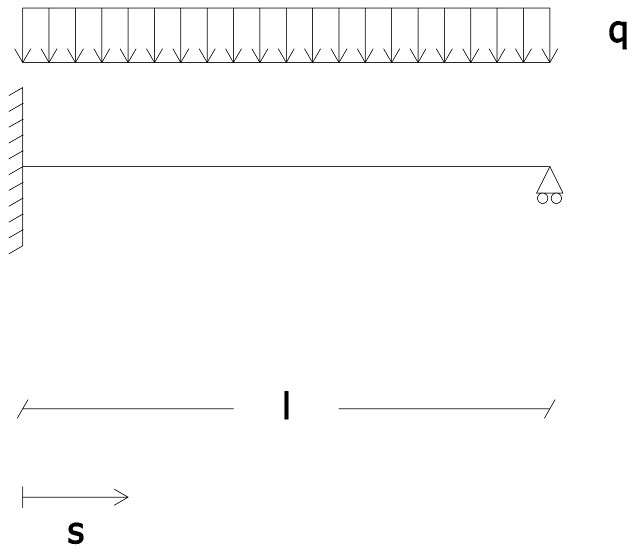
ESERCITAZIONE 2

METODO DELL' INTEGRAZIONE DELLA LINEA ELASTICA



Abbiamo una struttura lunga L con un incastro a sinistra e un carrello a destra ed un carico distribuito sull 'intera lunghezza pari a q e ci è stato richiesto di trovare l'abbassamento massimo prodotto dal carico q sulla struttura.

Il sistema è iperstatico e quindi per risolverlo non può essere usato il metodo dell'equilibrio dei corpi liberi per via delle troppe incognite (4) in sole 3 equazioni.

Useremo quindi il metodo dell 'integrazione della linea elastica che presenta le caratteristiche della trave di Eulero-Bernoulli

Partiamo dalle equazioni della trave di Eulero-Bernoulli:

Equazioni di Equilibrio

$$dN/ds + q1 = 0$$
$$dT/ds + q2 = 0$$
$$dM/ds + T = 0$$

Equazioni di Congruenza

$$\varepsilon = du/ds$$
$$\varphi = dv/ds$$
$$\chi = d\varphi /ds$$

Legami Costitutivi

$$N= EA$$
$$M=EJ\chi$$

L'incognita principale è lo spostamento verticale v(s) max, dato che non ci sono carichi orizzontali agenti sulla struttura quindi non ci sono neanche reazioni vincolari orizzontali ne sollecitazioni assiali, quindi possiamo escludere 3 delle 8 equazioni viste in precedenza:

$$dT/ds + q2 = 0$$

$$dM/ds + T = 0$$

$$\varphi = dv/ds$$

$$\chi = d\varphi/ds$$

$$M = EJ\chi$$

Procediamo per sostituzione

$$dM/ds + T = 0$$
$$T = - dM/ds$$

$$dT/ds + q2 = 0$$
$$d/ds\ (- dM/ds) + q2 = 0\ ;\ -d^2M/ds^2 + q2 = 0\ ;\ q2 = d^2M/ds^2$$

$$\varphi = dv/ds$$

$$\chi = d\varphi/ds$$
$$\chi = d^2v/ds^2$$

$$M = EJ\chi$$
$$M = EJ\ d^2v/ds^2$$

$$q2 = d^2M/ds^2\ ;\ q2 = d^2/ds^2\ (EJ\ d^2v/ds^2)\ ;\ q2 = EJ\ d^4v/ds^4$$

$$q2/EJ = d^4v/ds^4$$

Integro 4 volte per ottenere v(s)

$$d^3v/ds^3 = - q2s/EJ + c1$$
$$d^2v/ds^2 = - q2s^2/2EJ + c1s + c2$$
$$dv/ds = - q2s^3/6EJ + c1\ s^2/2 + c2\ s + c3$$
$$v(s) = - q2s^4/24EJ + c1s^3/6 + c2\ s^2/2 + c3\ s + c4$$

Andiamo ad analizzare le equazioni al bordo

Per s = 0 *abbiamo che lo spostamento verticale e la rotazione sono nulle perché l‰incastro non concede nessuna delle due, quindi* (v=0 *e* φ =0*). Da questo deriva che* (c3=0) *e* (c4=0)

Per s = L *abbiamo che lo spostamento verticale del carrello è sempre nullo* (v=0), *il momento è nullo* (M=0)

$$V(L) = - q_2L^4/24EJ + c_1 sL^3/6 + c_2 L^2/2 = 0$$

$$M(L)= EJ\ dv(L)/ds^2 = 0 \rightarrow$$

$$d^2v(L)/ds^2 = - q_2L^2/2EJ + c_1L + c_2 = 0$$

$$M(L)= - q_2L^2/2EJ + c_1 L + c_2 = 0$$

Risolviamo il sistema ed otteniamo:

$$c_1 = - q_2 5L/8EJ \ ; \ c_2 = q_2L^2/8EJ$$

Per trovare il v(s) max dobbiamo trovare φ *= dv/ds = 0.*

Quindi risolviamo la seguente equazione inserendo i valori appena trovati:

$$dv/ds = - q_2 s^3/6EJ + - q_2 5L/8EJ\ s^2/2 + q_2 L/8EJ = 0$$

Risolvendo l 'equazione di terzo grado otteniamo tre risultati:

$$s = 0 \ ; \ s = (15 - \sqrt{33})L/16 = 0{,}578 \ ; \ s = (15 + \sqrt{33})L/16 > 1$$

A questo punto sostituisco il valore di s trovato in :

$$v(s = (15 - \sqrt{33})L/16) = - q_2 s^4/24EJ + c_1 s^3/6 + c_2 s^2/2 + c_3 s + c_4$$

quindi troviamo il valore di v*max in funzione di qL/EJ.*

Il taglio presenta un andamento lineare, con valore negativo all'incastro e positivo sul carrello, e si azzera a 0,578L.
Il momento flettente presenta un andamento parabolico con un valore massimo positivo nell'incastro, e nullo in corrispondenza del carrello e il vertice della parabola in questione è situato a 0,578L.