilancio tra certe grandezze che entrano ed escono e sono accumulate, o sono prodotte in una generica regione dello spazio durante un intervallo di tempo, si perviene ad equazioni formalmente analoghe alle equazioni indefinite di Cauchy (11.7.8). Di più: l'equilibrio e la congruenza sono concetti che si riferiscono a tutti i corpi, di là da ogni distinzione tra questo o quel materiale: e questa osservazione ci fa intuire che tali concetti si riferiscono a ciò che caratterizza il corpo in quanto tale, facendo parte della sua stessa definizione più generica, ossia l'*estensione* nello spazio, secondo la terminologia di Cartesio. Risale infatti a Cartesio la definizione della realtà materiale come « res extensa ».

Ora, invece, dobbiamo scendere dall'astratto al concreto, o meglio, dal generale al particolare, considerando l'effettivo comportamento dei corpi dal punto di vista meccanico. Subito ci si presenta dinanzi una vasta e complessa fenomenologia: pur limitando l'attenzione ai corpi solidi, ci rendiamo facilmente conto che diversa è la risposta alle sollecitazioni offerta da un materiale elastico, omogeneo e isotropo (come l'acciaio, entro certi limiti) rispetto a

quella di un materiale, ancora elastico, ma dotato di direzioni privilegiate (come il legno con le sue fibre), o di un materiale viscoso la cui deformazione cresce nel tempo anche se la sollecitazione resta costante (come ad esempio un conglomerato bituminoso e anche, per certi riguardi, un conglomerato cementizio), o di un materiale plastico che, al cessare della sollecitazione, conserva una deformazione permanente, e così via. Assai spesso, poi, accade che uno stesso materiale esibisce diverse modalità di risposta al variare dell'intensità della sollecitazione e che quindi non è possibile una rigida classificazione, dovendosi valutare volta per volta quale sia il comportamento prevalente che merita di essere considerato.

Solo l'esperienza, naturalmente, può gettare luce su tutti questi diversi casi; tuttavia, il fondamento teorico che consente di descrivere in termini matematici le differenze fenomenologiche è abbastanza unitario. Si tratta di stabilire, per via sperimentale, una qualche relazione che colleghi la tensione ai suoi effetti deformativi che, non di rado, possono essere ricondotti alle componenti della deformazione. La « bontà » del « costrutto-tensione » è così verificata nel modo più semplice, anche se indiretto: correlando il « costrutto-tensione » con i « concetti mentali » riguardanti la geometria dello stato deformato. I termini della relazione, considerati ognuno per suo conto, non hanno un immediato riscontro sperimentale, ma lo ottengono proprio attraverso il *legame costitutivo* che li rende espressivi del comportamento particolare di un corpo particolare.

In tempi recenti — nella seconda metà del nostro secolo — la teoria dei legami costitutivi ha incontrato il vivo interesse dei meccanici razionali. Eminenti scienziati come C. Truesdell, W. Noll, B. D. Coleman, J. L. Ericksen ne hanno proposto un'impostazione oltremodo astratta e rigorosa, sviscerando il maggior numero possibile di risultati dal minor numero possibile di princìpi, con metodi strettamente deduttivi. L'aggancio dell'esperienza è stato così, di nuovo, trasferito a una fase successiva della ricerca, si potrebbe dire, al momento applicativo; e numerose informazioni sul comportamento dei materiali che sembravano derivare esclusivamente dalla sperimentazione si sono rivelate nella loro intima radice quali corollari di postulati semplicissimi e del tutto generali.

La teoria dei legami costitutivi ha, in certo modo, l'aspetto di una grande classificazione, dove ogni elemento è caratterizzato dalla sua posizione rispetto agli altri di gerarchia più elevata o di rango più ridotto, e su ogni elemento è possibile svolgere un'appropriata teoria senza dover per questo fare appello a una corrispondenza reale con i dati empirici. Questi intervengono, perciò, alla fine, per potere affermare che il tale materiale risponde ai requisiti necessari per ascriverlo al tale tassello della classificazione.

I princìpi fondamentali sono i seguenti:

I) *principio di determinismo;*

II) *principio dell'azione locale;*

III) *principio di indifferenza del riferimento materiale.*

Pur dovendoci limitare a un cenno sbrigativo, l'intrinseco interesse concettuale della teoria, che costituisce una delle più importanti acquisizioni della moderna meccanica dei materiali, suggerisce di citarne alcune nozioni elementari. Indichiamo con P un punto qualunque del corpo, con t l'ascissa temporale, con $\chi(P, t)$ la funzione (vettoriale) che rappresenta, per ogni valore di t e per ogni punto P, il moto del corpo. Ricordiamo, inoltre, che per *funzionale* di una funzione f si intende, genericamente, una quantità determinata da f.

Ebbene, il *principio di determinismo* afferma che *la tensione in un corpo è determinata*, nel caso più generale possibile, *dalla storia del moto precedentemente seguito dal corpo*. Se si denota con σ il tensore della tensione, ne viene che l'equazione costitutiva più generale è del tipo:

$$\sigma(P, t) = \mathscr{F}(\chi; P, t) \tag{11.17.1}$$

dove $\mathscr{F}$ è un funzionale del moto χ e dove $\chi(P, \tau)$ è ristretto all'intervallo $-\infty < \tau \leqslant t$, essendo t il tempo attuale. Ciò vuol dire, essenzialmente, che solo l'esperienza *passata* è rilevante per determinare la tensione.

Sul *principio dell'azione locale* abbiamo già detto qualcosa nel cap. 1, esaminandone una remotissima premessa in alcune tesi della fisica aristotelica; naturalmente la sua metamorfosi moderna lo rende del tutto irriconoscibile e originale. Esso afferma che *il moto delle particelle materiali esterne a un intorno arbitrariamente piccolo di una qualunque particella, può essere ignorato nella determinazione della tensione in tale particella*. Ciò deriva dal fatto che le tensioni sono forze di contatto e debbono essere determinate soltanto da azioni di contatto, anche se, eventualmente, remote nel tempo. Sotto il profilo formale, questa condizione impone che il funzionale $\mathscr{F}$ soddisfi la seguente proprietà: se si considerano due moti χ e χ' del corpo tali che in un intorno piccolissimo di P coincidano per ogni valore del tempo precedente l'istante attuale, e per il resto siano diversi, deve aversi:

$$\mathscr{F}(\chi; P, t) = \mathscr{F}(\chi'; P, t) \tag{11.17.2}$$

Infine il terzo *principio, di indifferenza del riferimento materiale*, asserisce che *due «osservatori» debbono poter determinare lo stesso valore della tensione, indipendentemente dal riferimento in cui essi si pongono nel valutare il moto del corpo*.

Per fissare le idee supponiamo che il primo osservatore usi il riferimento (x, y, z, t) e il moto del corpo a lui appaia essere $\chi(P, t)$. Il secondo osservatore usi invece il riferimento $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{t})$ e per lui il moto sia $\bar{\chi}(P, \bar{t})$.

Al mutare del riferimento le componenti del vettore $\bar{\chi}$ si trasformano, come è ovvio, secondo le (fig. 11.32):

$$\chi_{\bar{x}} = \chi_x n_{x\bar{x}} + \chi_y n_{y\bar{x}} + \chi_z n_{z\bar{x}} + c_{\bar{x}} \tag{11.17.3}$$

(e analoghe)

dove $c \equiv (c_{\bar{x}}, c_{\bar{y}}, c_{\bar{z}})$ è un vettore (dipendente dal tempo). In notazione matriciale, le (11.17.3) possono scriversi sinteticamente così:

$$\bar{\chi} = T\chi + c \tag{11.17.4}$$

essendo T la matrice ortogonale:

$$T = \begin{vmatrix} n_{x\bar{x}} & n_{y\bar{x}} & n_{z\bar{x}} \\ n_{x\bar{y}} & n_{y\bar{y}} & n_{z\bar{y}} \\ n_{x\bar{z}} & n_{y\bar{z}} & n_{z\bar{z}} \end{vmatrix} \tag{11.17.5}$$

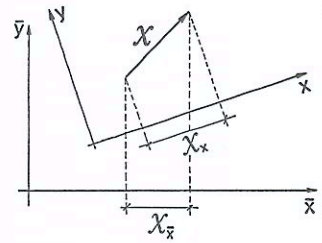

Fig. 11.32.

Inoltre si ha, in generale, $\bar{t} = t - a$, dove a è una costante. Dunque, per il primo osservatore l'equazione costitutiva ha la forma:

$$\sigma = \mathscr{F}(\chi; P, t) \tag{11.17.6}$$

Invece per il secondo osservatore ha la forma:

$$\bar{\sigma} = \mathscr{F}(\bar{\chi}; P, \bar{t}) \tag{11.17.7}$$

D'altra parte, σ e $\bar{\sigma}$ sono fra loro legati dalle relazioni (11.8.5) che possono essere espresse in notazione matriciale secondo la:

$$\bar{\sigma} = T\sigma T^t \tag{11.17.8}$$

(T^t rappresenta la matrice trasposta di T). Ebbene, il principio di indifferenza del riferimento materiale impone che anche il funzionale costitutivo $\mathscr{F}$ obbedisca alla legge di trasformazione (11.17.8) e perciò soddisfi la:

$$\mathscr{F}(T\chi + c; P, t - a) = T\mathscr{F}(\chi; P, t)T^t \tag{11.17.9}$$

A questo punto, la teoria generale dei legami costitutivi ha trovato i suoi princìpi fondamentali che ne definiscono il vasto campo d'azione: di qui in poi il discorso consiste, in ultima analisi, nell'introdurre ipotesi aggiuntive, dalle più deboli alle più circoscritte, che consentano di particolarizzare la (11.17.1).

Si giunge così a definire, per esempio, *l'equazione costitutiva di un materiale semplice*, quando la tensione in un punto P di coordinate x, y, z non dipenda più genericamente dal moto della particella P, ma dalla *storia della deformazione* nel punto x, y, z, ossia dai valori assunti dalla deformazione in tale punto in ogni tempo precedente l'istante attuale. Entro questa classe di corpi, ancora molto estesa, si può considerare la sottoclasse dei corpi dotati di isotropia. Si deve a W. Noll una definizione rigorosa dell'isotropia mediante un'espressiva applicazione di concetti algebrici tratti dalla *teoria dei gruppi*.

Scendendo sempre più giù « per li rami » della grande classificazione, si incontrano i *corpi dotati di memoria rilassante*, sensibili cioè più alla storia recente della deformazione che non a quella remota: la teoria relativa è stata stabilita da Coleman e Noll intorno al 1959, offrendo un grande quadro organico del comportamento viscoso dei materiali. E finalmente si perviene ai *corpi elastici* sui quali dobbiamo soffermarci con maggiore attenzione. È opportuno però, a tal fine, abbandonare questo formalissimo contesto, tornando nuovamente alla nostra storia e alla sistemazione ottocentesca della *teoria dell'elasticità*.

11.18 LO STATO ELASTICO

Se l'equazione costitutiva è del tipo:

$$\sigma_{ij} = \mathfrak{G}_{ij}(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \ldots, \varepsilon_{zz}; x, y, z) \qquad (i, j = x, y, z) \tag{11.18.1}$$

dove le $\mathfrak{G}_{ij}$ sono funzioni delle componenti di deformazione e delle coordinate, il materiale è detto *elastico*. Ciò significa che, in un materiale elastico, lo stato di tensione all'istante t non dipende dalla precedente storia del moto (o della deformazione), ma soltanto dalla configurazione *locale*, in quell'istante. Il legame espresso dalla (11.18.1) è dunque *olonomo*, ossia, secondo l'etimologia, è rappresentato da una legge intera. Usando una notazione matriciale e ponendo, come già nel paragrafo precedente:

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \tag{11.18.2}$$

la (11.18.1) può scriversi così:

$$\sigma = \mathfrak{G}(\varepsilon, P)$$

dove P è il punto di coordinate (x, y, z). Se il materiale è *omogeneo*, le funzioni $\mathfrak{G}_{ij}$ dipendono soltanto dalla deformazione e non dalle coordinate del punto P. Perciò le (11.18.1), (11.18.2) diventano

$$\sigma_{ij} = \mathfrak{G}_{ij}(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \ldots, \varepsilon_{zz}) \tag{11.18.3}$$

$$\sigma = \mathfrak{G}(\varepsilon) \tag{11.18.4}$$

Una particolare importanza applicativa riveste il caso di *comportamento lineare*, nel quale le funzioni $\mathfrak{G}_{ij}$ si riducono a combinazioni lineari delle componenti di deformazione. Le equazioni di legame elastico prendono allora la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E_{xxxx}\varepsilon_{xx} + E_{xxxy}\varepsilon_{xy} + \ldots E_{xxzz}\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{xy} &= E_{xyxx}\varepsilon_{xx} + E_{xyxy}\varepsilon_{xy} + \ldots E_{xyzz}\varepsilon_{zz} \\ &\text{(e analoghe)} \end{aligned} \tag{11.18.5}$$

dove i coefficienti E_{ijpq} (i, j, p, q = x, y, z) non dipendono dalla deformazione ma solo, eventualmente, dalla posizione della particella materiale (corpo eterogeneo). L'indipendenza di E_{ijpq} dalle coordinate x, y, z caratterizza il comportamento di un *corpo elastico, lineare e omogeneo*. Per la simmetria di σ_{ij} e di ε_{ij}, ossia per il fatto che $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, i coefficienti E_{ijpq} effettivamente distinti sono, al più, in numero di 36. Essi sono usualmente denominati *elasticità del materiale* o, semplicemente, *moduli elastici*.

La definizione dello stato elastico espressa dalla (11.18.3) o, in particolare, dalle (11.18.5) si richiama implicitamente a una terna di assi x, y, z rispetto alla quale sono valutate sia le σ_{ij}, sia le ε_{ij}. Operando una rotazione del riferimento è chiaro che, in generale, le funzioni $\mathfrak{G}_{ij}$ o le elasticità E_{ijpq} mutano fisionomia, modificando la loro forma e il loro valore (pur sempre nel rispetto del *principio di indifferenza* ricordato nel paragrafo precedente). Ciò consente peraltro di rendere conto dell'eventuale *anisotropia* del materiale: un cubetto estratto dal corpo offre infatti una risposta elastica differente al variare della giacitura delle sue facce.

Se invece accade che la forma delle funzioni $\mathfrak{G}_{ij}$, o il valore dei coefficienti E_{ijpq}, *è insensibile a qualsiasi rotazione del riferimento materiale* x, y, z, *si dice che lo stato elastico è isotropo*. Molteplici sono le proprietà dell'isotropia elastica; in un materiale che goda di tale caratteristica le direzioni principali della tensione coincidono con quelle della deformazione e, perciò, la quadrica delle tensioni è simile e situata similmente alla quadrica delle deformazioni. Cauchy, nell'articolo degli *Exercices de Mathématiques* intitolato « *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique* »[27] partì proprio da questa audace intuizione per stabilire le equazioni del legame elastico isotropo lineare.

Noi ci atterremo alla definizione precedente, poiché da essa derivano subito per via elementare i risultati più interessanti. Supponiamo infatti che la matrice $\mathfrak{G}$, i cui elementi sono le funzioni $\mathfrak{G}_{ij}$, sia sviluppabile in serie di potenze

[27] A. Cauchy, cit., *3*, pp. 160-187.