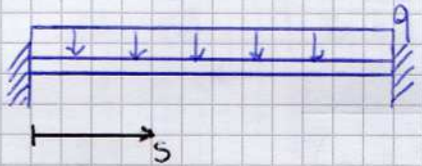
05/04/2013 Federica Murtas 464343

Struttura iperstatica _ Equazione della linea elastica



CONDIZIONI AL CONTORNO

$v(0)=0$ $\qquad$ $v(\ell)=0$

$\frac{dv}{ds}(0)=0$ $\qquad$ $\frac{dv}{ds}(\ell)=0$

Grazie al metodo degli spostamenti o equazione della linea elastica e' possibile determinare le reazioni vincolari, i diagrammi delle sollecitazioni, gli spostamenti e le deformazioni a partire dai tre gruppi di equazioni del modello di trave di Bernoulli: equazioni di bilancio, di congruenza e legame costitutivo.
Per definire il problema flessionale sono utili:

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds}+q_z=0 \\ \frac{dM}{ds}+T=0 \\ M=EJ\cdot\chi \\ \chi=\frac{d\varphi}{ds} \\ \varphi=\frac{dv}{ds} \end{cases}$$

per $\chi=\frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right) \rightarrow \chi=\frac{d^2v}{ds^2} \rightarrow M=EJ\frac{d^2v}{ds^2} \rightarrow \frac{d}{ds}\left(EJ\frac{d^2v}{ds^2}\right)+T=0 \rightarrow$

$EJ\frac{d^3v}{ds^3}+T=0 \rightarrow T=-EJ\frac{d^3v}{ds^3} \rightarrow \frac{d}{ds}\left(-EJ\frac{d^3v}{ds^3}\right)+q_z=0 \rightarrow q_z=\left(-EJ\frac{d^4v}{ds^4}\right) \rightarrow$

$$\boxed{\frac{d^4v}{ds^4}=\frac{q_z}{EJ}}$$

Effettuando quattro integrazioni in sequenza si ottiene la funzione spostamento in termini generali. Grazie alle condizioni al contorno è possibile attribuire un valore alle quattro costanti di integrazione.

da $\dfrac{d^4v}{ds^4} = \dfrac{q_z}{EJ}$

$$\int \frac{d^4v}{ds^4}\,ds = \int \frac{q_z}{EJ}\,ds \rightarrow \frac{d^3v}{ds^3} = \frac{q_z}{EJ}s + C_1 \rightarrow \boxed{T(s) = -EJ\left(\frac{q_z}{EJ}s + C_1\right)} \quad \text{TAGLIO}$$

$$\int \frac{d^3v}{ds^3}\,ds = \int\left(\frac{q_z}{EJ}s + C_1\right)ds \rightarrow \frac{d^2v}{ds^2} = \frac{q_z}{EJ}\frac{s^2}{2} + C_1 s + C_2 \rightarrow \boxed{M = -EJ\left(\frac{q_z}{EJ}\frac{s^2}{2} + C_1 s + C_2\right)} \quad \text{MOMENTO}$$

$$\int \frac{d^2v}{ds^2}\,ds = \int\left(\frac{q_z}{EJ}\frac{s^2}{2} + C_1 s + C_2\right)ds \rightarrow \boxed{\frac{dv}{ds} = \frac{q_z}{EJ}\frac{s^3}{6} + C_1\frac{s^2}{2} + C_2 s + \cancel{C_3}} \quad \text{ROTAZIONE}$$

$$\int \frac{dv}{ds} = \int\left(\frac{q_z}{EJ}\frac{s^3}{6} + C_1\frac{s^2}{2} + C_2 s + C_3\right)ds \quad \boxed{v(s) = \frac{q_z}{EJ}\frac{s^4}{24} + C_1\frac{s^3}{6} + C_2\frac{s^2}{2} + \cancel{C_3 s} + \cancel{C_4}} \quad \text{SPOSTAMENTO}$$

CALCOLO DELLE COSTANTI DI INTEGRAZIONE

per $v(0)=0$ $\quad C_4 = 0$

per $\dfrac{dv}{ds}(0)=0$ $\quad C_3 = 0$

per il calcolo delle costanti C_1 e C_2 si considera il sistema dato dalle condizioni al contorno

da $v(\ell)=0$
e da $\dfrac{dv}{ds}(\ell)=0$

$$\begin{cases} -\dfrac{q_z}{EJ}\dfrac{\ell^4}{24} + C_1\dfrac{\ell^3}{6} + C_2\dfrac{\ell^2}{2} = 0 \\ -\dfrac{q_z}{EJ}\dfrac{\ell^3}{6} + C_1\dfrac{\ell^2}{2} + C_2\ell = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} // \\ C_2 = +\dfrac{q_z\ell^2}{EJ\,6} - C_1\dfrac{\ell}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{q_z}{EJ}\dfrac{\ell^4}{24} + C_1\dfrac{\ell^3}{6} + \left(+\dfrac{q_z\ell^2}{EJ6} - C_1\dfrac{\ell}{2}\right)\left(\dfrac{\ell^2}{2}\right) = 0 \\ '' \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{q_z\ell^4}{EJ24} + C_1\dfrac{\ell^3}{6} + \dfrac{q_z\ell^4}{12EJ} - C_1\dfrac{\ell^3}{4} = 0 \\ '' \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = +\dfrac{1}{2}\dfrac{q_z\ell}{EJ} \\ C_2 = +\dfrac{q_z\ell^2}{6EJ} - \left(+\dfrac{1}{2}\dfrac{q_z\ell}{EJ}\right)\left(\dfrac{\ell}{2}\right) = -\dfrac{1}{12}\dfrac{q_z\ell^2}{EJ} \end{cases}$$

Adesso sostituendo nell'espressione dello spostamento i valori delle costanti si ricava la funzione spostamento

$$v(s) = -\frac{1}{24}\frac{q_2 s^4}{EJ} + \left(+\frac{1}{2}\frac{q_2 \ell}{EJ}\right)\left(\frac{s^3}{6}\right) + \left(-\frac{1}{12}\frac{q_2 \ell^2}{EJ}\right)\frac{s^2}{2}$$

$$v(s) = -\frac{1}{24}\frac{q_2 s^4}{EJ} + \frac{1}{12}\frac{q_2 \ell s^3}{EJ} - \frac{1}{24}\frac{q_2 \ell^2 s^2}{EJ}$$

Si può verificare che l'equazione dello spostamento e quella della rotazione soddisfino le condizioni al bordo

$v(0)=0$ VERIFICATA

$\frac{dv}{ds}(0)=0$ VERIFICATA

$$v(\ell)=0 \quad -\frac{1}{24}\frac{q_2 \ell^4}{EJ} + \frac{1}{12}\frac{q_2 \ell^4}{EJ} - \frac{1}{24}\frac{q_2 \ell^4}{EJ} = 0 \quad \text{VERIFICATA}$$

$$\frac{dv}{ds}(\ell)=0 \quad -\frac{q_2 \ell^3}{6EJ} + \left(+\frac{1}{2}\frac{q_2 \ell}{EJ}\right)\left(\frac{\ell^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{12}\frac{q_2 \ell^2}{EJ}\right)\ell = 0$$

$$-\frac{1}{6}\frac{q_2 \ell^3}{EJ} + \frac{1}{4}\frac{q_2 \ell^3}{EJ} - \frac{1}{12}\frac{q_2 \ell^3}{EJ} = 0 \quad \text{VERIFICATA}$$

DISEGNO DELLA DEFORMATA

DETERMINAZIONE DEI PUNTI IN CUI LA DEFORMATA ASSUME VALORI DI MASSIMO E DI MINIMO E QUINDI LA DERIVATA DELLA FUNZIONE SPOSTAMENTO SI ANNULLA

$$\varphi(s)=0 \quad \frac{dv}{ds}(s)=0 \quad \frac{12EJ}{q_2}\left(-\frac{q_2 s^3}{6EJ} + \frac{1}{4}\frac{q_2 \ell}{EJ}s^2 - \frac{1}{12}\frac{q_2 \ell^2}{EJ}s\right) = 0$$

$$+2s^3 - 3s^2\ell + 1\ell^2 s = 0$$

$$s(2s^2 - 3s\ell + \ell^2) = 0$$

$$s_1 = 0$$

$$2s^2 - 3s\ell + \ell^2 = 0$$

$$s_{2,3} = \frac{+3\ell \pm \sqrt{9\ell^2 - 4(2)(\ell^2)}}{4} = \frac{3\ell \pm \ell}{4}$$

$$s_2 = \ell$$

$$s_3 = \frac{\ell}{2}$$

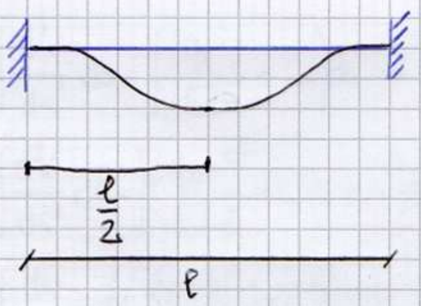
I punti di massimo e minimo si trovano in $s_1 = 0$

$s_2 = \frac{\ell}{2}$

$s_3 = \ell$

quindi: $v_{min} = v(0) = v(\ell)$

$v_{max} = v\left(\frac{\ell}{2}\right)$



CALCOLO DELLE FUNZIONI MOMENTO E TAGLIO

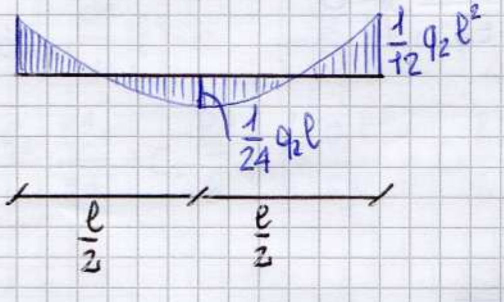
$$M(s) = +EJ\left[-\frac{q_2}{EJ}\frac{s^2}{2} + \left(+\frac{1}{2}\frac{q_2 \ell}{EJ}\right)s - \frac{1}{12}\frac{q_2 \ell^2}{EJ}\right]$$

$$M(0) = +EJ\left[-\frac{1}{12}\frac{q_2 \ell^2}{EJ}\right] = -\frac{1}{12} q_2 \ell^2$$

$$M\left(\frac{\ell}{2}\right) = +EJ\left[-\frac{q_2}{EJ}\frac{\ell^2}{8} + \frac{1}{4}\frac{q_2 \ell^2}{EJ} - \frac{1}{12}\frac{q_2 \ell^2}{EJ}\right] = \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) q_2 \ell^2 = \frac{1}{24} q_2 \ell^2$$

$$M(\ell) = +EJ\left[-\frac{q_2}{EJ}\frac{\ell^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{q_2 \ell}{EJ} - \frac{1}{12}\frac{q_2 \ell^2}{EJ}\right] = -\frac{1}{12} q_2 \ell^2$$

GRAFICO DEL MOMENTO



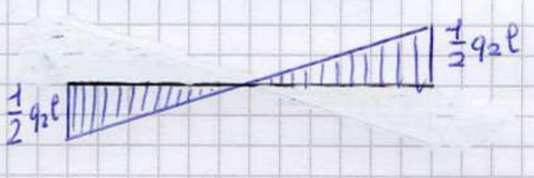
$$T(s) = -EJ\left(-\frac{q_2}{EJ}\,s + \frac{1}{2}\,\frac{q_2 \ell}{EJ}\right)$$

$$T(0) = -\frac{1}{2}\,q_2\,\ell$$

$$T\left(\frac{\ell}{2}\right) = -EJ\left[-\frac{q_2}{EJ}\left(\frac{\ell}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{q_2 \ell}{EJ}\right] = 0$$

$$T(\ell) = -EJ\left(-\frac{q_2 \ell}{EJ} + \frac{1}{2}\,\frac{q_2 \ell}{EJ}\right) = +\frac{1}{2}\,q_2\,\ell$$

GRAFICO DEL TAGLIO



CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI

Per trovare le reazioni vincolari si osservano i valori delle funzioni taglio e momento flettente al bordo