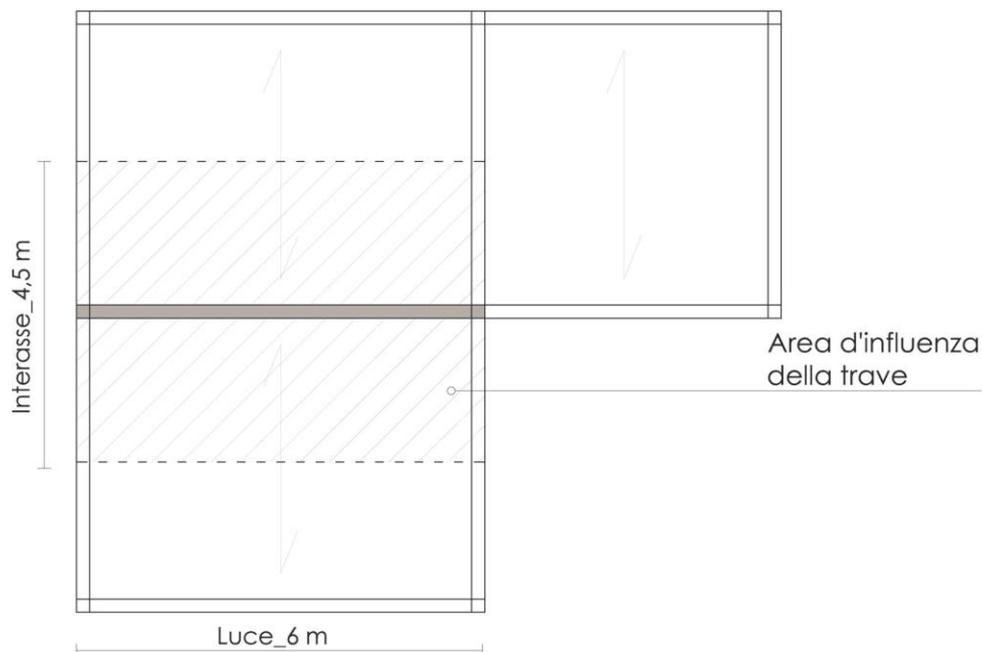


ESERCITAZIONE SUL DIMENSIONAMENTO DI UNA TRAVE INFLESSA_12-04-2013

Obiettivo dell'esercitazione è il dimensionamento di massima di una trave soggetta a **momento flettente M**, ovvero il calcolo dell'**altezza della sezione**, fatto per 3 diversi tipi di materiali: legno, acciaio e cemento armato.

Prima di tutto è opportuno sottolineare i 2 concetti chiave di questo procedimento, ossia il **PESO** e la **TENSIONE**. Il primo inteso non solo come carico effettivamente gravante sulla struttura (che come vedremo andrà calcolato), ma anche come parametro di riferimento imprescindibile in un processo che punta all'ottimizzazione del materiale prescelto in un'ottica di rapporto qualità-prezzo del nostro prodotto. Il secondo, invece, costituisce sostanzialmente la chiave di ogni nostra considerazione, in quanto il dimensionamento si basa su un assunto: la tensione massima riscontrabile nella trave può essere al massimo pari a quella ritenuta convenzionalmente ammissibile per quel determinato materiale.

Passando alla parte operativa, il dimensionamento riguarderà il solaio rappresentato in figura e in particolare la trave più sollecitata, ossia quella con la maggiore area di influenza. Per poter fare un raffronto circa l'incidenza di quest'ultimo parametro si procederà anche al calcolo dell'altezza per una sezione con area di influenza minore e l'intero iter verrà ripetuto per i 3 diversi materiali.

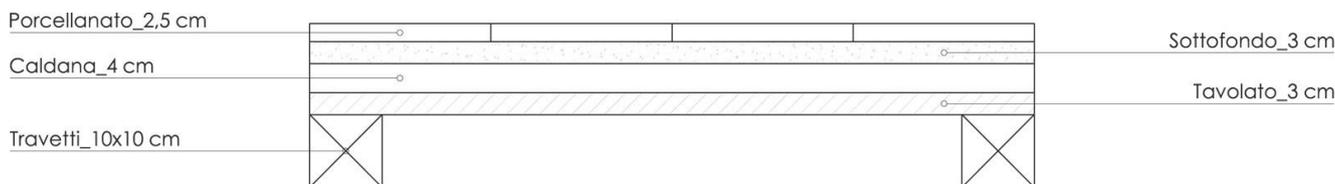


LEGNO

1. ANALISI DEI CARICHI

Il legno rappresenta il caso più semplice dei 3. Il primo passo consiste nella definizione del pacchetto che compone il solaio e nell'analisi dei carichi che la trave dovrà sopportare. Ogni strato è caratterizzato da un materiale e dal relativo **Peso Specifico (KN/m³)**. Dal momento che il risultato che cerchiamo è un **carico distribuito (KN/m²)**, moltiplichiamo il peso specifico per la lunghezza e la larghezza considerate, oltre che per lo spessore del singolo strato. Infine, dividiamo per la superficie analizzata.

$$\text{➤} \quad [\text{KN/m}^2] = ([\text{KN/m}^3] \times [L] \times [L] \times [L]) / [L^2]$$



materiale	peso specifico	lunghezza	larghezza	altezza	interasse	superficie	peso totale
	KN/mc	m	m	m		mq	KN/mq
porcellanato	16,0	1	1	0,025		1	0,40
sottofondo_malta di calce	18,0	1	1	0,030		1	0,54
caldana_malta cementizia	21,0	1	1	0,040		1	0,84
tavolato	4,0	1	1	0,030		1	0,12
travetti_10x10	5,3	1	0,15	0,200	0,5	1	0,32

$Q_s = 0,84 + 0,12 + 0,32 =$	1,278
$Q_p = 0,4 + 0,54 + 1 + 0,5 =$	2,440

materiale TRAVE	peso specifico	lunghezza	larghezza	altezza	interasse	superficie	peso totale
legno_latifoglie	5,3	1	0,25	0,53	4,5	1	0,702

$Q_s^* = 0,84 + 0,12 + 0,32 + 0,702 =$	1,980
$Q_p = 0,4 + 0,54 + 1 + 0,5 =$	2,440

Una volta ottenuto il peso di ognuno degli strati componenti il solaio, li combino per avere il **carico totale q**, dato dalla somma dei **carichi strutturali q_s**, dei **carichi permanenti non strutturali q_p** (ai quali aggiungiamo sempre 1 KN/m² per gli impianti e 0,5 KN/m² per i tramezzi) e dei **carichi accidentali q_a**, relativi alla destinazione d'uso degli ambienti (nel nostro caso 2 KN/m² destinazione residenziale), tutti moltiplicati per l'**interasse** i legato all'area d'influenza della trave.

$$\text{➤ } q = (q_s * q_p * q_a) * i$$

NB: dopo aver dimensionato una prima volta la trave calcolo anche il suo peso proprio, ottenendo un **carico strutturale q_s*** maggiore di quello precedente per il quale ridimensiono la trave ottenendo un'**altezza h** maggiore.

2. CALCOLO DELL'ALTEZZA H

Ottenuto il carico totale q, sono in grado di calcolare il **momento flettente M** agente sulla trave, considerando il sistema statico equivalente ad una trave doppiamente appoggiata con momento flettente massimo pari a **q²/8**. L'ovviamente si riferisce alla luce della trave presa in esame.

Per quanto riguarda la **tensione sig_{am}**, questa dipende dal tipo di legno scelto e, più in generale, è data dal prodotto del **coefficiente riduttivo k_{mod}** (normato, tiene conto della durata del carico e della classe di servizio del progetto) e della **resistenza a flessione caratteristica f_{m,k}**, ulteriormente ridotta dal **coefficiente di sicurezza gamma** (nel legno lamellare pari a 1,45).

$$\text{➤ } sig_{am} = (f_{m,k} / \gamma) * k_{mod}$$

L'ultimo passaggio sfrutta la **Formula di Navier**, in quanto da essa possiamo ricavarci il **modulo di resistenza W** e, dopo aver posto la tensione sigma massima pari a quella ammissibile, anche l'**altezza h** che cercavamo.

- $\text{Sig}_{\max} = (M / I_x) * y_{\max}$
- $W_x = I_x / y_{\max}$ e $y_{\max} = h/2$
- $W_x = bh^2/6$ (sezione rettangolare)
- $W_x = M / \text{Sig}_{\max} = bh^2/6$
- $h = \sqrt{(6M / \text{Sig}_{\max} * b)}$

interasse	qs	qp	qa	q	luce	M	fm,k	kmod	sig _{am}	b	h
m	KN/mq	KN/mq	KN/mq	KN/m	m	KN*m	N/mmq		N/mmq	cm	cm
4,50	1,278	2,44	2,00	25,73	6	115,79	24	0,6	9,93	25	52,90
2,25	1,278	2,44	2,00	12,87	6	57,89	24	0,6	9,93	25	37,40
4,50	1,980	2,44	2,00	28,89	6	130,01	24	0,6	9,93	25	56,05
2,25	1,980	2,44	2,00	14,45	6	65,00	24	0,6	9,93	25	39,63

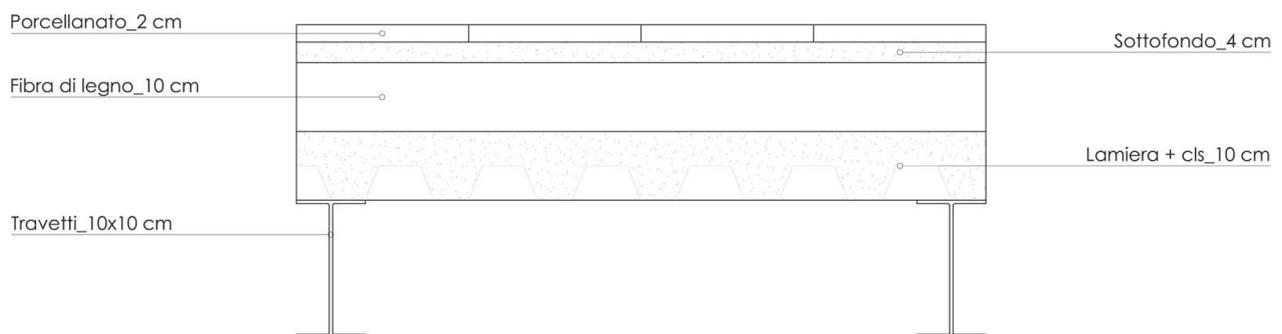
NB: I primi 2 valori di h si riferiscono rispettivamente alla trave più sollecitata (i = 4,5 m) e ad una qualsiasi (i = 2,25 m), con il carico strutturale q_s; mentre gli altri 2 sono riferiti alle medesime travi, ma con un carico strutturale q_s* che tiene conto del peso proprio della trave.

ACCIAIO

1. ANALISI DEI CARICHI

Per quanto concerne l'acciaio la prima parte relativa all'analisi dei carichi è identica a quella precedente. Si procede sempre alla definizione della stratigrafia e al calcolo del peso totale di ogni strato, al fine di sommarli poi per ottenere il **carico totale q**.

NB: dopo aver dimensionato una prima volta la trave calcolo anche il suo peso proprio, ottenendo un **carico strutturale q_s*** maggiore di quello precedente per il quale ridimensiono la trave ottenendo un **altezza h** maggiore.



materiale	peso specifico	lunghezza	larghezza	altezza	area profilo	interasse	superficie	peso totale
	KN/mc	m	m	m	mq			
porcellanato	16,0	1	1	0,020			1	0,32
sottofondo_malta di calce	18,0	1	1	0,040			1	0,72
isolante_fibra di legno	2,3	1	1	0,100			1	0,23
lamiera + getto cls	16,6	1	1	0,100			1	1,66
travetti_IPE200	78,5	1	0,1	0,200	0,00285	0,5	1	0,45

$Q_s = 1,66 + 0,45 =$	2,107
$Q_p = 0,32 + 0,72 + 0,23 + 1 + 0,5 =$	2,770

materiale TRAVE	peso specifico	lunghezza	larghezza	altezza	area profilo	interasse	superficie	peso totale
acciaio_IPE330	78,5	1	0,16	0,33	0,00629	4,5	1	0,494

$Q_s^* = 1,66 + 0,45 + 0,494 =$	2,601
$Q_p = 0,32 + 0,72 + 0,23 + 1 + 0,5 =$	2,770

2. CALCOLO DELL'ALTEZZA H

Anche il calcolo del **momento flettente M** non riporta differenze rispetto al calcolo precedente.

Lo stesso non si può dire per la tensione: nel caso dell'acciaio abbiamo differenti valori di **resistenza caratteristica $f_{y,k}$** , a seconda del tipo di acciaio utilizzato (nel nostro caso abbiamo usato 3 diversi acciai con $f_{y,k}$ pari 235, 275 e 355). La **tensione σ_{am}** è uguale a quella caratteristica $f_{y,k}$ ridotta dividendo per il solito **coefficiente di sicurezza γ** , il quale per l'acciaio da carpenteria è pari a 1,15.

$$\sigma_{am} = (f_{y,k} / \gamma)$$

Il passo finale si fonda sempre sulla **Formula di Navier**, ma paradossalmente è più semplice rispetto al legno: è sufficiente porre sempre la tensione sigma massima uguale a quella ammissibile e ricavarsi il **modulo di resistenza W_x minimo**; successivamente occorre cercare sul profilario il primo profilo con modulo di resistenza superiore a quello trovato.

$$\sigma_{max} = (M / I_x) * y_{max}$$

$$W_x = I_x / y_{max}$$

$$W_x = M / \sigma_{max}$$

interasse	q_s	q_p	q_a	q	luce	M	$f_{y,k}$	σ_{am}	W_x	profilo scelto
m	KN/mq	KN/mq	KN/mq	KN/m	m	KN*m	N/mmqa	N/mmqa	cmc	
4,50	2,11	2,77	2,00	30,96	6	139,32	235	204,35	681,78	IPE 330
4,50	2,11	2,77	2,00	30,96	6	139,32	275	239,13	582,61	IPE 330
4,50	2,11	2,77	2,00	30,96	6	139,32	355	308,70	451,32	IPE 300
2,25	2,11	2,77	2,00	15,48	6	69,66	235	204,35	340,89	IPE 270
2,25	2,11	2,77	2,00	15,48	6	69,66	275	239,13	291,31	IPE 240
2,25	2,11	2,77	2,00	15,48	6	69,66	355	308,70	225,66	IPE 220
4,50	2,60	2,77	2,00	33,17	6	149,24	235	204,35	730,34	IPE 360
4,50	2,60	2,77	2,00	33,17	6	149,24	275	239,13	624,11	IPE 330
4,50	2,60	2,77	2,00	33,17	6	149,24	355	308,70	483,46	IPE 300
2,25	2,60	2,77	2,00	16,58	6	74,62	235	204,35	365,17	IPE 270
2,25	2,60	2,77	2,00	16,58	6	74,62	275	239,13	312,05	IPE 240
2,25	2,60	2,77	2,00	16,58	6	74,62	355	308,70	241,73	IPE 220

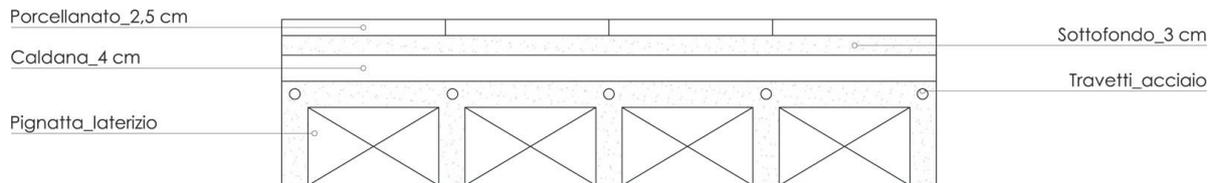
NB: I primi 3 valori di W_x con relativo profilo IPE si riferiscono alla trave più sollecitata ($i = 4,5$ m), con il carico strutturale q_s e tensioni $f_{y,k}$ crescenti; mentre i successivi 3 sono riferiti ad una trave qualsiasi ($i = 2,25$ m), sempre un carico strutturale q_s e tensioni crescenti; i 3 seguenti si riferiscono alla trave più sollecitata, con carico strutturale q_s^* che tiene conto del carico proprio della trave, e gli ultimi 3 ad una trave qualsiasi sempre con carico strutturale q_s^* .

CEMENTO ARMATO

1. ANALISI DEI CARICHI

Anche per il cemento armato la parte relativa alla stratigrafia del solaio e all'analisi dei carichi non subisce variazioni.

NB: dopo aver dimensionato una prima volta la trave calcolo anche il suo peso proprio, ottenendo un **carico strutturale q_s^*** maggiore di quello precedente per il quale ridimensiono la trave ottenendo un' **altezza h** maggiore.



materiale	peso specifico	lunghezza	larghezza	altezza	interasse	superficie	peso totale
	KN/mc	m	m	m	m	mq	KN/mq
porcellanato	16,0	1	1	0,025		1	0,40
sottofondo_malta di calce	18,0	1	1	0,040		1	0,72
caldana_malta cementizia	21,0	1	1	0,040		1	0,84
travetti_acciaio	25,0	1	0,1	0,160	0,5	1	0,80
pignatta	5,5	1	0,4	0,160	0,5	1	0,70

$$Q_s = 0,84 + 0,80 + 0,70 = 2,344$$

$$Q_p = 0,40 + 0,72 + 1 + 0,5 = 2,620$$

materiale TRAVE	peso specifico	lunghezza	larghezza	altezza	interasse	superficie	peso totale
ca_Rck50	20	1	0,2	0,39	4,5	1	1,560

$$Q_s^* = 0,84 + 0,80 + 0,70 + 1,56 = 3,90$$

$$Q_p = 0,4 + 0,54 + 1 + 0,5 = 2,620$$

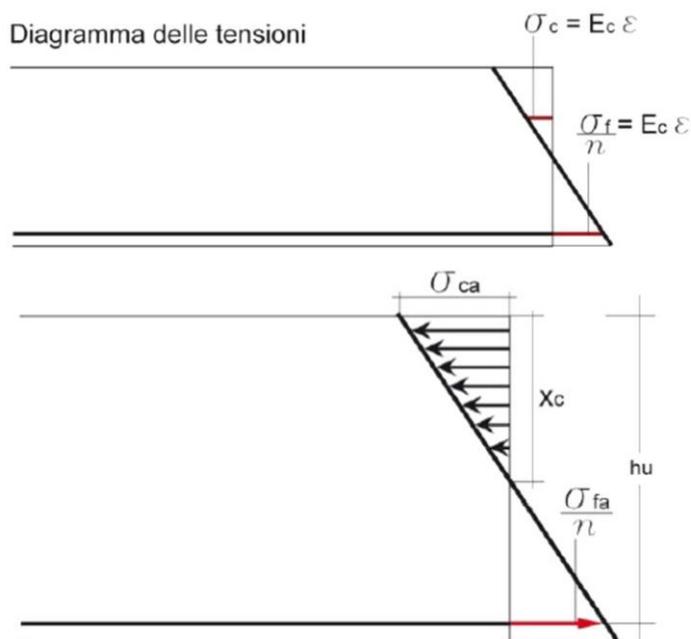
2. CALCOLO DELL'ALTEZZA H

Anche il calcolo del **momento flettente M** non riporta differenze rispetto al calcolo precedente.

Per quanto riguarda la tensione, a seconda del cls precelto, avremo una **tensione sig_ca** data dalla **resistenza caratteristica fy**, moltiplicata per un **coefficiente riduttivo α_{cc}** pari a 0,85 e divisa per il **coefficiente riduttivo gamma** pari a 1,5.

$$\sigma_{ca} = (f_y / \gamma) * \alpha_{cc}$$

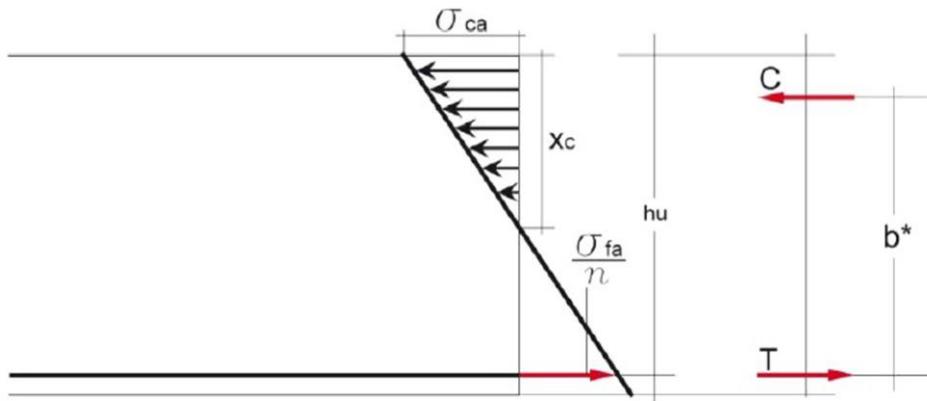
L'ultimo passaggio in questo caso è più complicato poiché bisogna tener conto del fatto che il materiale non è omogeneo, ma è composto da due materiali diversi (cls e acciaio) con tensioni e deformazioni differenti. Il tutto va, quindi, "**omogeneizzato**", mediante un **coefficiente di omogeneizzazione n**.



Una volta omogeneizzati i materiali e le rispettive tensioni, poniamo queste uguali alla tensione ammissibile e esplicitiamo x_c in funzione della nostra incognita h , sfruttando proprietà dei triangoli simili. Così facendo ci imbattiamo in un altro parametro fondamentale, ossia α .

- $\sigma_{ca} = E_{ca} * \xi_{ca}$ e $\sigma_s = E_s * \xi_s$
- $E_s / E_{ca} = n$
- $x_c = h * (\sigma_{ca} / (\sigma_{ca} + \sigma_s/n)) = h * \alpha$

A questo punto sappiamo che il momento flettente M è dato da una coppia: la **compressione C** relativa al calcestruzzo e la **trazione T** relativa all'armatura d'acciaio.



Eguagliando i momenti dati dal prodotto di queste due forze con il **braccio b*** possiamo esplicitare l'altezza h (h_u nell'immagine sopra) che stiamo cercando.

- $M = C * b^* = T * b^*$
- $b^* = h * (1 - \alpha/3)$
- $h = \sqrt{(1 / (\sigma_{ca}/2 * \alpha * (1 - \alpha/3))) * \sqrt{M/b^*}} = r * \sqrt{M/b^*}$

interasse m	q _s KN/mq	q _p KN/mq	q _a KN/mq	q KN/m	luce m	M KN*m	f _y N/mmq	sig fa N/mmq	Rck N/mmq	sig ca N/mmq	alfa	r	b cm	h cm	delta cm	H cm	H/l	area mq	peso KN/m
4,50	2,34	2,62	2,00	31,32	6	140,94	450	391,30	40	22,67	0,46	2,26	20	39,78	5	44,78	0,075	0,09	2,24
4,50	2,34	2,62	2,00	31,32	6	140,94	450	391,30	50	28,33	0,52	2,16	20	34,00	5	39,00	0,065	0,08	1,95
4,50	2,34	2,62	2,00	31,32	6	140,94	450	391,30	60	34,00	0,57	2,09	20	30,05	5	35,05	0,058	0,07	1,75
2,25	2,34	2,62	2,00	15,66	6	70,47	450	391,30	40	22,67	0,46	2,26	20	28,13	5	33,13	0,055	0,07	1,66
2,25	2,34	2,62	2,00	15,66	6	70,47	450	391,30	50	28,33	0,52	2,16	20	24,04	5	29,04	0,048	0,06	1,45
2,25	2,34	2,62	2,00	15,66	6	70,47	450	391,30	60	34,00	0,57	2,09	20	21,25	5	26,25	0,044	0,05	1,31
4,50	2,90	2,62	2,00	33,84	6	152,28	450	391,30	50	28,33	0,52	2,16	20	35,34	5	40,34	0,067	0,08	2,02
2,25	2,90	2,62	2,00	16,92	6	76,14	450	391,30	50	28,33	0,52	2,16	20	24,99	5	29,99	0,050	0,06	1,50

NB: I primi 3 valori di H si riferiscono alla trave più sollecitata ($i = 4,5$ m), con il carico strutturale q_s e tensioni Rck crescenti; mentre i successivi 3 sono riferiti ad una trave qualsiasi ($i = 2,25$ m), sempre un carico strutturale q_s e tensioni crescenti; quello seguente si riferisce alla trave più sollecitata, con Rck pari a 50 e carico strutturale q_s^* che tiene conto del carico proprio della trave, mentre l'ultimo ad una trave qualsiasi sempre con carico strutturale q_s^* e Rck 50.