ESERCITAZIONE SULLA LINEA ELASTICA_26-03-2013

Dal momento che il sistema è iperstatico per poterlo risolvere ricorriamo al **metodo d'integrazione della linea elastica**, il quale ci permette di individuare quella che è la nostra incognita principale, ovvero lo **spostamento verticale massimo (v_s)** della deformata (meglio sottolineare che per la trave si adotta il modello di Eulero-Bernoulli).

1. Avendo chiaro l'obiettivo, possiamo analizzare le **8 equazioni fondamentali** (3 di EQUILIBRIO, 3 della DEFORMAZIONE e 2 COSTITUTIVE): queste non vengono usate tutte contemporaneamente, ma solitamente sono divise in 2 gruppi a seconda del fatto che si stia investigando su uno spostamento assiale (e quindi sullo sforzo normale) o su uno spostamento trasversale (e di conseguenza sugli sforzi di taglio e momento flettente).
   Per questo motivo possiamo concentrarci solo sul secondo e su "sole" **5 equazioni**, ossia quelle dello spostamento verticale **v**, della rotazione della sezione di trave φ, del momento flettente **M**, del taglio **T** e della curvatura χ.

   - $dT/ds + q_2 = 0$
   - $dM/ds + T = 0$
   - $M = EI\chi$
   - $\chi = d\varphi/ds$
   - $\varphi = dv$

2. Il metodo analitico della linea elastica non può prescindere dall'analisi delle **condizioni al bordo**: per poter risolvere l'**equazione dello spostamento verticale v_s** necessitiamo di 4 equazioni con risultato noto poiché l'equazione suddetta presenta 4 incognite, ovvero le costanti di integrazione C_1, C_2, C_3 e C_4 ("accumulate" durante le diverse integrazioni che ci hanno condotto alla determinazione dell'equazione stessa).

   - $v_s = q_2 s^4/24EI + C_1 s^3/6 + C_2 s^2/2 + C_3 s + C_4$

   Nel nostro caso specifico abbiamo per **s=0** (nell'estremo sinistro, in prossimità dell'incastro) spostamento verticale e rotazione della sezione della trave nulle (**$v_{(0)} = 0$** e **$\varphi_{(0)} = 0$**). Sostituendo sia v che φ con le rispettive equazioni, derivate sempre dall'integrazione **dell'equazione della linea elastica per lo spostamento verticale** a cui facciamo riferimento (**$q_2 = d^4v/ds^4$**) si constata che c_3 e c_4 hanno valore nullo.

   Per **s=l** (estremo destro, coincidente col carrello) abbiamo, invece, che lo spostamento verticale è sempre nullo, mentre stavolta la rotazione della sezione è diversa da 0, ma ignota. Necessitiamo, quindi, di un'ulteriore equazione nota e prendiamo in considerazione quella del momento che in prossimità della cerniera del carrello deve essere uguale a 0.

   - $S = 0 \rightarrow v_{(0)} = 0$, $\varphi_{(0)} = dv/ds = 0$ $\qquad$ $S = l \rightarrow v_{(l)} = 0$, $M_{(l)} = EI\chi = EI \cdot d^2v/ds^2 = 0$

3. Le due equazioni relative al bordo l, messe a sistema, ci permettono di calcolare le costanti c1 e c2 che al momento sono le ultime due incognite rimaste.

   - $-ql^4/24EI + C_1l^3/6 + C_2l^2/2 = 0$ → $\mathbf{C_1 = 5ql/8EI}$
   - $-ql^2/2EI + C_1l + C_2 = 0$ → $\mathbf{C_2 = -\ ql/8EI}$

4. In realtà, oltre alle 4 costanti C che abbiamo calcolato, c'è un ulteriore dato incognito, senza il quale non è possibile calcolare l'abbassamento verticale: si tratta del valore da assegnare alla **variabile s** all'interno dell'equazione dello spostamento verticale. Sappiamo che all'abbassamento verticale massimo corrisponde un valore nullo della derivata della funzione che approssima la deformata della trave. È sufficiente, quindi, derivare la funzione $v_{(s)}$ e trovare i valori di s per i quali la derivata si annulla.

   - $\mathbf{v'_{(s)}} = \varphi = dv/ds = q_2 * s^3/6EI + C_1 * s^2/2 + C_2 * s = 0$

   Risolvendo questa equazione di terzo grado (ricordarsi di mettere in evidenza la s per trovare la prima soluzione e avere un'equazione di secondo grado) otteniamo 3 valori di s per i quali la derivata è nulla, ma solo 2 sono da prendere in considerazione (in quanto uno si riferisce ad un valore di s maggiore di l): s = 0, relativo all'incastro, e **s** = $(15 - \sqrt{33})/16$ = **0,578.**

   (NB: per semplificare il calcolo l è stato posto =1)

5. Finalmente siamo in grado di calcolare lo spostamento verticale. Sostituiamo il valore di s = 0,578 e delle costanti C all'interno dell'equazione di $\mathbf{v_{(s)}}$:

   - $\mathbf{v_{(s)}} = -q * s^4/24EI + C_1 * s^3/6 + C_2 * s^2/2$

   Il risultato è in funzione di q/EI. Per avere un risultato esclusivamente numerico basta assegnare un valore al **carico q**, scegliere il materiale per avere un **modulo elastico E** e la sezione della trave per avere il **momento d'inerzia I**.

6. L'ultimo passo consiste nel diagrammare il Taglio e il Momento. Per il primo possiamo dire che l'andamento è lineare e abbiamo un taglio negativo massimo in prossimità dell'incastro e uno positivo massimo nel vincolo destro; l'intersezione con l'asse della trave corrisponde a s=0,578. Il momento, di conseguenza, avrà andamento parabolico, con un massimo positivo nell'incastro, curvatura verso il basso e valore zero nel carrello; ad s=0,578 corrisponde un momento negativo massimo.