Teoria della trave



Si consideri un piano e su di esso si disegni una curva chiusa (per esempio un rettangolo). All'interno di questa curva si individui un punto e lo si indichi con la lettera o. Indicheremo la parte di piano racchiusa dalla curva chiusa con il nome di sezione e diremo che o è la sua *origine*.

Si pensi ora di incollare mutuamente infinite sezioni, in modo che

- l'insieme delle origini formi una curva regolare (liscia) \mathcal{C} .
- l'assetto delle sezioni lungo la curva vari con regolarità

Ad un solido così fatto diamo il nome di **trave** e alla curva C il nome di **asse** della trave. Indichiamo inoltre con *s* l'ascissa curvilinea su C. Decidiamo inoltre che ogni sezione sia un corpo rigido. *(immaginiamo ad esempio un rettangolo di compensato: libero di ruotare e traslare in ogni direzione, ma non di deformarsi).*



Figura 1: il solido trave

Nel caso in cui la costruzione precedente venga fatta con una sezione prototipo costituita da un segmento, e che tutte le sezioni siano incollate su uno steso piano, quello a cui apparterrà evidentemente anche la curva d'asse, si dirà che il solido così ottenuto è una trave *piana*.

Noi considereremo solo il caso della trave piana ad asse rettilineo, con le sezioni ortogonali all'asse.

Scelta una base ortonormale, gli spostamenti, essendo interni al piano, potranno essere scritti come combinazione lineare dei soli $i \in j$ mentre i vettori rotazione (linearizzata) saranno tutti vettori paralleli a k.

1 Misure della deformazione locale

Data una trave piana, precisiamo qui di seguito cosa si intende per atto di moto regolare *nel piano della trave* e, di conseguenza, quali *piccoli* cambiamenti di configurazione essi inducono. Dato che la trave è pensata come composta da infiniti corpi rigidi piani (le sezioni), tenuti insieme da una *colla virtale*, per descrivere un suo atto di moto è necessario specificare *per ogni sezione* la velocità di un punto (che per fissare le idee assumiamo sia l'origine) e la velocità angolare. Assegnata una base i, j, k, bisogna cioè specificare le funzioni

$$v_1(s), v_2(s), w(s) \qquad \forall s \in [a, b]$$

$$\tag{1}$$

La figura che segue illustra il significato dei simboli.



Figura 2: Componenti dello spostamento

Linearizzando il moto nell'intorno della configurazione assunta all'istante in cui si considera l'atto di moto (ovvero pensando che per intervalli di tempo Δt molto piccoli le velocità possano ritenersi costanti), posto $u_1(s) = v_1(s)\Delta t$, $u_2(s) = v_2(s)\Delta t$, $\theta(s) = w(s)\Delta t$, le funzioni

 $u_1(s), u_2(s), \theta(s) \quad \forall s \in [a, b]$ (2)

individuano una configurazione della trave molto prossima a quella iniziale e che consideriamo indistinguibile da quella assunta effettivamente al termine dell'intervallo di tempo Δt .

Ebbene, un atto di moto è regolare se le (1) sono funzioni regolari di s. In questo caso, naturalmente anche le (2) sono funzioni regolari.

Si consideri ora un pezzo di trave di lunghezza Δs e si concentri l'attenzione sulle due sezioni d'estremità. La figura seguente mostra i descrittori del moto linearizzato delle due sezioni d'estremità



Figura 3: Componenti dello spostamento linearizzato

Se il moto dell'intero pezzo fosse rigido, i parametri che descrivono il movimento delle due sezioni no sarebbero indipedenti, ma legati dalle relazioni

$$u_{1}(s + \Delta s) = u_{1}(s) - \theta(s)[o_{2}(s + \Delta s) - o_{2}(s)] = u_{1}(s)$$

$$u_{2}(s + \Delta s) = u_{2}(s) + \theta(s)[o_{1}(s + \Delta s) - o_{1}(s)]$$

$$\theta(s + \Delta s) = \theta(s)$$
(3)

ove con $[o_1(s + \Delta s) - o_1(s)], [o_2(s + \Delta s) - o_2(s)]$ si sono indicate le due componenti del vettore $o(s + \Delta s) - o(s)$.

Queste relazioni devono valere per ogni parte di trave contenuta nel pezzo considerato e quindi anche per un pezzo molto piccolo delimitato dalla sezione in s. Questo si esprime, matematicamente, dicendo che quelle relazioni valgono anche al $\lim_{\Delta s \to 0}$, ovvero

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{u_1(s + \Delta s) - u_1(s)}{\Delta s} = 0$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{u_2(s + \Delta s) - u_2(s)}{\Delta s} = \theta(s)$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\theta(s + \Delta s) - \theta(s)}{\Delta s} = 0$$
(5)

 $\operatorname{cioè}$

$$u'_{1}(s) = 0$$

$$u'_{2}(s) - \theta(s) = 0$$

$$\theta'(s) = 0$$
(6)

Se il moto si scosta da quello rigido, le grandezze sopra definite saranno diverse da 0. Ebbene, queste quantità si assumono come *misura della deformazione locale*

$$\epsilon(s) = u'_1(s)$$

$$\gamma = u'_2(s) - \theta(s)$$

$$\chi = \theta'(s)$$
(7)

Il significato geometrico di queste espressioni si comprende ricordando che, per il significato di derivata, data una funzione regolare f(s), per $\Delta s \ piccoli$ si può scrivere

$$f'(s) \simeq \frac{f(s + \Delta s) - f(s)}{\Delta s}$$

 $\Rightarrow f(s + \Delta s) \simeq f(s) + f'(s)\Delta s$

Pertanto

Deformazione assiale

rappresenta la variazione di distanza di due sezioni molto prossime. Si osservi che la figura rappresentata il caso $\epsilon > 0$; ad esso corrisponde, come si vede, un allungamento dell'asse;

(8)

 $\epsilon(s)\Delta s \simeq u_1(s + \Delta s) - u_1(s)$

$$\chi(s)\Delta s \simeq \theta(s + \Delta s) - \theta(s) \tag{9}$$

Deformazione flessionale

rappresenta la variazione dell'angolo fra due sezioni molto prossime. Si osservi che la figura rappresentata il caso $\chi > 0$; ad esso corrisponde, come si vede, una situazione in cui la parte inferiore della trave si allunga e quella superiore si accorcia;



Scorrimento

rappresenta lo scorrimento relativo di due sezioni molto prossime. Si osservi che la figura rappresentata un caso in cui $u'_2 > 0$.

 $u_2'(s)\Delta s \simeq u_2(s+\Delta s) - u_2(s)$

Attenzione però. Lo scorrimento non è necessariamente associato a una deformazione. Infatti esso è solo una parte della misura che abbiamo indicato con γ , ove compare anche il termine θ , il cui significato geometrico è rappresentato nella figura denominata Variazione angolare.



Figura 4: Variazione angolare

Per comprendere che la deformazione è data dalla somma dei due termini, basta osservare che entrambi determinano una variazione dell'angolo fra la sezione e l'asse della trave. Peraltro si osservi che $u'_2 > 0$ determina una *riduzione* dell'angolo, $\theta > 0$ un incremento. Ebbene vi è deformazione solo se la *differenza* dei due fattori non è nulla. Se questo si verifica (ovvero se $\theta = u'_2$) l'effetto complessivo è quello di una rotazione del pezzo di trave considerato.



Figura 5: Gamma nullo: Rotazione

1.1 Travi con vincoli interni

Oltre alla prescrizione che le sezioni siano indeformabili, è possibile pensare di limitare ulteriormente le deformazioni 'permesse' al solido trave. Questo può risultare utile in molte applicazioni in cui, sperimentalmente, ci si accorga che tali deformazioni sono sostanzialmente trascurabili. Le suddette limitazioni vengono chiamate 'vincoli interni'. Vediamo alcuni casi:

1)Trave assialmente indeformabile

 $\varepsilon = 0 \Rightarrow u'_1 = 0$ In questo caso **tutte** le sezioni della trave traslano della medesima quantità in direzione dell'asse. In parole povere la trave non subisce variazioni di lunghezza. Ciò, peraltro, non ha alcuna influenza sulle misure γ, χ .

2) Trave trasversalmente indeformabile

 $\gamma = 0 \Rightarrow u'_2 = \theta \Rightarrow \chi = u''_2$ In questo caso le sezioni, originariamente ortogonali all'asse, continuano a rimanervi.

Una trave piana che è sia assialmente che trasversalmente indeformabile può solo inflettersi: possiamo chiamarla 'trave puramente flessibile'. Essendo, generalmente, le deformazioni flessionali preponderanti rispetto alle altre nel comportamento delle travi reali, il modello di trave puramente flessibile è quello maggiormente utilizzato nelle applicazioni. D'altra parte esistono casi fondamentali (es. aste di travi reticolari) per la descrizione dei quali tale modello risulta inutilizzabile.



Figura 6: Trave puramente flessibile

2 Caratteristiche della sollecitazione

Si consideri la trave appoggiata della Figura 7



Figura 7: Trave appoggiata

Essa è in equilibrio sotto l'azione di un carico trasversale uniformemente distribuito lungo l'asse e delle reazioni vincolari degli appoggi.



Figura 8: Trave appoggiata: reazioni vincolari

Per valutare le azioni di incollaggio in una sezione generica della trave, è necessario operare un taglio *ideale* in corrispondenza di essa.

La trave è divisa così in due pezzi che, parti di un copro in equilibrio, devono essere entrambi in equibrio. A questo fine bisogna supporre che in corrispondenza del taglio vi siano delle azioni in grado di ripristinare l'equilibrio di ciascun pezzo.

Poiché la sezione è un corpo rigido, queste possono essere ridotte all'origine o e quindi rappresentate dalla forza risultante (componenti N, T nella Figura 9) e momento risultante rispetto ad o (componente M nella Figura 9).



Figura 9: Azioni di incollaggio

Si osservi che le azioni sulla parte sinistra della trave (contrassegnate con il cappello) e quelle sulla parte destra della trave (contrassegnate con il cappello rovesciato) hanno uno statuto logico completamente differente.

Determiniamo innanzitutto il loro valore scrivendo le equazioni di equilibrio per il pezzo di destra e per quello di sinistra, rispettivamente pezzo.

$$\hat{N}(s) = 0 \qquad \qquad \hat{N}(s) = 0
\hat{T}(s) + \frac{p\ell}{2} - ps = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{T}(s) = ps - \frac{p\ell}{2} \qquad (11)
\hat{M}(s) - \frac{p\ell s}{2} + \frac{ps^2}{2} = 0 \qquad \qquad \hat{M}(s) = -\frac{ps^2}{2} + \frac{p\ell s}{2}$$

$$\overset{\vee}{N}(s) = 0 \qquad & \overset{\vee}{N}(s) = 0 \\ \overset{\vee}{T}(s) + \frac{p\ell}{2} - p(\ell - s) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overset{\vee}{T}(s) = -ps + \frac{p\ell}{2} \qquad (12) \\ \overset{\vee}{M}(s) + \frac{p\ell}{2}(\ell - s) - \frac{p(\ell - s)^2}{2} = 0 \qquad & \hat{M}(s) = \frac{ps^2}{2} - \frac{p\ell s}{2}$$

Dalle relazioni precedenti emerge con chiarezza un modo per distinguere le azioni del tipo $\stackrel{\wedge}{(}$ da quelle del tipo $\stackrel{\vee}{(}$. Infatti

- [^] sono le azioni necessarie per l'equilibrio del pezzo di sinistra (quello compreso fra i valori 0 ed s dell'ascissa);
- (^{\vee}) sono le azioni necessarie per l'equilibrio del pezzo di destra (quello compreso fra i valori *s* ed ℓ dell'ascissa).

Peraltro le relazioni precedenti mostrano che $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$. Si osservi che questo è un risultato generale. Infatti, sommando per esempio le equazioni di equilibrio per la componente verticale della forza scritte per entrambi i pezzi, si ottiene

$$\frac{p\ell}{2} + \frac{p\ell}{2} - ps - p(\ell - s) + \mathring{T}(s) + \mathring{T}(s) = 0$$
(13)

e, considerato che per l'equilibrio della componente verticale della forza per la trave intera

$$\frac{p\ell}{2} + \frac{p\ell}{2} - ps - p(\ell - s) = 0$$
(14)

si ottiene

$$\stackrel{\wedge}{T}(s) + \stackrel{\vee}{T}(s) = 0 \tag{15}$$



Figura 10: Azioni di incollaggio su due facce della sezione

Relazioni analoghe si possono scrivere per la componente normale e per il momento flettente. Tutto questo giustifica la notazione

Dunque, in corrispondenza di una sezione della trave non esistono *una* componente normale, *una* componente tangenziale, *una* coppia, bensì *due*, di esse: una del tipo (), l'altra del tipo ().

Naturalmente la scelta di attribuire a una o all'altra il simbolo $\stackrel{\wedge}{(}$ è del tutto convenzionale.

Noi seguiremo questa regola:

- percorriamo l'asse della trave procedendo da sinistra a destra;
- giunti in s, operiamo un taglio ideale ed eliminiamo il pezzo al di là di esso;
- le azioni di incollaggio che tengono in equilibrio il pezzo rimasto, sono quelle contrasssegante con ().

Alle componenti $\stackrel{\wedge}{N}, \stackrel{\wedge}{T}, \stackrel{\wedge}{M}$, si dà il nome di *caratteristiche di sollecitazione* e si indicano come componente normale, componente tagliante e coppia (o momento) flettente, rispettivamente.

*

Si consideri la trave appoggiata della Figura 7. Le reazioni vincolari sono due forze verticali, uguali (vedi Figura 8). Vogliamo mostrare come esse possono essere



Figura 11: Azioni di incollaggio sulla faccia sinistra della sezione

interpretate come azioni di incollaggio. Si tratta di immaginare che la trave non abbia inizio e fine nelle sezioni di ascissa 0 ed ℓ , rispettivamente, ma che il tratto disegnato sia stato ottenuto tagliando in corrispondenza di quelle due sezioni una trave originariamente un pò più lunga. Questo non è poi molto diverso dalle reali condizioni con cui si provvede un appoggio



Figura 12: Schema di appoggio di una trave reale

Questo, infatti, interessa una zona estesa, pur se piccola, della trave, e non può essere posto in corrispondenza di una sola sezione.

Lo schema della Figura 8 diventa compresibile solo se si pensa di aver *tagliato* la trave al limitare delle zone di appoggio (vedi Figura 12).

In questo caso le azioni di sostegno assumono il significato di azioni di incollaggio.

Ora, se le reazioni del vincolo si interpretano come azioni di incollaggio, è indispensabile caratterizzarle individuando a quale *tipo* appartengono: (), ovvero ().

Allora è evidente che, nell'esempio precedente le azioni di incollaggio corrispondenti alle reazioni vincolari, sono

- $\overset{\vee}{T}(0)$ per la reazione in s = 0;
- $\stackrel{\wedge}{T}(\ell)$ per la reazione in $s = \ell$.

Infatti, dalle (12) e (13), rispettivamente, si ottiene

$$\stackrel{\vee}{T}(s) = ps - \frac{p\ell}{2} \tag{16}$$

$$\stackrel{\wedge}{T}(s) = -ps + \frac{p\ell}{2} = -\stackrel{\vee}{T}(s) \tag{17}$$

Pertanto, per ottenere le reazioni vincolari si dovrà utilizzare la

- 1) (16) per la reazione in s = 0;
- 2) (17) per la reazione in $s = \ell$.

e pertanto

$$\stackrel{\vee}{T}(0) = \frac{p\ell}{2}$$
$$\stackrel{\wedge}{T}(\ell) = \frac{p\ell}{2} = -\stackrel{\vee}{T}(s)$$

É evidente che utilizzando 1) e 2) in modo erroneo, porterebbe a un errore nel segno (ovvero nella individuazione del verso) delle azioni trasversali.

3 Equazioni di equilibrio locale

Si consideri un pezzo estratto da una trave in equilibrio statico.

Siano f_1, f_2, g le densità rispetto alla lunghezza dell'asse rispettivamente della componente assiale, trasversale e della coppia, esterne,



Figura 13: il concio di trave

La condizione di equilibrio impone che

$$\overset{\vee}{N}(s) + \hat{N}(s + \Delta s) + \int_{s}^{s + \Delta s} f_{1}ds = 0$$

$$\overset{\vee}{T}(s) + \hat{T}(s + \Delta s) + \int_{s}^{s + \Delta s} f_{2}ds = 0$$

$$\overset{\vee}{M}(s) + \hat{M}(s + \Delta s) - \overset{\vee}{T}(s)\Delta s + \int_{s}^{s + \Delta s} gds + \int_{0}^{\Delta s} \xi f_{2}ds = 0$$
(18)

Ricordando poi che in un tratto regolare $\stackrel{\vee}{N}=-\stackrel{\wedge}{N}$, le relazioni precedenti si possono anche scrivere nella forma

$$\hat{N}(s+\Delta s) - \hat{N}(s) + \int_{s}^{s+\Delta s} f_{1}ds = 0$$

$$\hat{T}(s+\Delta s) - \hat{T}(s) + \int_{s}^{s+\Delta s} f_{2}ds = 0$$

$$\hat{M}(s+\Delta s) - \hat{M}(s) + \hat{T}(s)\Delta s + \int_{s}^{s+\Delta s} gds + \int_{0}^{\Delta s} \xi f_{2}ds = 0$$
(19)

Ora è necessario ricordare il teorema della media. Esso, posto che f(s) sia una funzione continua, afferma che

$$\int_{s}^{s+\delta s} f(s)ds = f(\eta)\Delta s \qquad \eta \in [s, s+\Delta s]$$
(20)

Se si assume che le funzioni $\stackrel{\wedge}{N}(s), \stackrel{\wedge}{T}(s), \stackrel{\wedge}{M}(s)$, siano almeno continue, le equazioni di equilibrio si possono scrivere

$$\hat{N}(s + \Delta s) - \hat{N}(s) + f_1(\alpha)\Delta s = 0$$

$$\hat{T}(s + \Delta s) - \hat{T}(s) + f_2(\beta)\Delta s = 0$$

$$\hat{M}(s + \Delta s) - \hat{M}(s) + \hat{T}(s)\Delta s + g(\gamma)\Delta s + \xi(\delta) f_2(\delta)\Delta s = 0$$
(21)

ove $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in[s,s+\Delta s]$. Dividendo per
 Δs entrambi i membri di ciscuna delle tre equazioni precedenti e facendo il
 $\lim_{\Delta s\downarrow 0}$, si ottiene

$$\overset{\wedge}{N'(s)} + f_1(s) = 0
\overset{\wedge}{T'(s)} + f_2(s) = 0
\overset{\wedge}{M'(s)} + \hat{T}(s) + g(s) = 0$$
(22)

avendo posto f'(s) per df/ds.

4 Azioni singolari su una sezione della trave

Si consideri un pezzo estratto da una trave che lo contiene. La figura seguente mostra tutte le azioni dinamiche su di esso. Si osservi che in corrispondenza della sezione di ascissa \bar{s} sono applicate una forza (di cui sono mostrate le due componenti F, H) e una coppia G, singolari. Le equazionidi equilibrio si scrivono



Figura 14: Azioni regolari e singolari sulla trave

$$\hat{N}(\bar{s}+\epsilon) - \hat{N}(\bar{s}-\epsilon) + H + \int_{\bar{s}-\epsilon}^{\bar{s}+\epsilon} f_1(s)ds = 0$$

$$\hat{T}(\bar{s}+\epsilon) - \hat{T}(\bar{s}-\epsilon) + F + \int_{\bar{s}-\epsilon}^{\bar{s}+\epsilon} f_2(s)ds = 0$$

$$\hat{M}(\bar{s}+\epsilon) - \hat{M}(\bar{s}-\epsilon) + G + \int_{\bar{s}-\epsilon}^{\bar{s}+\epsilon} g(s)$$

$$+ [\hat{T}(\bar{s}+\epsilon) - \hat{T}(\bar{s}-\epsilon)]\epsilon - \int_{\bar{s}-\epsilon}^{\bar{s}+\epsilon} f_2(s)(s-\bar{s}) = 0$$
(23)

Si osservi che il momento risultante (terza equazio
e di equilibrio) è calcolato rispetto al punto dell'asse di asciss
a $\bar{s}.$

Al limite per $\epsilon \downarrow 0,$ osservando che

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \stackrel{\wedge}{f} (\bar{s} + \epsilon) = \stackrel{\wedge}{f} (\bar{s})^d \qquad \text{limite da destra}$$
$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \stackrel{\wedge}{f} (\bar{s} - \epsilon) = \stackrel{\wedge}{f} (\bar{s})^s \qquad \text{limite da sinistra}$$

si ottiene

$$\hat{N}^{d} - \hat{N}^{s} + H = 0$$

$$\hat{T}^{d} - \hat{T}^{s} + F = 0$$

$$\hat{M}^{d} - \hat{M}^{s} + G = 0$$
(24)

5 Teorema della potenza virtuale per la trave

Si consideri un pezzo estratto da una trave che lo contiene. La figura seguente mostra tutte le azioni dinamiche su di esso. Si osservi che non vi sono azioni singolari in corrispondenza di sezioni interne al tratto considerato.



Figura 15: Il concio di trave

Si osservi ancora che le azioni al bordo (cioè in corrispondenza delle sezioni all'estremità del pezzo) possono essere

- a) di incollaggio, se il pezzo è interno a una trave di lunghezza maggiore;
- b) applicate direttamente da altri corpi a contatto con la trave (reazioni vincolari, per esempio), se il pezzo coincide con una trave intera.

Nel caso b), come sappiamo, le azioni esterne possono comunque essere *interpretate* come azioni di incollaggio. Pertanto le azioni al bordo saranno sempre descritte come azioni di incollaggio cioè come caratteristiche della sollecitazione.

Si consideri ora un atto di moto regolare, nel senso che viene precisato qui di seguito.

Dato che la trave è pensata come composta da infiniti corpi rigidi piani (le sezioni), incollati, per descrivere un suo atto di moto è necessario specificare *per ogni sezione* la velocità di un punto (che per fissare le idee assumiamo sia l'origine) e la velocità angolare. Bisogna cioè specificare le funzioni (1).

Ebbene, un atto di moto è regolare se le (1) sono funzioni regolari di s. In questo caso, naturalmente anche le (2) sono funzioni regolari.

Ad ogni atto di moto si può associare uno spotamento (piccolo) regolare, per il tramite delle funzioni (2).

L'espressione

$$\hat{N}(b)u_{1}(b) - \hat{N}(a)u_{1}(a) + \int_{a}^{b} f_{1}(s)u_{1}(s)ds
+ \hat{T}(b)u_{2}(b) - \hat{T}(a)u_{2}(a) + \int_{a}^{b} f_{2}(s)u_{2}(s)ds
+ \hat{M}(b)\theta(b) - \hat{M}(a)\theta(a) + \int_{a}^{b} g(s)\theta(s)ds$$
(25)

fornisce il lavoro compiuto dalle azioni considerate nella Figura 1 quando il pezzo di trave cui queste sono appicate muta configurazione in accordo con le (2).

Ora si considerino due funzioni regolari di s : h(s), l(s). Ricordando il teorema fondamentale dell'analisi, si può scrivere

$$\int_{a}^{b} \frac{d}{ds} [h(s)l(s)] ds = h(b)l(b) - h(a)l(a)$$
(26)

Tenuto conto della (26) e indicando con un'apostrofo la derivata rispetto ad s, la (25) si scrive

$$\int_{a}^{b} \left\{ \begin{bmatrix} \hat{N}(s)u_{1}(s) \end{bmatrix}' + f_{1}(s)u_{1}(s) + \begin{bmatrix} \hat{T}(s)u_{2}(s) \end{bmatrix}' + f_{2}(s)u_{2}(s) + \begin{bmatrix} \hat{N}(s)\theta(s) \end{bmatrix}' + g(s)\theta(s) \right\} ds$$
(27)

Ricordando la regola di derivazione del prodotto di due funzioni, ovvero che [h(s)l(s)]' = h'(s)l(s) + h(s)l'(s) la (27) si scrive

$$\int_{a}^{b} \left\{ \hat{N}'(s)u_{1}(s) + \hat{N}(s)u_{1}'(s) + f_{1}(s)u_{1}(s) + \hat{T}'(s)u_{2}(s) + \hat{T}'(s)u_{2}(s) + f_{2}(s)u_{2}(s) + f_{2}(s)u_{2}(s) + \hat{M}'(s)\theta(s) + \hat{M}(s)\theta'(s) + g(s)\theta(s) \right\} ds$$
(28)

ovvero

$$\int_{a}^{b} \left\{ \begin{bmatrix} \hat{N}'(s) + f_{1}(s) \end{bmatrix} u_{1}(s) + \hat{N}(s) u_{1}'(s) + \begin{bmatrix} \hat{T}'(s) + f_{2}(s) \end{bmatrix} u_{2}(s) + \hat{T}(s) u_{2}'(s) + \begin{bmatrix} \hat{M}'(s) + g(s) \end{bmatrix} \theta(s) + \hat{M}(s) \theta'(s) \right\} ds$$
(29)

Ora, posto che

a) $\stackrel{\wedge}{N}(s), \stackrel{\wedge}{T}(s), \stackrel{\wedge}{M}(s)$ sono le funzioni che descrivono le caratteristiche di sollecitazione in equilibrio con le azioni in Figura 1, per *ogni* parte in cui il pezzo di trave considerato può ulteriormente essere suddiviso, e che pertanto valgono le equazioni locali di equilibrio,

l'espressione precedente si scrive

$$\int_{a}^{b} [\stackrel{\wedge}{N}(s)u_{1}'(s) + \stackrel{\wedge}{T}(s)u_{2}'(s) - \stackrel{\wedge}{T}(s)\theta(s) + \stackrel{\wedge}{M}(s)\theta'(s)]ds$$
(30)

Se poi si assume che

b) $\epsilon(s), \gamma(s), \chi(s)$ sono le funzioni che esprimono la deformazione locale congruenti (ovvero generate) con il cambio di configurazione espresso da (2); la (27) si può scrivere, infine, nella forma

$$\int_{a}^{b} [\stackrel{\wedge}{N}(s)\epsilon(s) + \stackrel{\wedge}{T}(s)\gamma(s) + \stackrel{\wedge}{M}(s)\chi(s)]ds$$
(31)

Pertanto si può concludere che sotto le ipotesi a) e b) precedenti, (25) = (31). Questa identità prende il nome di *Teorema dei Lavori Virtuali*.

Questa, evidentemente, vale anche quando non vi sia alcuna relazione fra le azioni dinamiche e il cambiamento di configurazione considerati. In altre parole. perché sia (25) = (31), non è necessario che le azioni dinamiche siano *proprio quelle* che generano il cambiamento di configurazione, e viceversa. In questo senso il lavoro espresso da (25) e (31) si dice che è *virtuale*.

Talvolta

- a) (25) è definito lavoro virtuale delle azioni esterne;
- b) (31) è definito lavoro virtuale delle azioni interne (intese come caratteristiche della sollecitazione).

Indicando il lavoro esterno con \mathcal{L}_e e il lavoro interno con \mathcal{L}_i , il *Teorema dei Lavori Virtuali* si esprime nella forma

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i \tag{32}$$

Spesso si preferisce porre

$$\mathcal{L}_{i} = -\int_{a}^{b} [\stackrel{\wedge}{N}(s)\epsilon(s) + \stackrel{\wedge}{T}(s)\gamma(s) + \stackrel{\wedge}{M}(s)\chi(s)]ds$$
(33)

In tal caso il Teorema dei Lavori Virtuali si esprime scrivendo

$$\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i = 0 \tag{34}$$

Se nella (25) alle (2) si sostituiscono le (1) essa, evidentemente, assume il significato di potenza spesa dalle azioni considerate nella Figura 1 nell'atto di moto (1). Utilizzando questa espressione e seguendo un procedimento identico a quello utilizzato per giungere alla (31) si ottiene la seguente espressione

$$\int_{a}^{b} [\stackrel{\wedge}{N}(s)\dot{\epsilon}(s) + \stackrel{\wedge}{T}(s)\dot{\gamma}(s) + \stackrel{\wedge}{M}(s)\dot{\chi}(s)]ds \tag{35}$$

ove le funzioni che esprimono la deformazione locale sono sostituite da quelle che esprimono la velocità di deformazione. Questa nuova identità prende il nome di *Teorema della Potenza Virtuale*.

Nel caso in cui la tr
ve abbia i vincoli interni di indeformabilità assial
e $(\epsilon=0)$ e trasversale ($\gamma=0)$ le (31) e (35) diventano

$$\int_{a}^{b} \stackrel{\wedge}{M}(s)\chi(s)ds \tag{36}$$

$$\int_{a}^{b} \stackrel{\wedge}{M}(s)\dot{\chi}(s)ds \tag{37}$$

rispettivamente.

6 Introduzione al metodo degli spostamenti

Consideriamo il caso di una trave incernierata alle estremità e soggetta all'azione di un carico assiale uniformemente distribuito, con densità rispetto alla lunghezza dell'asse, costante e pari a f_1 .



Figura 16: carico assiale

6.1 Trave rigida e vincoli olonomi perfetti

In questo caso l'unico strumento a disposizione per calcolare le reazioni vincolari è costituito dalle equazioni di equilibrio. Esse impongono che

$$a + d + F = 0$$

$$b + c = 0$$

$$cl = 0$$

(38)

ovvero b = c = 0, a + d = -F, avendo posto $F = f_1 l$. Il problema ammette infinite soluzioni.



Figura 17: carico assiale

6.2 Trave rigida e vincoli elastici

Si sostituiscano i vincoli al bordo con due molle che consentano il solo scorrimento orizzontale dei punti ad esse collegati.



Figura 18: carico assiale

Il comportamento delle molle è elastico lineare e k è la rigidezza caratteristica. Ciò si puo esprimere con il seguente disegno

Le reazioni vincolari si possono quindi caratterizzare come segue

La compatibilità cinematica (condizione di rigidità dell trave) impone



Figura 19: Molla elastica lineare

 $\delta_1 = -\delta_2 = \delta$

L'equazione di equilibrio delle componenti orizzontali delle forza si scrive

$$k\delta + k\delta + F = 0 \qquad \Rightarrow \quad \delta = -\frac{F}{2k}$$

Si osservi che nell'equazione di equilibrio le reazioni vincolari sono espresse in funzione dello spostamento δ .

La soluzione del problema questa volta è unica ed è illustrata nella figura che segue. L'indeterminatezza precedente è stata pertanto rimossa.

6.3 Trave deformabile e vincoli olonomi perfetti

Supponiamo che la funzione costitutiva della trave sia

$$\stackrel{\wedge}{N}(s) = A\epsilon(s)$$

La compatibilità cinematica si esprime



Figura 20: Reazioni delle molle



Figura 21: Soluzione

 $\epsilon = u'$ $u_1(0) = 0, \ u_1(\ell) = 0$

e l'equilibrio locale, infine

$$\stackrel{\wedge}{N'}+f_1=0$$

Sostituendo la funzione costitutiva e la compatibilità cinematica nell'equazione d'equilibrio, questa si riscrive nella forma

$$Au_1'' + f_1 = 0$$

Integrando due volte, e ricordando che f_1 è costante, si ottiene

$$u_{1}' = -\frac{f_{1}}{A}s + c_{1}$$
$$u_{1} = -\frac{f_{1}}{2A}s^{2} + c_{1}s + c_{2}$$

Il rispetto dei vincoli al bordo (compatibiltà cinematica al bordo) impone

$$u_1(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

 $u_1(\ell) = -\frac{f_1}{2A}\ell^2 + c_1\ell = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{f_1\ell}{2A} = \frac{F_1}{2A}$

Per cui

$$u_1 = -\frac{f_1}{2A}s^2 + \frac{F}{2A}s$$
$$u_1' = -\frac{f_1}{A}s + \frac{F}{2A}$$
$$\stackrel{\wedge}{N} = Au_1' = -f_1s + \frac{F}{2}$$

Per quanto attiene alle reazioni vincolari, bisogna ricordare che possono essere interpretate come caratteristiche di sollecitazione al bordo della trave



Figura 22: Caratteristiche di sollecitazione al bordo della trave

per cui, dato che

$$\hat{N}(0) = Au'_{1}(0) = \frac{F}{2}$$
$$\hat{N}(\ell) = Au'_{1}(\ell) = -\frac{F}{2}$$

si ottiene la soluzione



Figura 23: Soluzione

6.4 Trave deformabile: caso generale

Il caso esaminato nell'esempio precedente, può essere generalizzato se si osserva che la soluzione del problema iperstatico è stata ottenuta utilizzando le equazioni che esprimono i tre aspetti fondamentali del problema meccanico: equilibrio, compatibilità, risposta del materiale (funzione costitutiva).

Quest'ultima, in realtà, è stata indicata solo per la forza normale ma, allo stesso modo, può essere fornita per le altre caratteristiche della sollecitazione: la forza di taglio e la coppia flettente. Qui si assume che valgano le seguenti relazioni

$$\hat{N}(s) = A\epsilon(s)$$

$$\hat{T}(s) = C\gamma(s)$$

$$\hat{M}(s) = B\chi(s)$$
(39)

che caratterizzano un comportamento elastico lineare.

Le equazioni di compatibilità cinematica (7) e di equilibrio (22) si riscrivono qui di seguito per comodità

$$\epsilon(s) = u'_{1}(s)
\gamma = u'_{2}(s) - \theta(s)
\chi = \theta'(s)$$
(7)
$$\begin{array}{c} \stackrel{\wedge}{N'(s)} + f_{1}(s) = 0 \\ \stackrel{\wedge}{T'(s)} + f_{2}(s) = 0 \\ \stackrel{\wedge}{M'(s)} + \stackrel{\wedge}{T}(s) + g(s) = 0 \end{array}$$
(22)

Sostituendo le (7) nelle (39) e quindi il risultato nelle (22), si ottiene

$$Au''_{1}(s) + f_{1}(s) = 0$$

$$C(u'_{2}(s) - \theta(s))' + f_{2}(s) = 0$$

$$B\theta''(s) + C(u'_{2}(s) - \theta(s)) + g(s)$$
(40)

Le (40) costituiscono un semplice sistema di equazioni differenziali ordinarie, lineari, a coefficienti costanti. Si osservi che, derivando la terza equazione rispetto ad s, si ottiene: $B\theta'''(s) + C(u'_2(s) - \theta(s))' + g(s)' = 0$. Poiché la seconda equazione consente di scrivere $C(u'_2(s) - \theta(s))' = -f_2(s)$ le (40) si possono riscrivere nella forma

$$Au''_{1}(s) + f_{1}(s) = 0$$

$$C(u'_{2}(s) - \theta(s))' + f_{2}(s) = 0$$

$$B\theta'''(s) - f_{2}(s) + g'(s) = 0$$
(41)

6.5 Trave deformabile: caso dei vincoli interni

Nella maggior parte dei casi applicativi, si suppone che la resistenza all'inflessione della trave sia molto minore di quella che essa oppone all'estensione e allo scorrimento. In tali condizioni, si può supporre che queste grandezze siano nulle: $\epsilon \equiv \gamma \equiv 0$, ovvero che la trave sia *inestensibile e indeformabile per scorrimento*.

In questo caso, le (7), (22), (39), si scrivono

$$u_{1}'(s) = 0 \qquad \qquad \stackrel{\wedge}{N'}_{r}(s) + f_{1}(s) = 0 \qquad \qquad \stackrel{\wedge}{N}(s) = \stackrel{\wedge}{N}_{r}(s) \theta(s) = u_{2}'(s) \quad (42) \qquad \stackrel{\wedge}{T'}_{r}(s) + f_{2}(s) = 0 \qquad (43) \qquad \stackrel{\wedge}{T}(s) = \stackrel{\wedge}{T}_{r}(s) \quad (44) \chi(s) = \theta'(s) \qquad \qquad \stackrel{\wedge}{M'}(s) + \stackrel{\wedge}{T}_{r}(s) + g(s) = 0 \qquad \qquad \stackrel{\wedge}{M}(s) = B\chi(s)$$

Si osservi che, per effetto dei vincoli, le caratteristiche di sollecitazione $\stackrel{\wedge}{N}$, $\stackrel{\wedge}{T}$, assumono il significato di *reazioni vincolari* e sono state indicate con il pedice 'r'.

Le (42), (43), (44), si possono riscrivere come

$$\begin{aligned} u_1'(s) &= 0 & \stackrel{\wedge}{N'}_r(s) = -f_1(s) & \stackrel{\wedge}{N}(s) = \stackrel{\wedge}{N}_r(s) \\ \theta(s) &= u_2'(s) & (45) & \stackrel{\wedge}{T}_r(s) = -Bv_2'''(s) - g(s) & (46) & \stackrel{\wedge}{T}(s) = \stackrel{\wedge}{T}_r(s) & (47) \\ \chi(s) &= u_2''(s) & Bv_2''''(s) = f_2(s) - g'(s) & \stackrel{\wedge}{M}(s) = Bv_2''(s) \end{aligned}$$

La $(46)_3$ è spesso indicata come equazione della linea elastica poiché la funzione $v_2(s)$ individua la configurazione che l'asse della trave assume per effetto dei carichi dati. Assegnando a B un valore opportuno, nella maggior parte dei casi $v_2(s)$ approssima molto bene la curva d'asse che si può rilevare sperimentalmente.

6.6 Mensola con appoggio

Come applicazione del metodo degli spostamenti, si consideri il caso di una mensola con un appoggio all'estremità, soggetta a un carico distribuito uniformemente (con densità costante rispetto alla lunghezza dell'asse).



Figura 24: Mensola con appoggio

Le relazioni (45) e (46) nel caso in esame, si scrivono (omettendo il pedice r)

$$\begin{array}{ll}
u_{1}'(s) = 0 & \stackrel{\wedge}{N}'(s) = -f_{1}(s) & \stackrel{\wedge}{N}(s) = \stackrel{\wedge}{N}_{r}(s) \\
\theta(s) = u_{2}'(s) & (48) & \stackrel{\wedge}{T}(s) = -Bu_{2}''(s) & (49) & \stackrel{\wedge}{T}(s) = \stackrel{\wedge}{T}_{r}(s) & (50) \\
\chi = u_{2}''(s) & Bu_{2}''''(s) = -p & \stackrel{\wedge}{M}(s) = Bu_{2}''(s)
\end{array}$$

La soluzione del sistema precedente è

$$u_{1}(s) = \bar{u}$$

$$u_{2}(s) = \frac{1}{24}\alpha s^{4} + \frac{1}{6}c_{1}s^{3} + \frac{1}{2}c_{2}s^{2} + c_{3}s + c_{4}$$

$$\theta(s) = \frac{1}{6}\alpha s^{3} + \frac{1}{2}c_{1}s^{2} + c_{2}s + c_{3}$$

$$\hat{N}(s) = \bar{N}$$

$$\hat{N}(s) = -B(\alpha s^{2} + c_{1}s + c_{2})$$

$$\hat{M}(s) = B(\frac{1}{2}\alpha s^{2} + c_{1}s + c_{2})$$
(51)

ove si è posto $\alpha = -p/B$.

Poiché al bordo deve essere

$$u_{1} = 0 \qquad u_{2} = 0$$

$$u_{2} = 0 \qquad \text{in } s = 0 \qquad \stackrel{\wedge}{N} = 0 \qquad \text{in } s = \ell \qquad (52)$$

$$\theta = 0 \qquad \stackrel{\wedge}{M} = 0$$

imponendo che le (51) soddisfino le (52), si ottengono le costanti c_1, c_2, c_3, c_4 , che determinano la soluzione

$$u_{1}(s) = 0$$

$$u_{2}(s) = \frac{p}{B}\left(-\frac{1}{24}s^{4} + \frac{1}{12}\ell s^{3} - \frac{1}{24}\ell^{3}s\right)$$

$$\theta(s) = \frac{p}{B}\left(-\frac{1}{6}s^{3} + \frac{1}{4}\ell s^{2} - \frac{1}{24}\ell^{3}\right)$$

$$\hat{N}(s) = 0$$

$$\hat{T}(s) = p(s - \frac{1}{2}\ell)$$

$$\hat{M}(s) = p\left(-\frac{1}{2}s^{2} + \frac{1}{2}\ell s\right)$$
(53)

I grafici delle caratteristiche di sollecitazione, risultano



Figura 25: Grafici del Taglio e del Momento flettente

7 Calcolo di una componente dello spostamento di un punto dell'asse utilizzando il Teorema dei Lavori Virtuali

Nella figura che segue è rappresentato una trave con asse rettilineo a tratti vincolata con un appoggio a una estremità e una cerniera all'altra. Nella parte superiore agisce un carico distribuito uniformemente. Ci proponiamo di determinare la componente orizzontale dello spostamento del carrello.



Figura 26: Tetto a due falde

A tal fine consideriamo il seguente sistema di azioni virtuali bilanciate.



Figura 27: Tetto a due falde: forza virtuale

Determiniamo innanzitutto le reazioni vincolari bilanciate con il carico assegnato.



Figura 28: Reazioni vincolari bilanciate con il carico assegnato

E quelle bilanciate con il carico *virtuale*.



Figura 29: Reazioni vincolari bilanciate con la forza virtuale



Determiniamo il momento flettente in equilibrio con i carichi assegnati.

Determiniamo il momento flettente in equilibrio con le azioni virtuali.



Figura 31: Grafico di $\stackrel{\wedge}{M^*}$



Determiniamo i lavori virtuali esterno e interno

$$\mathcal{L}_e = f^* \delta \tag{54}$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_{i} = \int_{0}^{2\sqrt{2}} (10\sqrt{2}s_{1})(f^{*}\frac{\sqrt{2}}{2}s_{1})\frac{ds_{1}}{B} + \int_{0}^{2} (-5s_{2}^{2} + 20s_{2} + 40)2f^{*}\frac{ds_{2}}{B} \\
= \int_{0}^{2\sqrt{2}} 10f^{*}s_{1}^{2}\frac{ds_{1}}{B} + \int_{0}^{2} (-10s_{2}^{2} + 40s_{2} + 80)f^{*}\frac{ds_{2}}{B} \\
= \frac{f^{*}}{B} \left\{ \left[\frac{10}{3}s_{1}^{3} \right]_{0}^{2\sqrt{2}} + \left[-\frac{10}{3}s_{2}^{3} + 20s_{2}^{2} + 80s_{2} \right]_{0}^{2} \right\} \\
= \frac{160}{3}(\sqrt{2} + 4)\frac{f^{*}}{B}$$
(55)

Ponendo $\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$, si ottiene

$$f^*\delta = 2\frac{160}{3}(\sqrt{2}+4)\frac{f^*}{B}$$

da cui si ottiene

$$\delta = \frac{320}{3}(\sqrt{2}+4)\frac{1}{B} \simeq \frac{1}{B}577.52\tag{56}$$

8 Introduzione al metodo delle forze

Per illustrare il metodo delle forze, utilizziamo come prototipo la mensola esaminata nel paragrafo 6.6.



Figura 32: Mensola con appoggio

Il primo passo consiste nell'eliminare un vincolo e sostituirlo con la reazione vincolare corrispondente.



Figura 33: Esplicitazione della reazione iperstatica

Fra le infinite soluzioni che rispettano le condizioni di equilibrio, scegliamo *l'unica* che soddisfa la condizione cinematica imposta dal vincolo soppresso

 $u_2(\ell) = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \delta = 0 \tag{57}$

posto $u_2(\ell) = \delta$. Lo spostamento δ si può pensare ottenuto dalla somma di due termini

 δ_0 dovuto al solo carico p

 δ_x dovuto alla reazione iperstatica x.

In tal caso, la condizione di compatibilità cinematica si scrive

$$\delta_0 + \delta_x = 0 \tag{58}$$

I due spostamenti $\delta_0 \in \delta_x$ si possono calcolare utilizzando il teorema dei lavori virtuali (o della potenza virtuale).

Valutiamo δ_0 .



Figura 34: Sistema principale

$$f^*\delta_0 = \int_0^\ell \stackrel{\wedge}{M^*} \chi_0 = \int_0^\ell \stackrel{\wedge}{M^*} \frac{\stackrel{\wedge}{M_0}}{B} ds \qquad (\chi_0 = \frac{\stackrel{\wedge}{M_0}}{B})$$
(59)

E ora passiamo a valutare δ_x .



Figura 35: Reazione iperstatica

$$f^*\delta_x = \int_0^\ell \stackrel{\wedge}{M^*} \chi_x = \int_0^\ell \stackrel{\wedge}{M^*} \frac{\stackrel{\wedge}{M_x}}{B} ds \qquad (\chi_x = \frac{\stackrel{\wedge}{M_x}}{B}) \tag{60}$$

Si osservi che $\stackrel{\wedge}{M^*} = f^* \stackrel{\wedge}{M_1}, \stackrel{\wedge}{M_x} = x \stackrel{\wedge}{M_1}$ avendo indicato con $\stackrel{\wedge}{M_1}$ la distribuzione del momento flettente lungo la mensola che si ottiene quando x = 1 ovvero $f^* = 1$. Tenendo conto si questo, si può scrivere

$$f^*\delta_0 = f^* \int_0^\ell \stackrel{\wedge}{M_1} \frac{\stackrel{\wedge}{M_0}}{B} ds \qquad \Rightarrow \qquad \delta_0 = \int_0^\ell \frac{\stackrel{\wedge}{M_1} \stackrel{\wedge}{M_0}}{B} ds \tag{61}$$

e inoltre

$$f^*\delta_x = f^*x \int_0^\ell \frac{{\stackrel{\wedge}{M_1}}^2}{B} ds \qquad \Rightarrow \qquad \delta_x = x \int_0^\ell \frac{{\stackrel{\wedge}{M_1}}^2}{B} ds \tag{62}$$

La condizione di compatibilità cinematica $\delta_0 + \delta_x = 0$, pertanto, si riscrive come

$$\int_{0}^{\ell} \frac{\mathring{M_{1}}}{B} \frac{\mathring{M_{0}}}{B} ds + x \int_{0}^{\ell} \frac{\mathring{M_{1}}^{2}}{B} ds = 0$$
(63)

da cui si ottiene

$$x = -\frac{\int_{0}^{\ell} \frac{\hat{M}_{1} \hat{M}_{0}}{B} ds}{\int_{0}^{\ell} \frac{\hat{M}_{1}}{B} ds}$$
(64)

e, nel caso in cui ${\cal B}$ è costante,

$$x = -\frac{\int_{0}^{\ell} \dot{M}_{1} \dot{M}_{0} ds}{\int_{0}^{\ell} \dot{M}_{1}^{2} ds}$$
(65)

Le formule precedentii sono un caso particolare di una più generale, valida per sistemi con più incognite iperstatiche, dovute a Müller-Breslau.

9 Metodo degli spostamenti per i sistemi di travi: trave su tre appoggi

Nella Figura 36 è schematizzata una trave su tre appoggi, soggetta a un carico uniformemente ripartito, ove le sezioni della trave in corrispondenza degli appoggi sono contraddistinte con i numeri 1, 2, 3, rispettivamente.



Figura 36: Trave su tre appoggi con carico uniformemente ripartito

Il sistema è una volta iperstatico e verrà risolto con il metodo degli spostamenti, assumendo come incognite le rotazioni delle sezioni in corrispondenza dei tre appoggi.

Il primo passo verso la soluzione del problema consiste nell'eliminare le tre rotazioni nodali e determinare i momenti di incastro perfetto generati dai vincoli aggiuntivi.



Figura 37: Momenti di incastro perfetto

Si eliminano poi i vincoli di incastro e si applicano ai nodi le azioni opposte a quelle di incastro perfetto determinate prima.



Figura 38: Momenti ai nodi

Indicando con ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 l'ampiezze delle rotazioni delle sezioni 1, 2, 3, rispettivamente, e utilizzando le relazioni che forniscono le azioni nelle alle di estremità di una trave generate dalle rotazioni delle sezioni stesse (matrice di rigidezza) si ottengono le espressioni riportate nella figura 39



Figura 39: Forze e Momenti alle estremità delle travi

Si scrivono ora le equazioni di equilibrio imponendo che le rotazioni assegnate generino dei momenti uguali a quelli assegnati

$$4 \frac{EI}{\ell_1} \phi_1 + 2 \frac{EI}{\ell_1} \phi_2 = -m_1$$

$$2 \frac{EI}{\ell_1} \phi_1 + 4 \frac{EI}{\ell_1} \phi_2 + 4 \frac{EI}{\ell_2} \phi_2 + 2 \frac{EI}{\ell_2} \phi_3 = m_1 - m_2$$

$$2 \frac{EI}{\ell_2} \phi_2 + 4 \frac{EI}{\ell_2} \phi_3 = m_2$$
(66)

Sottraendo la prima e la terza equazione dalla seconda, si ottiene

$$2\phi_2 = \frac{m_1 - m_2}{EI} \frac{\ell_1 \ell_2}{\ell_1 + \ell_2}$$
(67)

e, sostituendo nella prima e terza equazione

$$4\phi_1 = -\frac{m_1}{EI} \frac{\ell_1^2 + 2\ell_1\ell_2}{\ell_1 + \ell_2} + \frac{m_2}{EI} \frac{\ell_1\ell_2}{\ell_1 + \ell_2}
4\phi_3 = -\frac{m_1}{EI} \frac{\ell_1\ell_2}{\ell_1 + \ell_2} + \frac{m_2}{EI} \frac{\ell_2^2 + 2\ell_1\ell_2}{\ell_1 + \ell_2}$$
(68)

Note le rotazioni nodali, si possono ottenere le azioni ai bordi di ciascuna delle due travi:

trave di lunghezza ℓ_1

$$m_{1s} = 4 \frac{EI}{\ell_1} \phi_1 + 2 \frac{EI}{\ell_1} \phi_2 = -m_1$$

$$t_{1s} = 6 \frac{EI}{\ell_1} (\phi_1 + \phi_2) = -\frac{3}{2} \frac{m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2}{\ell_1 (\ell_1 + \ell_2)}$$

$$m_{1d} = 2 \frac{EI}{\ell_1} \phi_1 + 4 \frac{EI}{\ell_1} \phi_2 = -\frac{m_1 (\ell_1 - 2\ell_2) + 3m_2 \ell_2}{2(\ell_1 + \ell_2)}$$

$$t_{1d} = -6 \frac{EI}{\ell_1} (\phi_1 + \phi_2) = -t_{1s}$$
(69)

trave di lunghezza ℓ_2

$$m_{2s} = 4 \frac{EI}{\ell_2} \phi_2 + 2 \frac{EI}{\ell_2} \phi_3 = \frac{3m_1\ell_1 + m_2(\ell_2 - 2\ell_1)}{2(\ell_1 + \ell_2)}$$

$$t_{2s} = 6 \frac{EI}{\ell_2} (\phi_2 + \phi_3) = \frac{3}{2} \frac{m_1\ell_1 + m_2\ell_2}{\ell_2(\ell_1 + \ell_2)}$$

$$m_{2d} = 2 \frac{EI}{\ell_2} \phi_2 + 4 \frac{EI}{\ell_2} \phi_3 = m_2$$

$$t_{2d} = -6 \frac{EI}{\ell_2} (\phi_2 + \phi_3) = -t_{2s}$$
(70)

La coppia di contatto al bordo destro della trave di lunghezza ℓ_1 e quella al bordo sinistro della trave di lunghezza ℓ_2 , risultano

$$M_{1}(\ell_{1}) = 2\frac{EI}{\ell_{1}}\phi_{1} + 4\frac{EI}{\ell_{1}}\phi_{2}$$

$$= -m_{1}\frac{\ell_{1} - 2\ell_{2}}{2(\ell_{1} + \ell_{2})} - m_{2}\frac{3\ell_{2}}{2(\ell_{1} + \ell_{2})}$$

$$-M_{2}(0) = 4\frac{EI}{\ell_{2}}\phi_{2} + 2\frac{EI}{\ell_{2}}\phi_{3}$$

$$= m_{1}\frac{3\ell_{1}}{2(\ell_{1} + \ell_{2})} + m_{2}\frac{\ell_{2} - 2\ell_{1}}{2(\ell_{1} + \ell_{2})}$$
(71)

ATTENZIONE: si ricordi che le azioni che si ottengono usando i coefficienti di rigidezza coincidono con le caratteristiche di sollecitazione al bordo destro e sono opposte in quello di sinistra. Si osservi inoltre che, come deve essere, $M_1(\ell_1) - M_2(0) = m_1 - m_2$

Per ottenere lo sforzo nella trave originaria, è necessario sommare le (72) ai momenti di incastro perfetto, per cui si ottiene

$$M_{1}(\ell_{1}) - m_{1} = -\frac{3}{2(\ell_{1} + \ell_{2})} (m_{1}\ell_{1} + 3m_{2}\ell_{2})$$

$$M_{2}(0) - m_{2} = -\frac{3}{2(\ell_{1} + \ell_{2})} (m_{1}\ell_{1} + 3m_{2}\ell_{2}) = M_{1}(\ell_{1}) - m_{1}$$
(72)

Se si considera il caso particolare in cui $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, si ottiene

$$\frac{EI}{\ell} (4\phi_1 + 2\phi_2) = -m$$

$$\frac{EI}{\ell} (2\phi_1 + 8\phi_2 + 2\phi_3) = 0$$

$$\frac{EI}{\ell} (2\phi_2 + 4\phi_3) = m$$
(73)

ovvero, sommando la prima e la terza equazione,

$$\frac{EI}{\ell}(4\phi_1 + 2\phi_2) = -m$$

$$2\phi_1 + 8\phi_2 + 2\phi_3 = 0$$

$$4\phi_1 + 4\phi_2 + 4\phi_3 = 0$$
(74)

da cui si desume immediatamente

$$\phi_1 = -\frac{m\ell}{4EI} = -\frac{p\ell^2}{48EI}$$

$$\phi_2 = 0$$

$$\phi_3 = -\phi_1$$
(75)

Al fine di svolgere un esempio numerico che possa aiutare a comprendere meglio il significato dei risultati ottenuti, si ponga $\ell_1 = 6m, \ell_2 = 3m, E = 2x10^8, I = 5,76x10^{-5}$.

La soluzione con gli incastri nelle sezioni 1,2,3, è

$$m_{1s} = 3$$

$$t_{1s} = 3$$

$$m_{1d} = -3$$

$$t_{1d} = 3$$

$$m_{2s} = 0.75$$

 $t_{2s} = 1.5$
 $m_{2d} = -0.75$
 $t_{2d} = 1.5$



Figura 40: Soluzione con sezioni incastrate

La soluzione con i momenti opposti alle reazioni degli incastri si ottiene dalle (69) e (70), e risulta

$$m_{1s} = -3 \qquad m_{2s} = 2.625$$

$$t_{1s} = -0.5625 \qquad t_{2s} = 1.125$$

$$m_{1d} = -0.375 \qquad m_{2d} = 0.75$$

$$t_{1d} = 0.5625 \qquad t_{2d} = -1.125$$
(77)



Figura 41: Soluzione con coppie ai nodi

Infine, sommando i due risultati, si ottiene la soluzione del problema iniziale, ovvero



Figura 42: Soluzione del problema