

# Teorema di Cauchy

Cosideriamo un corpo continuo in uno spazio bidimensionale. Esso può essere separato in due parti tracciando una linea (regolare) ideale. Queste parti si scambiano azioni dinamiche. L'ipotesi su cui si fonda la teoria che si espone qui di seguito, sono essenzialmente due (ipotesi di Cauchy)

- a) le azioni sono delle forze che ammettono densità rispetto alla lunghezza della linea ideale di taglio;
- b) in ogni punto la densità dipende *solo* dalla normale alla tangente alla linea.

Si osservi che la seconda ipotesi consente di pensare solo a *tagli* con segmenti di retta per indagare sulla densità di azione di *incollaggio* in un punto. Pertanto questa avrà forma  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  ove  $\mathbf{n}$  è il versore normale alla linea del taglio, orientato nel verso uscente dalla parte del corpo su cui la densità si considera applicata.

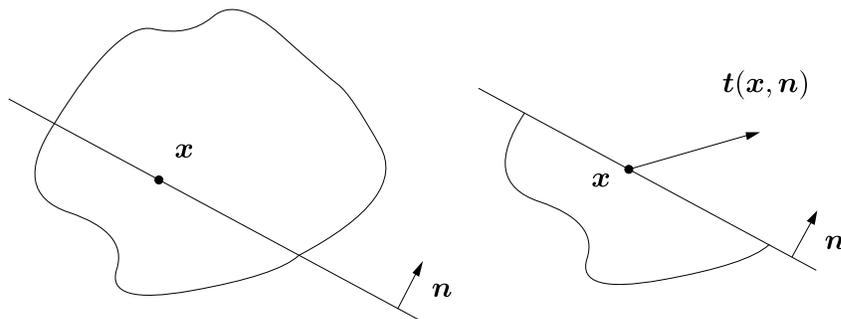


Figura 1: Taglio di Cauchy

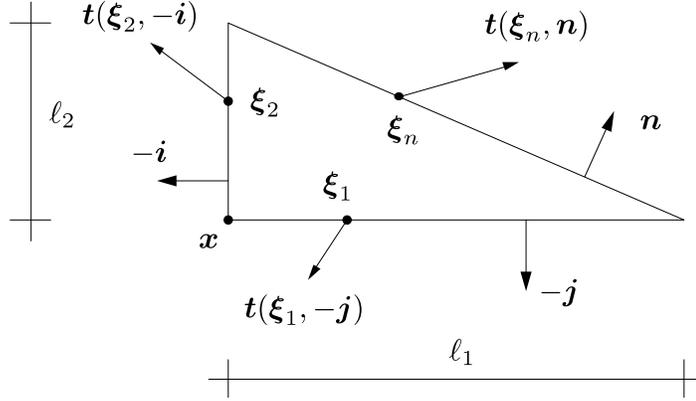


Figura 2: Triangolo di Cauchy

La Figura 2 mostra un pezzo estratto da un corpo in equilibrio. Le forze agenti su di esso dovranno soddisfare le equazioni di equilibrio. Scriviamo la prima di esse.

$$\int_0^{\ell_1} \mathbf{t}(\xi_1, -\mathbf{j}) ds_1 + \int_0^{\ell_2} \mathbf{t}(\xi_2, -\mathbf{i}) ds_2 + \int_0^{\ell_n} \mathbf{t}(\xi_n, \mathbf{n}) ds_n + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{b}(\xi) dA = \mathbf{0} \quad (1)$$

ove con  $\mathcal{A}$  si è indicata la superficie del triangolo, con  $\xi$  un suo punto interno, con  $A$  la sua area, e con  $\mathbf{b}(\xi)$  la densità rispetto ad  $A$  della forza a distanza.

Utilizzando il teorema del valor medio, l'equazione precedente si può scrivere

$$\mathbf{t}(\bar{\xi}_1, -\mathbf{j})\ell_1 + \mathbf{t}(\bar{\xi}_2, -\mathbf{i})\ell_2 + \mathbf{t}(\bar{\xi}_n, \mathbf{n})\ell_n + \mathbf{b}(\bar{\xi})\frac{\ell_1\ell_2}{2} = \mathbf{0} \quad (2)$$

e dividendo per  $\ell_n$ ,

$$\mathbf{t}(\bar{\xi}_1, -\mathbf{j})\frac{\ell_1}{\ell_n} + \mathbf{t}(\bar{\xi}_2, -\mathbf{i})\frac{\ell_2}{\ell_n} + \mathbf{t}(\bar{\xi}_n, \mathbf{n}) + \mathbf{b}(\bar{\xi})\frac{\ell_1\ell_2}{2\ell_n} = \mathbf{0} \quad (3)$$

Dalla Figura (3) si vede facilmente che

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \ell_n \cos \beta \\ \ell_2 &= \ell_n \sin \beta \end{aligned}$$

per cui l'equazione (3) si scrive

$$\mathbf{t}(\bar{\xi}_1, -\mathbf{j}) \cos \beta + \mathbf{t}(\bar{\xi}_2, -\mathbf{i}) \sin \beta + \mathbf{t}(\bar{\xi}_n, \mathbf{n}) + \mathbf{b}(\bar{\xi})\frac{\ell_1 \sin \beta}{2} = \mathbf{0} \quad (4)$$

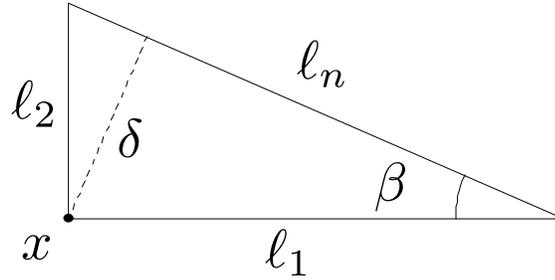


Figura 3: Triangolo

Se ora si considera una successione di triangoli ottenuti da quello dato riducendo  $\delta$ , si ottengono altrettanti pezzi del corpo originario che devono essere in equilibrio, qualunque sia  $\delta$ . Pertanto l'equazione precedente vale anche se si fa il  $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ . In tale caso  $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi} \rightarrow \mathbf{x}$ , mentre  $l_1 \sin \beta \rightarrow 0$ , e quindi dall'equazione (4) si ottiene

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{j}) \cos \beta + \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{i}) \sin \beta + \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (5)$$

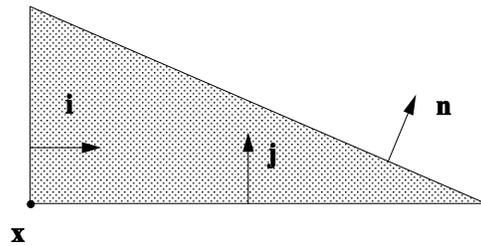


Figura 4: Angoli fra i versori

Dalla Figura 4 si vede che valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} &= n_1 = \sin \beta \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} &= n_2 = \cos \beta \end{aligned} \quad (6)$$

per cui l'equazione (5) si può anche scrivere

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{i})\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{j})\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = 0 \quad (7)$$

Poiché essa vale  $\forall \mathbf{n}$ , ponendo  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$  e  $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ , si ottengono le seguenti interessanti relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{i}) &= -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{i}) \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{j}) &= -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{j}) \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) &= \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{i})\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{j})\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \\ &= \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{i})n_1 + \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{j})n_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Questa relazione è particolarmente interessante perché, noti  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{i})$  e  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{j})$ , ci permette di ottenere  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ ,  $\forall \mathbf{n}$ . In particolare, si osservi che da essa discende immediatamente che

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{i})(-\mathbf{n}) \cdot \mathbf{i} + \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{j})(-\mathbf{n}) \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad \forall \mathbf{n} \quad (9)$$

Scriviamo la (8) per componenti. A tal fine, è sufficiente esprimere per componenti  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{i})$  e  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{j})$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{i}) &= \mathbf{t}(\mathbf{x})_1 = t(\mathbf{x})_{11}\mathbf{i} + t(\mathbf{x})_{21}\mathbf{j} \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{j}) &= \mathbf{t}(\mathbf{x})_2 = t(\mathbf{x})_{12}\mathbf{i} + t(\mathbf{x})_{22}\mathbf{j} \end{aligned} \quad (10)$$

La scrittura precedente fa uso di due pedici che hanno il seguente significato:

- il pedice a destra rappresenta la normale alla linea con cui si è operato il taglio:  
1 sta per  $\mathbf{i}$ , 2 per  $\mathbf{j}$ ;

- il pedice a sinistra rappresenta il versore lungo il quale si è valutata la componente della densità di forza.

Utilizzando queste notazioni la (8) diventa

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = t(\mathbf{x})_{11}n_1\mathbf{i} + t(\mathbf{x})_{21}n_1\mathbf{j} + t(\mathbf{x})_{12}n_2\mathbf{i} + t(\mathbf{x})_{22}n_2\mathbf{j} \quad (11)$$

ovvero

$$\begin{aligned} t(\mathbf{n})_1 &= t_{11}n_1 + t_{12}n_2 \\ t(\mathbf{n})_2 &= t_{21}n_1 + t_{22}n_2 \end{aligned} \quad (12)$$

avendo evidentemente indicato con  $t(\mathbf{n})_1, t(\mathbf{n})_2$  le componenti di  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  lungo  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ , rispettivamente.

Si osservi che le componenti con indice uguale individuano componenti perpendicolari alla linea di taglio, quelle con indice diverso, invece, componenti tangenti. Per rendere più immediata questa distinzione si usa indicarle con simboli diversi:  $\sigma$  e  $\tau$ , rispettivamente. In particolare, si pone

$$t_{11} = \sigma_{11} \quad t_{22} = \sigma_{22} \quad t_{12} = \tau_{12} \quad t_{21} = \tau_{21} \quad (13)$$

In questo caso i versori normali alle linee di taglio sono individuati dai pedici più esterni. Con questi simboli l'equazione (12) diviene

$$\begin{aligned} t(\mathbf{n})_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 \\ t(\mathbf{n})_2 &= \tau_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 \end{aligned} \quad (14)$$

che, ricordando le proprietà del prodotto fra matrici, si può scrivere

$$\begin{pmatrix} t(\mathbf{n})_1 \\ t(\mathbf{n})_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Nella Figura 5 sono mostrate le componenti dello sforzo in un punto  $\boldsymbol{x}$ . Le linee orizzontali e verticali indicano altrettanti linee di taglio idealmente passanti per il punto  $\boldsymbol{x}$ . Si osservi come gli sforzi su linee di taglio con normale uscente opposta, sono opposti.

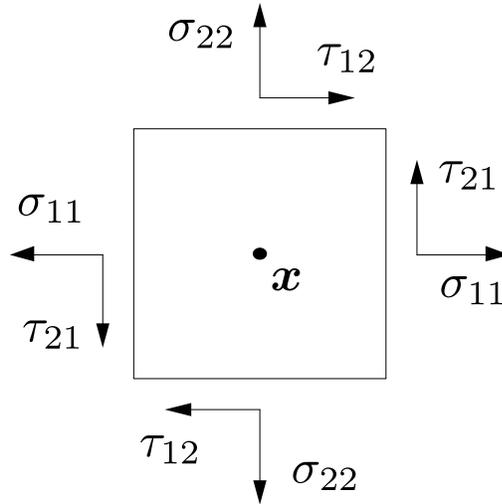


Figura 5: Componenti speciali dello sforzo in un punto

Si osservi che la matrice che compare nella (15) ha la proprietà di fornire le componenti dello sforzo in  $\boldsymbol{x}$  lungo un taglio ideale di normale  $\boldsymbol{n}$ , una volta assegnate le componenti di  $\boldsymbol{n}$ .

Dunque essa *trasforma* un vettore ( $\boldsymbol{n}$ ) in un altro vettore ( $\boldsymbol{t}$ ). In algebra, oggetti di questo tipo si definiscono *tensori* e per questo alla matrice in (15) si dà il nome di *tensore dello sforzo*, o *tensore della tensione* in  $\boldsymbol{x}$ , e  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}, \tau_{21}$  sono le sue *componenti*, indicate anche come *componenti speciali dello sforzo* o *componenti speciali della tensione*.

# 1 Equazioni di equilibrio locale

La Figura (6) mostra gli sforzi lungo i bordi di un pezzo di continuo di forma rettangolare, estratto da un corpo in equilibrio. La prima equazione di equilibrio, si

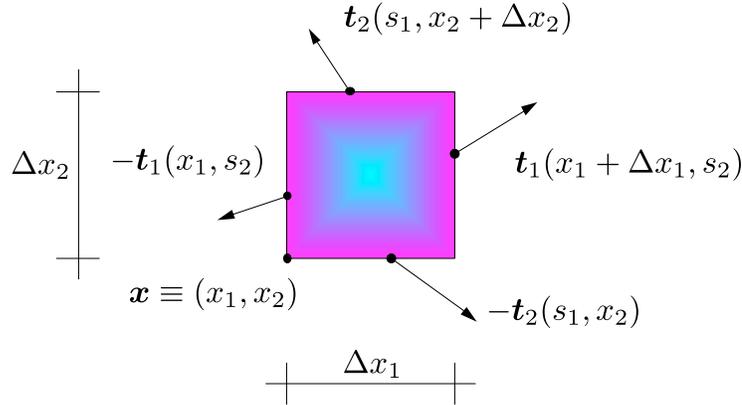


Figura 6: Sforzi al bordo di un pezzo quadrato

scrive

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\Delta x_2} \mathbf{t}_1(x_1 + \Delta x_1, s_2) ds_2 - \int_0^{\Delta x_2} \mathbf{t}_1(x_1, s_2) ds_2 \\
 & + \int_0^{\Delta x_1} \mathbf{t}_2(s_1, x_2 + \Delta x_2) ds_1 - \int_0^{\Delta x_1} \mathbf{t}_2(s_1, x_2) ds_1 + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}) dA = \mathbf{0} \quad (16)
 \end{aligned}$$

Per il teorema del valor medio, l'equazione (16) assume la forma

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{t}_1(x_1 + \Delta x_1, \bar{s}_2) \Delta x_2 + \mathbf{t}_1(x_1, \bar{s}_2) \Delta x_2 \\
 & + \mathbf{t}_2(\bar{s}_1, x_2 + \Delta x_2) \Delta x_1 + \mathbf{t}_2(\bar{s}_1, x_2) \Delta x_1 + \mathbf{b}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \Delta x_1 \Delta x_2 = \mathbf{0} \quad (17)
 \end{aligned}$$

e poi, dividendo ambo i membri per  $\Delta x_1 \Delta x_2$ , si ottiene

$$\frac{\mathbf{t}_1(x_1 + \Delta x_1, \bar{s}_2) - \mathbf{t}_1(x_1, \bar{s}_2)}{\Delta x_1} + \frac{\mathbf{t}_2(\bar{s}_1, x_2 + \Delta x_2) - \mathbf{t}_2(\bar{s}_1, x_2)}{\Delta x_2} + \mathbf{b}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) = \mathbf{0} \quad (18)$$

Il quadrato deve essere in equilibrio indipendentemente dalle dimensioni dei suoi lati per cui l'equazione (18) deve valere anche al  $\lim_{\Delta x_1, \Delta x_2 \rightarrow 0}$ , dopo di che, tenedo conto che  $\bar{s}_2, \bar{s}_2 \rightarrow x_2$ ,  $\bar{s}_1, \bar{s}_1 \rightarrow x_1$ ,  $\bar{\xi} \rightarrow \mathbf{x}$  essa diviene

$$\frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \mathbf{b}(x_1, x_2) = \mathbf{0} \quad (19)$$

e, in vista delle (5) e (12) si ottengono le due equazioni scalari

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + b_1 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + b_2 &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Scrivendo poi l'equazione di equilibrio dei momenti, si ottiene

$$\tau_{12} = \tau_{21} \quad (21)$$

## 2 La circonferenza di Mohr

Il teorema di Cauchy consente di calcolare le componenti dello sforzo  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  in un punto  $\mathbf{x}$  su un taglio ideale di normale uscente  $\mathbf{n}$  attraverso la relazione (15).

Si osservi che le componenti di  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  così calcolate sono quelle lungo i versori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  della base data.

Ci chiediamo quali siano i valori delle componenti di  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  lungo i versori di una base che si ottiene da quella data, ruotandola in senso orario di un angolo  $(\pi/2 - \alpha)$ , vedi Fig. 7). Chiameremo queste *componenti adattate* alla linea di taglio perché la loro direzione cambia con la linea di taglio.

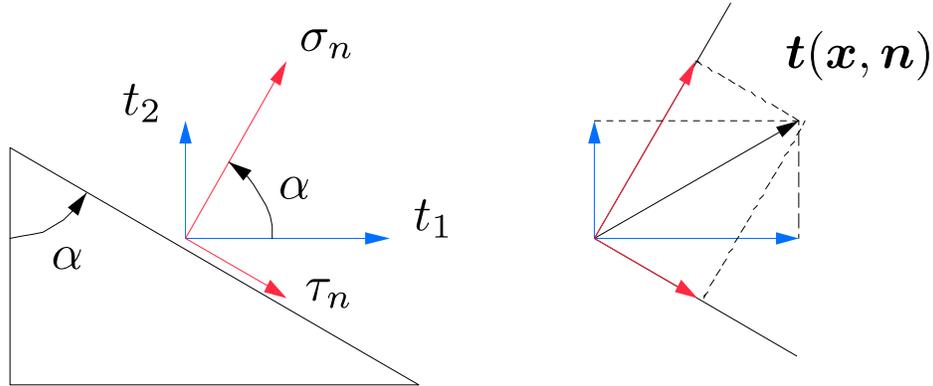


Figura 7: Componenti adattate

È facile verificare che

$$\begin{aligned}\sigma_n &= t_1 \cos \alpha + t_2 \sin \alpha \\ \tau_n &= t_1 \sin \alpha - t_2 \cos \alpha\end{aligned}\tag{22}$$

Sostituendo nella (22) le espressioni di  $t_1, t_2$  della (15) e utilizzando la (6), si ottiene

$$\begin{aligned}\sigma_n &= (\sigma_{11} \cos \alpha + \tau_{21} \sin \alpha) \cos \alpha + (\tau_{12} \cos \alpha + \sigma_{22} \sin \alpha) \sin \alpha \\ &= \sigma_{11} \cos^2 \alpha + (\tau_{12} + \tau_{21}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha \\ \tau_n &= (\sigma_{11} \cos \alpha + \tau_{21} \sin \alpha) \sin \alpha + (\tau_{12} \cos \alpha + \sigma_{22} \sin \alpha) \cos \alpha \\ &= (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{21} \sin^2 \alpha - \tau_{12} \cos^2 \alpha\end{aligned}\tag{23}$$

Ora, ricordando la (21) e che

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha \cos \alpha &= \sin 2\alpha \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{aligned} \tag{24}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{12} \sin 2\alpha \\ \tau_n &= \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\alpha - \tau_{12} \cos 2\alpha \end{aligned} \tag{25}$$

### 3 Osservazione 1

Sia assegnata una posizione  $Q \equiv (x_q, y_q)$ , e sia  $P \equiv (x_p, y_p)$  un punto generico.

Le posizioni  $P$  le cui coordinate soddisfano le equazioni

$$\begin{aligned} x_p - x_q &= a \cos \gamma + b \sin \gamma \\ y_p - y_q &= a \sin \gamma - b \cos \gamma \end{aligned} \tag{26}$$

giacciono su di una circonferenza di centro  $Q$  e raggio  $r^2 = a^2 + b^2$ . Infatti

$$\begin{aligned} |P - Q|^2 &= (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 \\ &= a^2 \cos^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma + 2ab \sin \gamma \cos \gamma \\ &\quad + a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma - 2ab \sin \gamma \cos \gamma \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned} \tag{27}$$

Dunque  $P$  sono le posizioni la cui distanza da  $Q$  è costante, cioè quelle che giacciono sulla circonferenza di centro  $Q$  e raggio  $r$ .

Allora, se su un piano cartesiano si riportano i valori di  $\sigma_n$  sull'asse delle ascisse e  $\tau_n$  su quello delle ordinate, ottenuti dalle (25) al variare di  $\gamma$  fra 0 e  $2\pi$ , si ottiene una circonferenza con centro in  $Q$  e raggio  $r$  ove

$$\begin{aligned}
 Q &\equiv \left( \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, 0 \right) \\
 r^2 &= \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \tau_{12}^2
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

## 4 Osservazione 2

Le (25) sono equazioni *parametriche* in  $\alpha$  che, pertanto, definiscono un verso di percorrenza della circonferenza. Ora, a seconda della scelta del sistema di coordinate cartesiano utilizzato per disegnare la circonferenza, può avvenire che, al variare del parametro  $\gamma$ , la circonferenza sia percorsa in verso antiorario oppure orario.

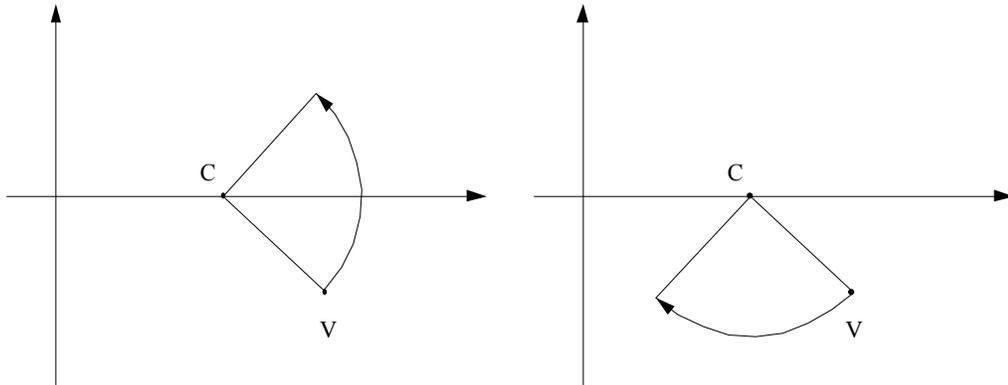


Figura 8: Verso di percorrenza della circonferenza

Una scelta interessante è quella di una rappresentazione in cui il verso di percorrenza della circonferenza coincida con quello positivo di  $\alpha$  (antiorario, nel nostro caso). In questo caso dalla circonferenza si possono dedurre graficamente non solo i valori delle componenti adattate dello sforzo lungo un taglio, ma anche la direzione del taglio.

Si osservi che i punti della circonferenza rappresentano lo stato di sforzo in un punto  $x$ , su un taglio di normale uscente  $\mathbf{n}$ , non più lungo i versori  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , bensì lungo

$\mathbf{n}$  e lungo la linea di taglio, come mostrato nella Fig. 9. Alle componenti  $\sigma_n$  e  $\tau_n$  si dà il nome di componente *normale* e *tangenziale*, rispettivamente. Conveniamo di

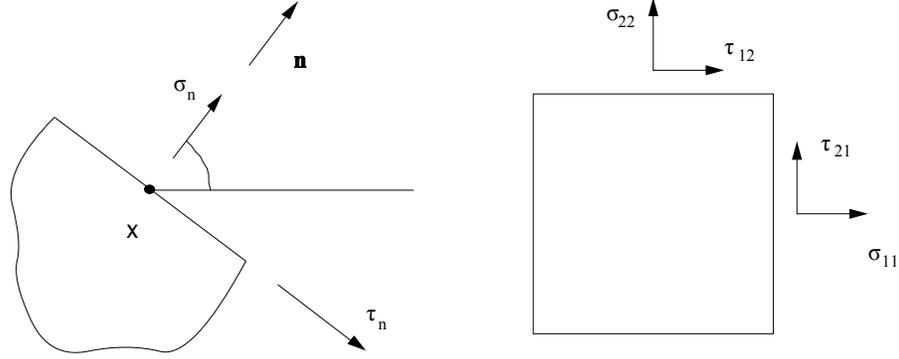


Figura 9: Componenti  $\sigma_n$  e  $\tau_n$ .

indicare con V e O i punti della circonferenza che rappresentano lo stato di sforzo sui tagli di normale uscente  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ , rispettivamente.

Ad essi corrispondono le seguenti coordinate e i valori dell'angolo  $\alpha$  indicati accanto

$$\begin{aligned} V &\equiv (\sigma_{11}, -\tau_{21}) & \alpha &= 0 \\ O &\equiv (\sigma_{22}, \tau_{12}) & \alpha &= \pi/2 \end{aligned} \tag{29}$$

Poiché la circonferenza è espressa in forma parametrica in funzione dell'angolo  $2\gamma$ , i due punti V ed O sono su un diametro. Infatti

$$\begin{aligned} x_v - x_c &= \sigma_{12} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \\ x_c - x_o &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sigma_{22} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \\ y_v &= -y_o \end{aligned} \tag{30}$$

Ora, ruotiamo di un angolo  $\gamma$  in senso antiorario il raggio che congiunge  $C$  con  $V$ ,

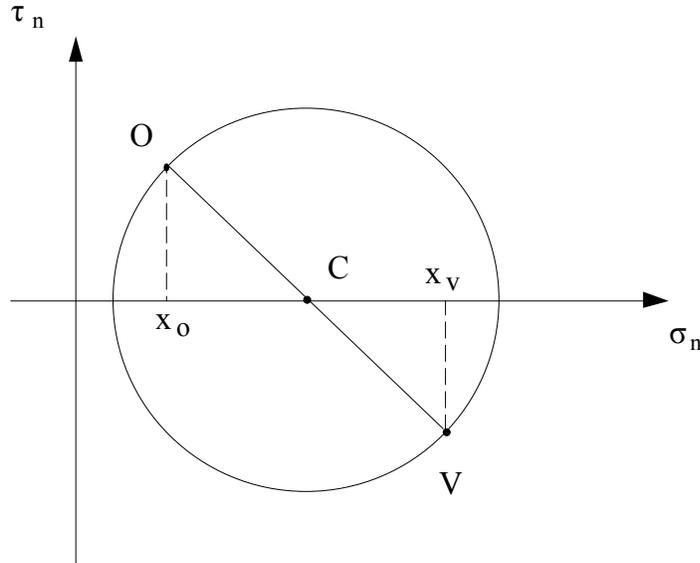


Figura 10: Punti O e V

e sia  $P$  il punto della circonferenza raggiunto. Le sue coordinate forniscono i valori di  $\sigma_n$  e  $\tau_n$  su un taglio inclinato di  $\alpha = \gamma/2$  sulla verticale, dato che la sua normale uscente  $\mathbf{n}$  è inclinata di  $\alpha = \gamma/2$  sull'orizzontale,

Si consideri adesso il punto in cui la retta parallela all'asse sui cui si riportano i valori di  $\tau_n$  e passante per  $P$  interseca la circonferenza, indicato con la lettera  $K$  nella Fig. 11.

L'angolo che la congiungente  $V$  con  $K$  forma con il diametro passante per  $C$  e  $K$  forma un angolo doppio di quello formato dallo stesso diametro con il segmento  $VK$ , dato che sono angoli al centro e alla circonferenza corrispondenti.

Congiungendo  $K$  con  $P$  si ottiene un segmento inclinato proprio di  $\alpha/2$  sulla verticale, e dunque parallelo alla linea di taglio su cui agiscono le componenti dello sforzo rappresentate dalle coordinate di  $P$ . Questo, naturalmente, vale per un qualunque punto della circonferenza.

A  $K$  si dà il nome di *polo delle giaciture*.

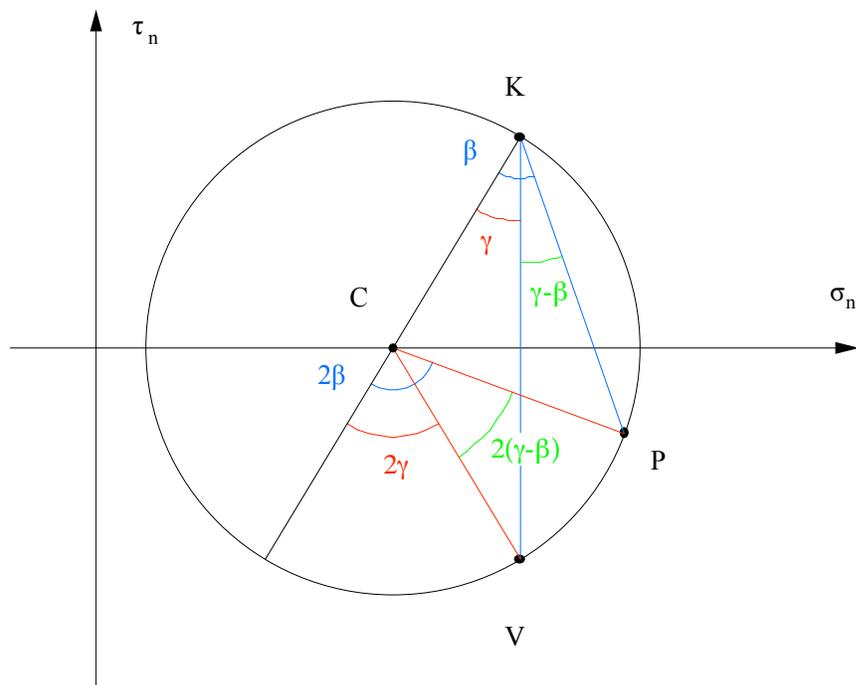


Figura 11: Polo delle giaciture

## 5 Cambiamento di basi ortonormali in 2D

### 5.1 Rotazione antioraria

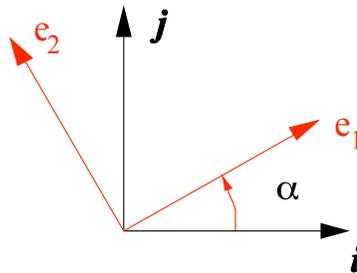


Figura 12: Rotazione antioraria

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j} \end{aligned} \tag{31}$$

Posto

$$(R) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

si può scrivere

$$(\mathbf{e}) = (R) (\boldsymbol{\ell}) \quad (\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{\ell}) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$(\boldsymbol{\ell}) = (R)^T (\mathbf{e})$$

Considerato un vettore

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$$

si può scrivere

$$\mathbf{u} = (u)^T (\boldsymbol{\ell}) \quad (u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

per cui

$$\mathbf{u} = (u)^T (R)^T (\mathbf{e}) = (\tilde{u})^T (\mathbf{e})$$

ove  $(\tilde{u})$  è il vettore delle componenti di  $\mathbf{u}$  nella base  $\mathbf{e}$ .

$$(\tilde{u}) = [(u)^T (R)^T]^T = (R)(u)$$

## 5.2 Rotazione oraria

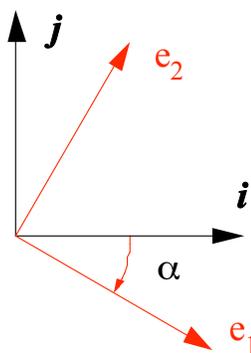


Figura 13: Rotazione oraria

$$(\mathbf{e}) = (R)^T (\boldsymbol{\ell})$$

per cui

$$(\boldsymbol{\ell}) = (R) (\mathbf{e})$$

Pertanto, in questo caso,

$$\mathbf{u} = (u)^T (\boldsymbol{\ell}) = (u)^T (R) (\mathbf{e}) = (\tilde{u})^T (\mathbf{e})$$

ove, in questo caso,

$$(\tilde{u}) = [(u)^T (R)]^T = (R)^T (u)$$

Con riferimento alla Figura 7 si vede che  $\tau_n$  e  $\sigma_n$  si possono ottenere da  $t_1$  e  $t_2$  operando una rotazione oraria  $\beta = \pi/2 - \alpha$ .