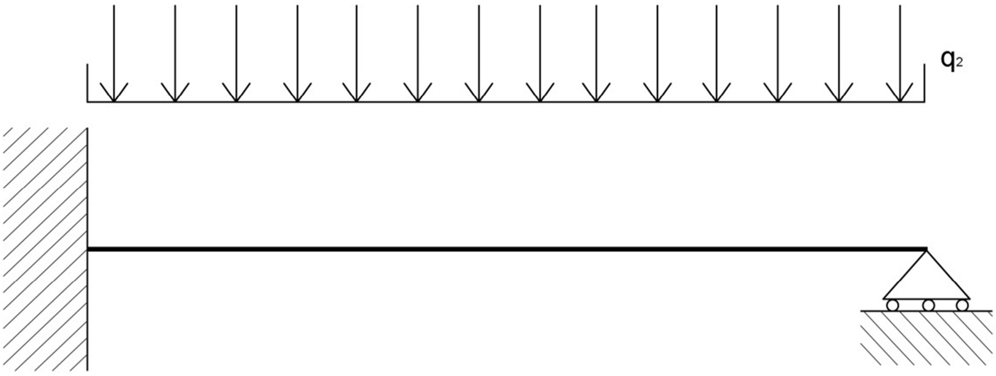
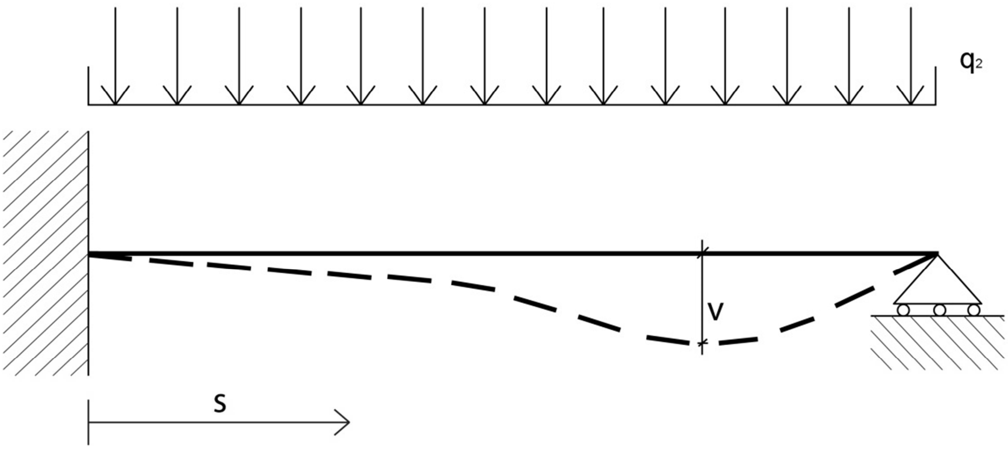
Struttura iperstatica



Lo scopo di questa esercitazione è conoscere il valore dello spostamento verticale della trave e ottenere un disegno della deformazione attendibile che sarà poi da confrontare con quello ottenuto su SAP2000.



Iniziamo con il riportare le equazioni inerenti al modello di trave di Bernoulli

Equazioni differenziali di bilancio

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{ds} + q_1 = 0 \\ \dfrac{dT}{ds} + q_2 = 0 \\ \dfrac{dM}{ds} + T = 0 \end{cases}$$

equazioni di legame costitutivo

$$\begin{cases} M = EI\chi \\ N = \varepsilon AE \end{cases}$$

equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(s) = u'(s) = \dfrac{du}{ds} \\ \chi(s) = \varphi(s) = \dfrac{d\varphi}{ds} \\ \varphi = \dfrac{dv}{ds} \end{cases}$$

Mettiamo a sistema le funzioni, escludendo quelle che hanno a che fare con lo sforzo normale in quanto in una struttura di questo genere si annullano.

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{ds} + q_2 = 0 \\ \dfrac{dM}{ds} + T = 0 \\ M = EI\chi \\ \chi = \dfrac{d\varphi}{ds} \\ \varphi = \dfrac{dv}{ds} \end{cases}$$

Considerando T= $-\dfrac{dM}{ds} \Rightarrow \dfrac{d}{ds}\left(-\dfrac{dM}{ds}\right) + q2 = 0$; $-\dfrac{d^2M}{ds^2} + q_2 = 0$

$$\varphi = \frac{dv}{ds} \Rightarrow \chi = \frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right) = \frac{d^2v}{ds^2} = 0 \Rightarrow \text{M=EI}\frac{d^2v}{ds^2}$$

Possiamo tornare alla equazione precedente e sostituire:

$$-\frac{d^2M}{ds^2} + q_2 = \frac{d^2}{ds^2}\left(EI\frac{d^2v}{ds^2}\right) + q_2 = -\frac{d^4v}{ds^4} + \frac{q_2}{EI} = 0 \quad ; \quad \frac{d^4v}{ds^4} = \frac{q_2}{EI}$$

Imponendo q_2 costante possiamo integrare per quattro volte l'equazione differenziale lineare del quarto ordine $\dfrac{d^4v}{ds^4} = \dfrac{q2}{EI}$ al fine di arrivare all'equazione che ci permette di calcolare lo spostamento v, grazie al cui valore possiamo ricavare tutte le altre incognite.

$$\frac{d^3v}{ds^3} = \frac{q_2}{EI}s + c_1$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} = \frac{q_2s^2}{2EI} + c_1s + c_2$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{q_2s^3}{6EI} + c_1\frac{s^2}{2} + c_2s + c_3$$

$$v(s)=\frac{q_2s^4}{EI24} + c_1\frac{s^3}{6} + c_2\frac{s^2}{2} + c_3s + c_4$$

Ora possiamo scrivere le quattro condizioni rispetto ai vincoli nei punti s=0 e s=L al fine di trovare i valori delle c e ottenere quello della v (spostamento):

per la s=o

$$v(o) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_4 = 0$$

$$\frac{dv}{ds}(o) = 0 \Rightarrow \quad c_3 = 0$$

Per la s=L

$$\left.\begin{aligned} v(L) &= \frac{q_2 L^4}{24EI} + c_1 \frac{L^3}{6} + c_2 \frac{L^2}{2} \\ \frac{d^2 v}{ds^2}(L) &= \frac{q_2 L^2}{2EI} + c_1 L + c_2 \end{aligned}\right\}$$ mettiamo a sistema per trovare c_1 e c_2

$$\begin{cases} \dfrac{q_2 L^4}{24EI} + c_1 \dfrac{L^3}{6} + c_2 \dfrac{L^2}{2} = 0 \\ \dfrac{q_2 L^2}{2EI} + c_1 L + c_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{q_2 L^4}{24EI} + c_1 \dfrac{L^3}{6} + c_2 \dfrac{L^2}{2} = 0 \\ c_2 = -\dfrac{q_2 L^2}{6EI} - c_1 L \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{q_2 L^4}{24EI} + c_1 \dfrac{L^3}{6} + \dfrac{L^2}{2}\left(-\dfrac{q_2 L^2}{6EI} + c_1 \dfrac{L}{2}\right) = 0 \\ c_2 = -\dfrac{q_2 L^2}{6EI} - c_1 L \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{q_2 L^4}{24EI} + c_1 \dfrac{L^3}{6} - \dfrac{qL^4}{4EI} - c_1 \dfrac{L^3}{2} = 0 \\ c_2 = -\dfrac{q_2 L^2}{6EI} - c_1 L \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{5qL^4}{24EI} - \dfrac{c_1 L^3}{3} = 0 \\ c_2 = -\dfrac{q_2 L^2}{6EI} - c_1 L \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -\dfrac{5qL}{8EI} \\ c_2 = -\dfrac{q_2 L^2}{6EI} - c_1 L \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -\dfrac{5qL}{8EI} \\ c_2 = -\dfrac{q_2 L^2}{6EI} - \left(-\dfrac{5qL}{8EI}\right)L \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -\dfrac{5qL}{8EI} \\ c_2 = \dfrac{qL^2}{8EI} \end{cases}$$

Ora, sapendo che dove la tangente della deformata ha pendenza nulla si avrà un massimo o un minimo dello spostamento v, poniamo $\varphi = \frac{dv}{ds} = 0$ al fine di trovare il valore di s tra i tre calcolati che indichi il punto in cui lo spostamento sarà massimo.

$$\varphi = \frac{dv}{ds} = \frac{q_2 s^3}{6EI} + \frac{c_1 s^2}{2} + c_2 s^2 = 0$$

$$\varphi = \frac{dv}{ds} = \frac{q_2 s^3}{6EI} + \left(-\frac{5q_2 L}{8EI}\right)\frac{s^2}{2} + \frac{q_2 L^2}{8EI}s^2 = s\left(\frac{q_2 s^2}{6EI} - \frac{5q_2 Ls}{16EI} + \frac{q_2 L^2}{8EI}\right) = 0$$

s=0 (I° soluzione)

Poniamo $I = \frac{bh^3}{12}$, momento di inerzia di una sezione generica e risolviamo l'equazione di II grado (ponendo che la sezione sia costante e sempre dello stesso materiale e che quindi EI non dipendano da s)

$$\frac{12_2 s^2}{6Ebh^3} - \frac{60q_2 Ls}{16Ebh^3} + \frac{12q_2 L^2}{8Ebh^3} = 0 \quad ; \quad \frac{2q_2 s^2}{6Ebh^3} - \frac{15q_2 Ls}{4Ebh^3} + \frac{3q_2 L^2}{2Ebh^3} = 0 \quad ; \quad \frac{q_2}{Ebh^3}\left(2s^2 - \frac{15Ls}{4} + \frac{3L^2}{2}\right) = 0$$

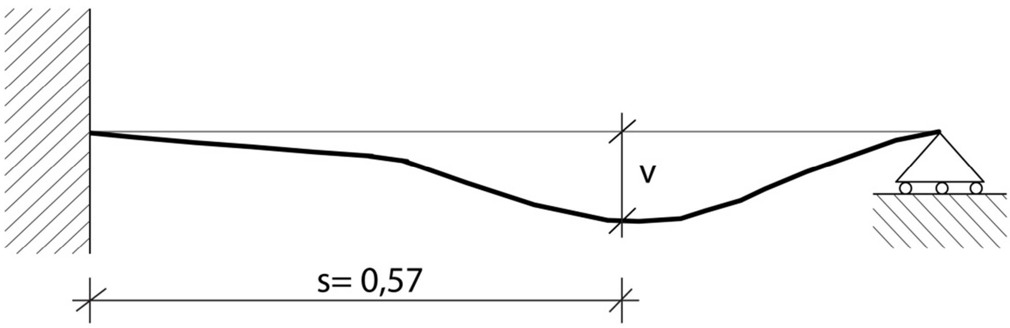
$$\frac{\frac{15L}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{225L^2}{16} - 12L^2\right)}}{4} = \frac{\frac{15L}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{33L^2}{16}\right)}}{4} = \qquad \begin{aligned} x_1 &= 1{,}29L \\ x_2 &= 0{,}57L \end{aligned}$$

Considerando 0 < L < 1 prendiamo in considerazione una s < 1 $\Rightarrow$ s=0,57

Ora possiamo trovare lo spostamento v

$$v(s) = \frac{q_2 s^4}{EI24} + c_1\frac{s^3}{6} + c_2\frac{s^2}{2} + c_3 s + c_4 = \frac{q_2(0{,}57L)^4}{EI24} - \frac{5q_2 L}{8EI}\frac{(0{,}57L)^3}{6} + \frac{q_2 L^2}{8EI}\frac{(0{,}57L)^2}{2} =$$

$$\frac{0{,}1q_2 L^4}{24EI} - \frac{0{,}9q_2 L^4}{48EI} + \frac{0{,}32q_2 L^4}{16EI} = \frac{12(0{,}26q_2 L^4)}{48Ebh^3} = \frac{0{,}26q_2 L^4}{4Ebh^3}$$



Ponendo q_2 = -q calcoliamo il momento e il taglio della struttura, i cui diagrammi saranno confrontati poi con quelli ottenuti dai calcoli con SAP come ulteriore prova della correttezza dei procedimenti svolti a mano.

M) $M(s) = EI\dfrac{d^2v}{ds^2} = EI\left(-\dfrac{qs^2}{2EI} + \dfrac{5qLs}{8EI} - \dfrac{qL^2}{8EI}\right) = -\dfrac{qs^2}{2} + \dfrac{5qLs}{8} - \dfrac{qL^2}{8}$

Calcoliamo i valori del momento agli estremi della trave, nei punti s=o e s=L

$$M(o) = -\frac{qL^2}{8}$$

$$M(L) = -\frac{qL^2}{2} + \frac{5qL^2}{8} - \frac{qL^2}{8} = 0$$

Punti in cui M è nullo $\begin{cases} s = L \\ s = \dfrac{L}{4} \end{cases}$

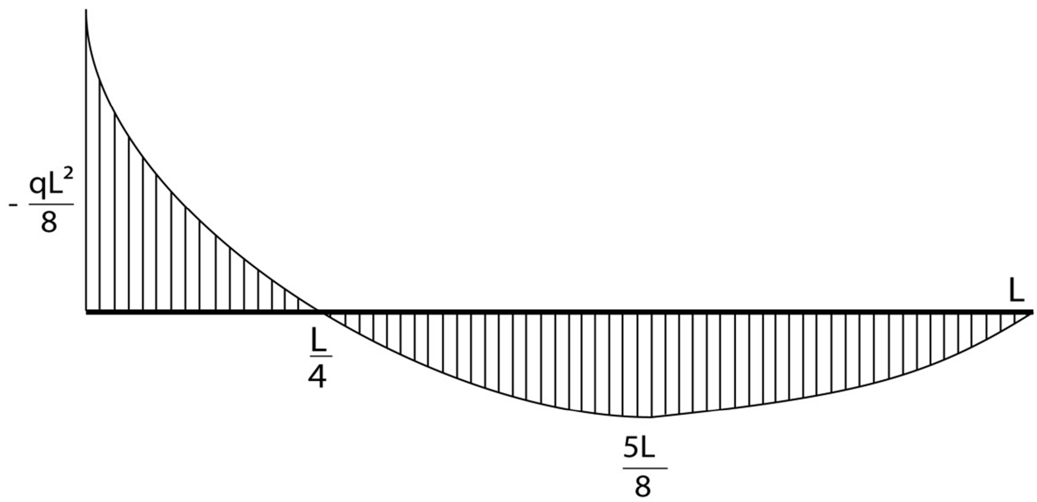
Per trovare il punto di massimo del momento calcoliamo il taglio e nel punto in cui sarà nullo il momento sarà massimo $\left(T = -\dfrac{dM}{ds}\right)$

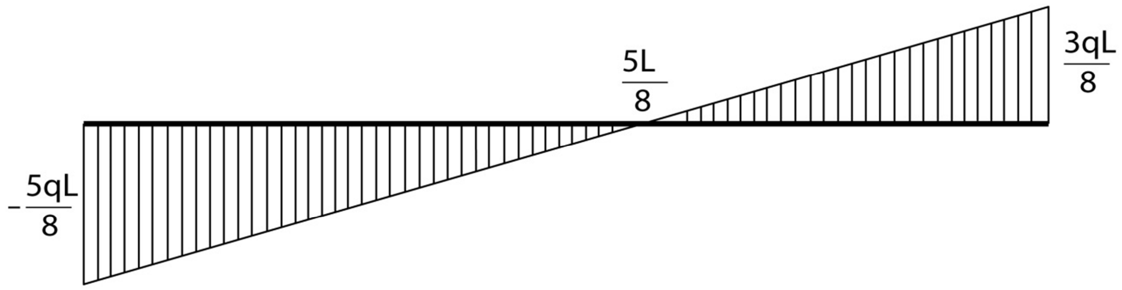
T) calcoliamo la derivata del momento M'= $-qs + \dfrac{5qL}{8}$ $\Rightarrow$ T= -M' = $qs - \dfrac{5qL}{8}$

Calcoliamo i valori del taglio agli estremi della trave, nei punti s=0 e s=L

$$T(o) = -\frac{5qL}{8}$$

$$T(L) = \frac{3qL}{8}$$

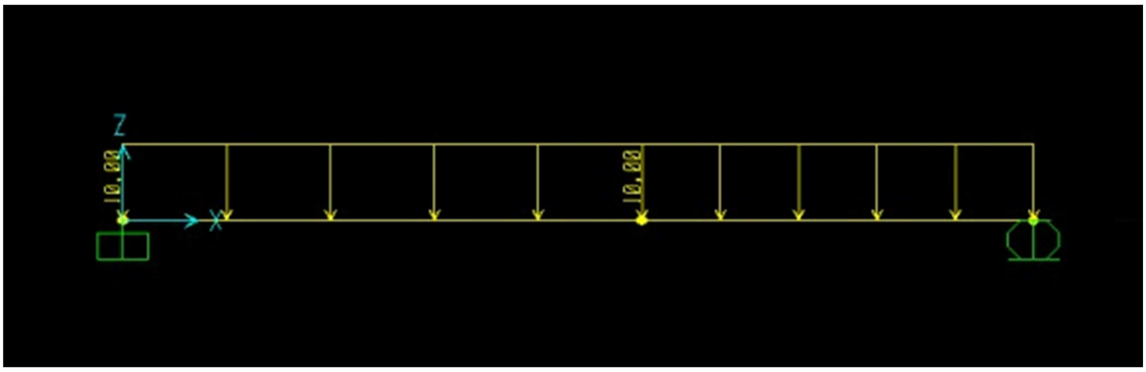




Per il teorema dei triangoli simili possiamo affermare che il punto in cui il taglio è nullo e il momento massimo è $\frac{5L}{8}$

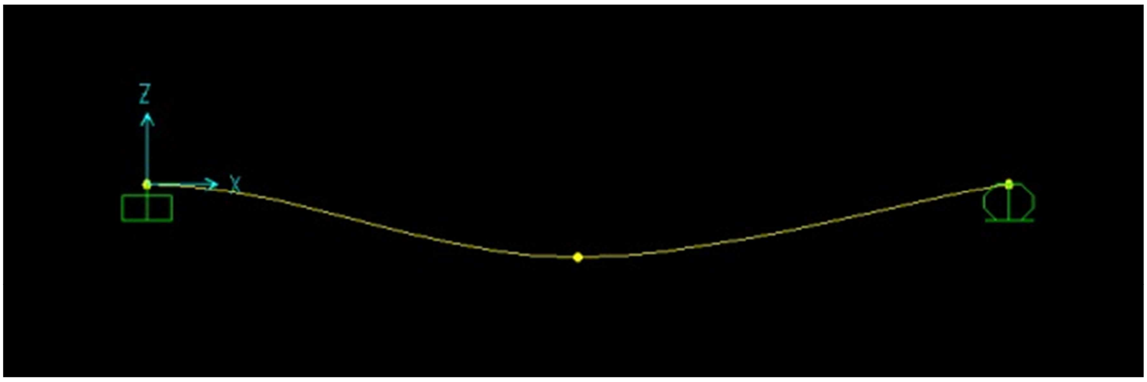
Ora non resta che confrontare i risultati ottenuti con i precedenti calcoli con quelli proposti da SAP2000.

Disegniamo la struttura da analizzare sul programma, imponendo l'incastro all'estremo sinistro, il carello a quello destro e un carico distribuito q_2 sull'intera ampiezza L.
Lungo l'asse della trave posizioniamo un punto a distanza s= 0,57 in modo che visualizzando l'immagine della deformata potremo confrontare i nostri risultati svolti a mano con quelli di SAP.



Prima di visualizzare i risultati è necessario porre il peso proprio della trave nullo, impostando il fattore di moltiplicazione =0 affinchè non influisca sui risultati .

Ora possiamo avviare l'analisi con il comando RUN, (impostando MODAL-DO NOT RUN)



Vediamo che il punto di spostamento massimo coincide con il punto posizionato all'inizio dell'esercitazione a distanza s=0,57. Ciò sta a dimostrare che i nostri calcoli manuali sono corretti.

Verifichiamo anche la correttezza dei grafici di taglio e momento