1 Punto materiale iperelastico lineare

Un punto materiale elastico lineare $\boldsymbol{p}$, si dice *iperelastico* se esiste una funzione scalare $\pi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{p})$ tale che

$$\frac{\partial \pi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \tag{1}$$

La funzione scalare $\pi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{p})$ è la densità di energia potenziale elastica (spesso indicata anche come energia di deformazione elastica).

Poiché fra sforzo e deformazione esiste una relazione lineare, si può scrivere

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}[\boldsymbol{\epsilon}] \qquad \text{e, in forma scalare} \qquad \sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}\, \epsilon_{kl} \tag{2}$$

$\mathbb{C}$ si può rappresentare con una marice quadrata di nove righe (tante quante sono le componenti di $\boldsymbol{\sigma}$) e nove colonne (tante quante sono le componenti di $\boldsymbol{\epsilon}$) ovvero con 81 .

In realtà, $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\epsilon}$ hanno solo 6 componenti indipendenti ciascuno, per cui i di $\mathbb{C}$ si riducono, solo per questo, a 36.

Inoltre, tenendo presente la (1) e la $(2)_2$ si ottiene

$$\frac{\partial \pi}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}\, \epsilon_{kl} \tag{3}$$

e pertanto

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \frac{\partial \pi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \tag{4}$$

Ora, ricordando la proprietà di simmetria della derivata mista di una funzione di più variabili,

$$\frac{\partial \pi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial \pi}{\partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{ij}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} \tag{5}$$

e osservando che la $(2)_2$ si rappresenta nella forma

$$
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{1111} & \mathbb{C}_{1122} & \cdots & \mathbb{C}_{1123} \\ \mathbb{C}_{2211} & \mathbb{C}_{2222} & \cdots & \mathbb{C}_{2223} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{C}_{2311} & \mathbb{C}_{2322} & \cdots & \mathbb{C}_{2323} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{pmatrix} \tag{6}
$$

per la $(4)_2$ risulta simmetrica (per es. $\mathbb{C}_{1122} = \mathbb{C}_{2211}$) e quindi i suoi coefficienti indipendenti sono $6 \times (6+1)/2 = 21$.

2 Punto materiale elastico lineare isotropo

Si può dimostrare che la relazione costitutiva dipende da *due* costanti ed ha la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{I} \tag{7}$$

ove μ e λ sono le costanti di Lamé.

Utilizzando le componenti speciali dello sforzo, La (7) si scrive

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} + \lambda(\epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33}) \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

che, scritta nella forma (6) è

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{pmatrix} \tag{9}$$

La (7) si può invertire facilmente osservando che, in 3D, $\mathrm{tr}\boldsymbol{I} = 3$, e che

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = (2\mu + 3\lambda)\mathrm{tr}\boldsymbol{\epsilon} \tag{10}$$

per cui

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2\mu}\left[\boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I}\right] \tag{11}$$

che, nella forma corrispondente a (12), si scrive

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)} & -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)} & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)} & \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)} & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)} & -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)} & \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+3\lambda)} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2\mu} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2\mu} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}$$

$$\tag{12}$$

Si consideri il caso dello *stato di sforzo uniassiale* e si ponga

$$(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} \sigma & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \tag{13}$$

dalla (11) si ottiene

$$(\boldsymbol{\epsilon}) = \begin{pmatrix} \epsilon & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\nu\epsilon & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\nu\epsilon \end{pmatrix} \tag{14}$$

con

$$\epsilon = \frac{1}{E}\sigma \tag{15}$$

e

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \tag{16}$$

Dalle (16) si ottiene

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu}{1 - 2\nu} 2\mu \\ \frac{\nu}{E} &= \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \end{aligned} \tag{17}$$

Utilizzando la $(17)_1$, poi, risulta

$$\begin{aligned} 2\mu + 3\lambda &= 2\mu\,\frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \\ \mu + \lambda &= \frac{\mu}{1 - 2\nu} \end{aligned}$$

che, sostituite nella $(16)_1$, danno

$$E = 2\mu(1 + \nu) \tag{18}$$

per cui, in definitiva, le espressioni di μ, λ, in funzione di E, ν, sono

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{19}$$

Pertanto si può scrivere

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I}\right] \tag{20}$$

Dalla (20) si ottiene

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1-2\nu}{E}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1-2\nu}\mathrm{tr}\boldsymbol{\epsilon} \tag{21}$$

e quindi

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left[\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{I}\right] \tag{22}$$

Si osservi che nel caso di *deformazione monoassiale*, ad esempio $\epsilon_{11} = \epsilon, \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$, dalla (22) si ottiene

$$\sigma_{11} = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\, E\, \epsilon_{11} \tag{23}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\, E\, \epsilon_{11} \tag{24}$$

mentre la relazione $\sigma = E\,\epsilon$, corrispondente a uno *stato di sforzo uniassiale*, è associata allo stato di deformazione triassiale $\epsilon_{11} = \epsilon, \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \nu\epsilon$.

Si osservi che le relazioni (23) e (24) si possono scrivere nella forma

$$\sigma_{11} = E^* \epsilon_{11} \qquad \text{con } E^* = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\, E \tag{25}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{\nu}{(1-\nu)}\, E\, \epsilon_{11} \tag{26}$$

La relazione (25) è formalmente analoga a quella che caratterizza lo stato di sforzo monoassiale, con la sola differenza che il modulo di Young, E, è stato sostituito dalla costante E^*, che chiameremo modulo di Young *apparente*.

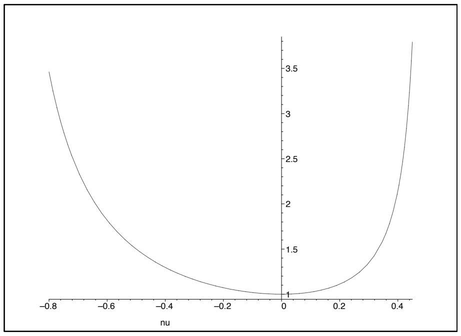

Figura 1: E* in funzione di ν

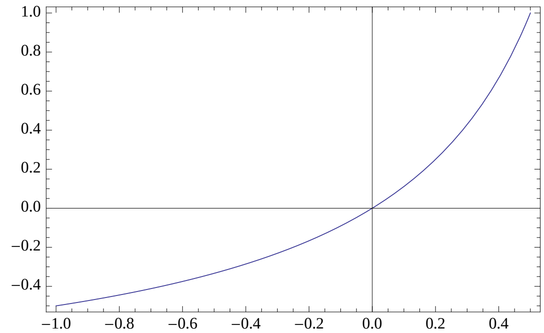

Figura 2: σ_{22} in funzione di σ_{11}

Ora è interessante notare che per i materiali più comuni $\nu \simeq 0.3$ per cui $E^* \simeq 1.4\,E$, ovvero il materiale esibisce un modulo elastico apparente *maggiore* di E, ovvero appare più *rigido*. Questo effetto è denominato di *confinamento*.

Nella Figura 2 viene mostrato il grafico delle funzioni $(25), 26$, ricordando che ν puo' assumere valori nell'intervallo $(-1, 0.5)$.

*

Si consideri ora il campo dello spostamento

$$\begin{aligned} u_1(p) &= \frac{k}{2}[x_3^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2)] \\ u_2(p) &= k\nu x_1 x_2 \\ u_3(p) &= -k x_1 x_3 \end{aligned} \tag{27}$$

Risulta

$$(\boldsymbol{\epsilon}) = \begin{pmatrix} \nu k x_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \nu k x_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -k x_1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

per cui

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\boldsymbol{\epsilon} &= -(1-2\nu) k x_1 \\ \frac{\nu}{1-2\nu}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\epsilon} &= -\nu k x_1 \end{aligned} \tag{29}$$

e quindi

$$(\boldsymbol{\sigma}) \;=\; \frac{E}{1+\nu}\left[\begin{pmatrix} \nu k x_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \nu k x_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -k x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\nu k x_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\nu k x_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -k x_1 \end{pmatrix}\right]$$

ovvero

$$\sigma_{33} = -E k x_1 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \neq (3,3) \tag{30}$$

Il risultato ottenuto è visualizzato nella Figura 4 che rappresentalo stato di sforzo al bordo di un dominio a forma di prisma a base rettangolare.

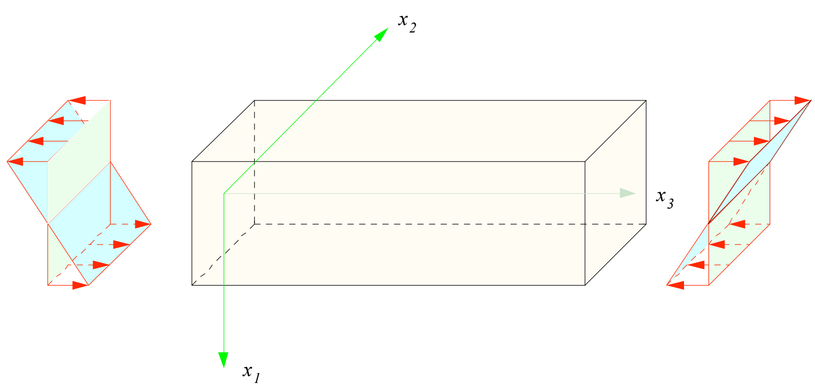

Figura 3: Rappresentazione dello stato di sforzo

Usando le costanti di Lamé, si ottiene

$$(\boldsymbol{\sigma}) \;=\; 2\mu \begin{pmatrix} \nu k x_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \nu k x_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -k x_1 \end{pmatrix} - \lambda(1-2\nu) \begin{pmatrix} k x_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & k x_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & k x_1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Ricordando la $(17)_1$ e osservando che $\lambda(1-2\nu) = 2\mu\nu$, si ottiene

$$\sigma_{33} = -\mu\,\frac{2\mu+3\lambda}{\mu+\lambda}\,k x_1 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \neq (3,3) \tag{32}$$

3 Compressione e componente tangenziale

Si consideri un punto in cui agisce uno stato di sforzo composto da compressione e taglio, vedi Figura 4 La matrice che lo rappresenta è

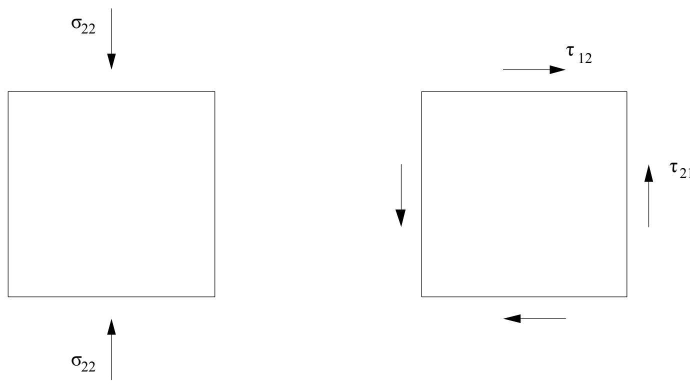

Figura 4: Stato di sforzo composto

$$(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} \cdot & \tau \\ \tau & -p \end{pmatrix} \tag{33}$$

Cerchiamo le tensioni e le direzioni principali. Per questo bisogna risolvere il seguente problema agli autovalori

$$(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \boldsymbol{I})\, \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -\lambda & \tau \\ \tau & -\lambda - p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{34}$$

Si ricava facilmente che i due autovalori sono

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4\tau^2}}{2} \\ \lambda_1 &= \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4\tau^2}}{2} \end{aligned} \tag{35}$$

Sostituendo λ_1 nella (34) si ottiene

$$-\frac{-p + \sqrt{p^2 + 4\tau^2}}{2}\, n_1 + \tau\, n_2 = 0 \tag{36}$$

ovvero

$$\frac{n_2}{n_1} = \tan\alpha_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4\tau^2}}{2\,\tau} \tag{37}$$

ove α_1 è l'angolo che $\boldsymbol{n}$ forma con l'orizzontale. Analogamente, sostituendo λ_2 nella (34) si ottiene

$$\frac{n_2}{n_1} = \tan\alpha_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4\tau^2}}{2\,\tau} \tag{38}$$

E' interessante vedere cosa succede quando $\tau \to 0$ e $\tau \to \infty$, che corrispondono ai casi di compressione uniassiale e taglio puro, rispettivamente. Poiché gli autovettori sono ortogonali, è sufficiente analizzare cosa succede in corrispondenza di un solo autovalore. Consideriamo per esempio la (38).

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4\tau^2}}{2\,\tau} = \infty \qquad \Rightarrow \quad \alpha_1 \to \frac{\pi}{2} \tag{39}$$

mentre

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4\tau^2}}{2\,\tau} \tag{40}$$

è una forma indeterminata. Per risolverla, si consideri la forma equivalente

$$\begin{aligned} &\lim_{\tau\to\infty} \frac{-p - \sqrt{p^2 + 4\tau^2}}{2\,\tau}\,\frac{-p + \sqrt{p^2 + 4\tau^2}}{-p + \sqrt{p^2 + 4\tau^2}} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{-4\tau^2}{2\,\tau\,(-p + \sqrt{p^2 + 4\tau^2})} \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \frac{-2}{\frac{-p}{\tau} + \sqrt{\frac{p^2}{\tau^2} + 4}} = -1 \qquad \Rightarrow \quad \alpha_1 \to -\frac{\pi}{4} \end{aligned} \tag{41}$$

La Figura (5) rappresenta la direzione delle direzioni di fessurazione al variare del rapporto τ/σ.

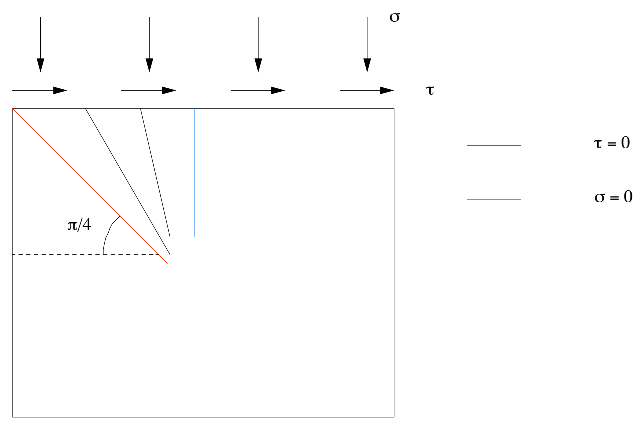

Figura 5: direzioni di fessurazione

E' interessante dare una rappresentazione grafica dei risultati precedenti. A tal fine, posto

$$\sqrt{p^2 + 4\tau^2} = p + k(\tau) \qquad \text{ove } \ k(\tau) > 0 \ \ \forall\tau \neq 0, \quad \tau = 0 \Rightarrow k(\tau) = 0 \tag{42}$$

si può scrivere

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= k(\tau) \\ \lambda_1 &= -p - k(\tau) \end{aligned} \tag{43}$$

Le circonferenze di Mohr che rappresentano lo stato di sforzo al variare di τ avranno raggio lungo

$$\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{p}{2} + k(\tau) \tag{44}$$

e centro di coordinate

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = -\frac{p}{2} \\ c_2 &= 0 \end{aligned} \tag{45}$$

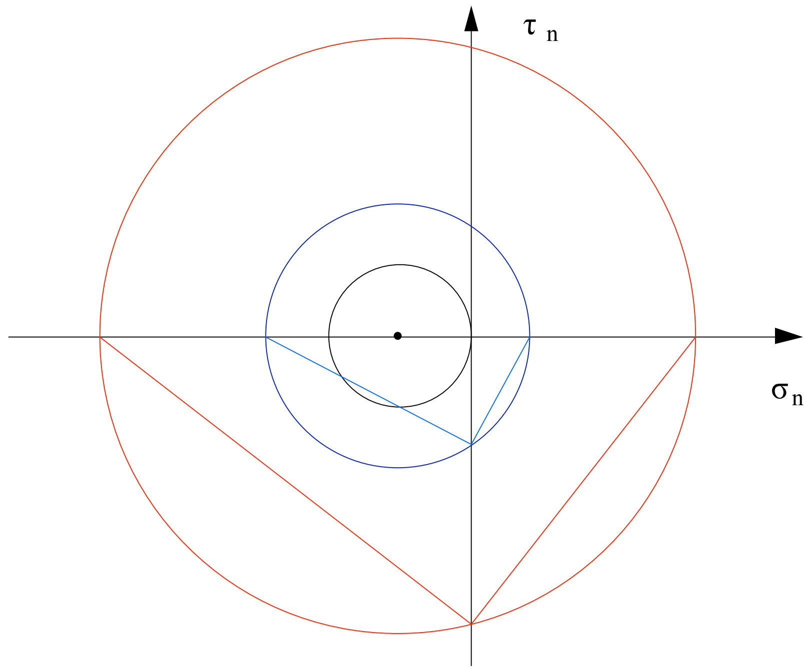

Figura 6: Circonferenze di Mohr

Dunque sono circonferenze concentriche il cui raggio cresce al crescere di τ. La Figura 6 mostra chiaramente come per $\tau = 0$ la circonferenza è tangente all'asse verticale, per $\tau \to \infty$ le direzioni principali tendono ad essere inclinate a 45^0.

Si consideri ora il valore limite dello sforzo di trazione, e lo si indichi con σ^*. Ci chiediamo quale sia, assegnato p, il valore massimo dello sforzo tangenziale che si può applicare senza che vi sia rottura per trazione.

$$
\begin{aligned}
\sigma^* &= \frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 + 4\tau^2} \\
2\sigma^* + p &= \sqrt{p^2 + 4\tau^2} \\
(2\sigma^* + p)^2 &= p^2 + 4\tau^2 \\
\tau &= \sqrt{\sigma^*(\sigma^* + p)}
\end{aligned}
\tag{46}
$$