Appare opportuno raccogliere nel quadro seguente le relazioni tra le varie costanti elastiche, in quanto nella trattazione dei diversi problemi particolari conviene evidentemente fare uso delle costanti che conducono a relazioni formali più semplici.

Costanti	λ, μ	K, G	μ, ν	E, ν	E, G
λ	λ	$K - \frac{2}{3} G$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
$\mu = G$	μ	G	μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	G
K	$\frac{3\lambda+2\mu}{3}$	K	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$2(1+\nu)\mu$	E	E
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$	ν	ν	$\frac{E-2G}{2G}$

41. Problema dell'equilibrio elastico isotropo.

Possiamo ora formulare in modo completo il problema dell'equilibrio per un solido elastico omogeneo isotropo, di determinare cioè lo stato di tensione-deformazione assegnate le forze di volume p_j nei punti interni, le forze di superficie f_j nei punti di una porzione A_f della frontiera A e gli spostamenti u_j nei punti della porzione rimanente A_u.

Il problema è fondato sulle equazioni di congruenza e di vincolo [38. 1] e [38. 2], sulle equazioni di equilibrio indefinite ed ai limiti [38. 3] e [38. 4] e sulle relazioni di elasticità isotropa [40. 5].

Poichè tutte le relazioni citate hanno carattere lineare, siamo in presenza di un *problema lineare al contorno di tipo misto*, in quanto le forze di superficie e gli spostamenti sono prescritti su porzioni complementari, A_f e A_u rispettivamente, della frontiera A delimitante il volume V occupato dal solido elastico.

In casi particolari può accadere che siano assegnati sull'intera frontiera o soltanto gli spostamenti u_j o soltanto le forze f_j: ci riduciamo allora a due problemi speciali ottenuti evidentemente dal problema generale ponendo rispettivamente $A_u = A$ oppure $A_f = A$.

In considerazione di tali possibilità appare opportuno poter esprimere tutte le equazioni sopra indicate unicamente in termini delle componenti di spostamento nel primo caso oppure delle componenti di tensione nel secondo.

a) *Equazioni del problema in termini di spostamenti.*

Sostituendo le equazioni di congruenza [38. 1] nelle relazioni di elasticità [40. 5] otteniamo le componenti di tensione in funzione dei gradienti di spostamento:

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \delta_{ij}\,\lambda u_{k,k}\,, \qquad [41.\ 1]$$

e quindi le equazioni indefinite di equilibrio:

$$\mu(u_{i,ji} + u_{j,ii}) + \delta_{ij}\,\lambda u_{k,ki} + p_j = 0\,. \qquad [41.\ 2]$$

Eseguita l'operazione indicata dalla funzione di Kronecker e introdotto *l'operatore di Laplace* $\nabla u_j = u_{j,ii}$, le equazioni indefinite nelle derivate seconde delle componenti di spostamento assumono la forma:

$$\mu\nabla u_j + (\lambda + \mu)\, u_{i,ij} + p_j = 0\,. \qquad [41.\ 3]$$

In modo analogo per le equazioni di equilibrio ai limiti [38. 4] otteniamo:

$$[\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \delta_{ij}\,\lambda u_{k,k}]\, n_i = f_j\,, \qquad [41.\ 4]$$

e sviluppando le operazioni indicate, anche:

$$\mu\,(u_{i,j} + u_{j,i})\, n_i + \lambda u_{k,k}\, n_j = f_j\,. \qquad [41.\ 5]$$

Le equazioni differenziali [41. 3] e le corrispondenti condizioni ai limiti [41. 5] rappresentano la formulazione completa, dovuta a NAVIER[1], del problema dell'equilibrio elastico isotropo in termini di componenti di spostamento.

Deriviamo ora ciascuna delle tre equazioni [41. 3] rispetto alla variabile corrispondente x_j:

$$\mu\nabla u_{j,j} + (\lambda + \mu)\, u_{i,ijj} + p_{j,j} = 0\,, \qquad [41.\ 6]$$

e sommiamo le tre equazioni così ottenute rispetto all'indice j:

$$(\lambda + 2\mu)\,\nabla u_{i,i} + p_{j,j} = 0\,. \qquad [41.\ 7]$$

Se le forze di volume sono costanti, cioè $p_{j,j} = 0$, discende dalla [41. 7] l'interessante proprietà che $u_{i,i}$ risulta una *funzione armonica* perchè verifica l'equazione di Laplace:

$$\nabla u_{i,i} = 0\,, \qquad [41.\ 8]$$

[1] C. L. NAVIER, *Mém. Acad. Sciences*, Paris (2), 7, 375 (1827).