

STRUTTURA IPERSTATICA _esercitazione del 26/03/2013

PRIMA PARTE

Abbiamo una struttura iperstatica lunga L con un incastro a sinistra e un carrello a destra ed un carico distribuito sull'intera lunghezza pari a q . Utilizziamo il **metodo dell'integrazione della linea elastica**.

Partiamo dalle equazioni della trave di Eulero-Bernoulli:

- **Equilibrio**
 $dN/ds + q_1 = 0$
 $dT/ds + q_2 = 0$
 $dM/ds + T = 0$
- **Deformazione**
 $\varepsilon = du/ds$
 $\varphi = dv/ds$
 $\chi = d\varphi/ds$
- **Costitutive**
 $N = EA\varepsilon$
 $M = EJ\chi$

Di queste equazioni a noi interessano le 5 evidenziate perché dobbiamo trovare lo spostamento verticale $v(s)$ max.

$$dM/ds + T = 0$$
$$T = - dM/ds$$

$$dT/ds + q_2 = 0$$
$$d/ds (- dM/ds) + q_2 = 0 ; -d^2M/ds^2 + q_2 = 0 ; q_2 = d^2M/ds^2$$

$$\varphi = dv/ds$$
$$\chi = d\varphi/ds ; \chi = d/ds (dv/ds) ; \chi = d^2v/ds^2$$
$$M = EJ\chi ; M = EJ d^2v/ds^2$$

$$M = EJ d^2v/ds^2$$
$$q_2 = d^2M/ds^2 ; q_2 = d^2/ds^2 (EJ d^2v/ds^2) ; q_2 = EJ d^4v/ds^4$$

$$- q_2/EJ = d^4v/ds^4$$

Integro 4 volte per ottenere v

$$d^3v/ds^3 = - q_2s/EJ + c_1$$
$$d^2v/ds^2 = - q_2s^2/2EJ + c_1s + c_2$$
$$dv/ds = - q_2s^3/6EJ + c_1 s^2/2 + c_2 s + c_3$$
$$v = - q_2s^4/24EJ + c_1s^3/6 + c_2 s^2/2 + c_3 s + c_4$$

Analizziamo le equazioni al bordo (boundaries)

- **Incastro**

$$s = 0$$

$v(0) = 0$ (all'incastro lo spostamento verticale è nullo)

$\varphi(0) = dv(0)/ds = 0$ (all'incastro la rotazione è nulla)

$$v(0) = -q_2 s^4/24EJ + c_1 s^3/6 + c_2 s^2/2 + c_3 s + c_4 = 0$$

$$dv(0)/ds = -q_2 s^3/6EJ + c_1 s^2/2 + c_2 s + c_3 = 0$$

$$c_3 = 0 \quad ; \quad c_4 = 0$$

- **Carrello**

$$s=L$$

$v(L) = 0$ (con il carrello lo spostamento verticale è nullo)

$M(L) = 0$ (il momento al carrello è nullo)

$$V(L) = -q_2 L^4/24EJ + c_1 L^3/6 + c_2 L^2/2 = 0$$

$$M(L) = EJ \, d^2v(L)/ds^2 = 0$$

$$d^2v(L)/ds^2 = -q_2 L^2/2EJ + c_1 L + c_2 = 0$$

$$\begin{cases} -q_2 L^2/2EJ + c_1 L + c_2 = 0 \\ -q_2 L^4/24EJ + c_1 L^3/6 + c_2 L^2/2 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo:

$$c_1 = -q_2 5L/8EJ \quad ; \quad c_2 = q_2 L/8EJ$$

Per trovare il $v_{(s)}$ max dobbiamo trovare $\varphi = dv/ds = 0$.

Quindi risolviamo la seguente equazione inserendo i valori appena trovati:

$$dv/ds = -q_2 s^3/6EJ + -q_2 5L/8EJ \, s^2/2 + q_2 L/8EJ = 0$$

Risolvendo l'equazione di terzo grado otteniamo tre risultati:

$$s = 0 \quad ; \quad s = (15 - \sqrt{33})L/16 \cong 0,578 \quad ; \quad s = (15 + \sqrt{33})L/16 > 1$$

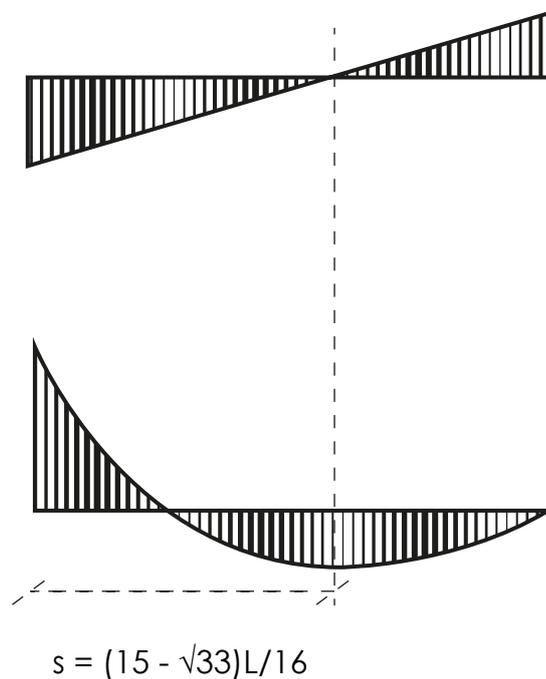
A questo punto sostituisco il valore di s trovato in :

$$V_{(s = (15 - \sqrt{33})L/16)} = -q_2 s^4/24EJ + c_1 s^3/6 + c_2 s^2/2 + c_3 s + c_4$$

e finalmente troviamo il valore di v_{\max} in funzione di qL/EJ .

Se vogliamo un risultato numerico dobbiamo assegnare un carico q , una lunghezza L , un materiale per avere il modulo elastico E , una sezione per avere il momento di inerzia J .

A questo punto potremmo anche calcolare quanto vale il momento a $s = (15 - \sqrt{33})L/16$, il taglio a $s=0$ e $s=L$, facendo delle semplici sostituzioni alle equazioni precedenti. Anche senza questi valori però potremmo fare un grafico qualitativo del taglio e del momento.



SECONDA PARTE

Ora verifichiamo su SAP ciò che abbiamo calcolato a mano.

Apriamo un nuovo FILE, impostiamo le unità di misure classiche (KN,m,°C).

Disegniamo la struttura, la incernieriamo a sinistra e appoggiamo su un carrello tramite **ASSIGN**→**JOIN RESTRAINTS**. Inoltre posizioniamo un punto a $0,578 L$ per poter successivamente verificare in quel punto il $v(s)$.

Assegniamo una sezione perciò per prima cosa la definiamo tramite **DEFINE**→**MATERIALS** e optiamo per **A992Fy50** per l'acciaio e **4000psi** per il cemento. Definiamo anche una sezione tramite **DEFINE**→**SECTION PROPERTIES**→**FRAME SECTION**. Una volta definita l'assegniamo alla struttura tramite **ASSIGN**→**FRAME**→**FRAME SECTION**. Ora assegniamo un carico distribuito lungo tutta la trave: **ASSIGN**→**FRAME LOADS**→**-20KN/m**

Ora assegniamo che il peso proprio della struttura sia nullo: **DEFINE→LOAD PATTERNS→SELF WEIGHT MULTIPLIER=0**

Lanciamo l'analisi escludendo l'analisi MODAL.

Visualizziamo la deformata, i grafici di taglio e momento corrispondono a quanto avevamo immaginato con il calcolo fatto a mano.

Guardiamo le tabelle **DISPLAY→SHOW TABLES→ANALYSIS RESULTS**

Nel punto che avevamo posto all'inizio a 0,578 L otteniamo un valore di $v(s)$ molto vicino a quello preventivato però abbiamo anche una leggerissima rotazione. L'errore, seppur minimo, è da ricondurre alle semplificazioni nei calcoli fatti a mano.