

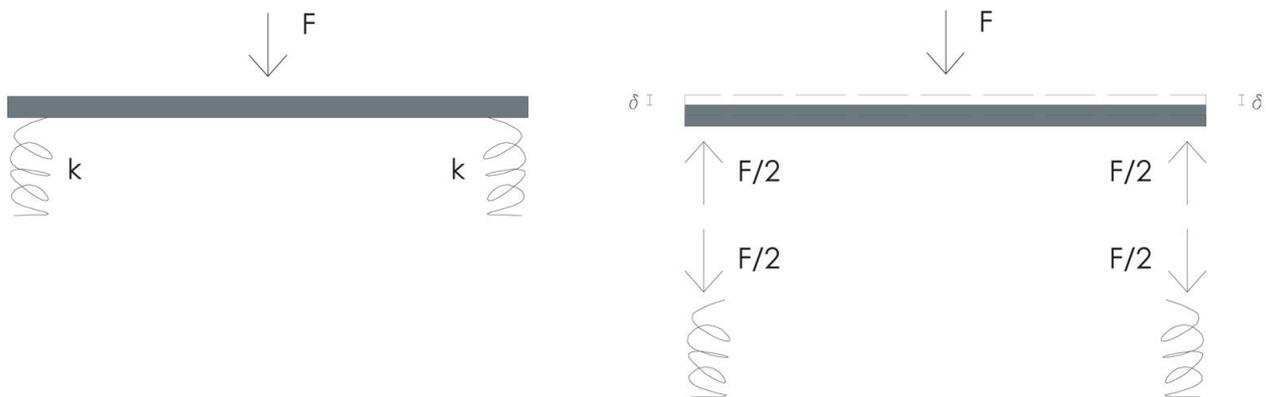
RIPARTIZIONE DELLE FORZE ORIZZONTALI_11-05-2013

Analizzando il telaio shear-type abbiamo assimilato il concetto di **rigidezza**: essa può essere espressa come la forza necessaria ad imprimere uno spostamento unitario, dal momento che la **forza F** è pari alla **rigidezza K** per lo **spostamento δ** . In sostanza è ciò che lega la causa (forza) all'effetto prodotto (spostamento): maggiore è la rigidezza, maggiore dovrà essere la forza necessaria a produrre un medesimo spostamento.

$$\rightarrow F = k * \delta \quad k = \text{rigidezza}$$

Trattando il tema dei controventi e, di conseguenza, della risposta alle **azioni orizzontali** di varia natura (sisma, vento, ecc.) che una struttura deve necessariamente essere in grado di sopportare, è opportuno fare una precisazione: l'efficacia di un sistema di controventi risiede nella possibilità di considerare l'impalcato in questione come un **corpo infinitamente rigido** sul piano orizzontale. Esso, quindi, è incapace di deformarsi se soggetto a forze agenti lungo il suo medesimo piano e si inflette nel caso dell'azione di forze verticali che qui però non trattiamo. I **controventi**, dunque, possono essere considerati **vincoli elastici cedevoli**, i quali contrastano le forze agenti sul loro stesso piano. La loro elasticità consente al corpo rigido degli spostamenti indotti dalla forza agente, alla quale corrisponde una reazione proporzionale alla rigidezza (vedi telaio shear-type).

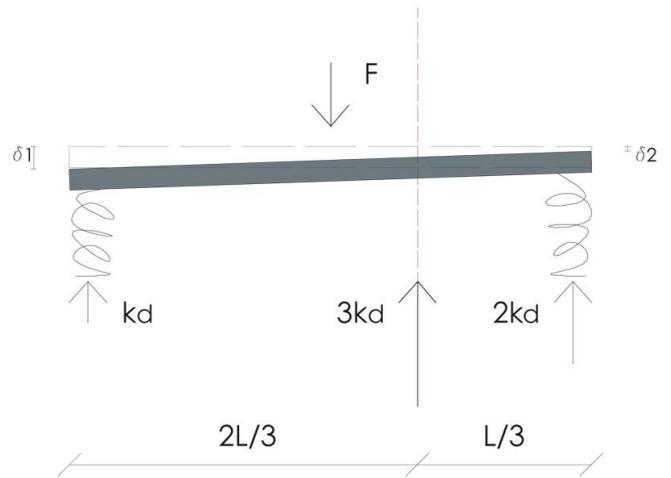
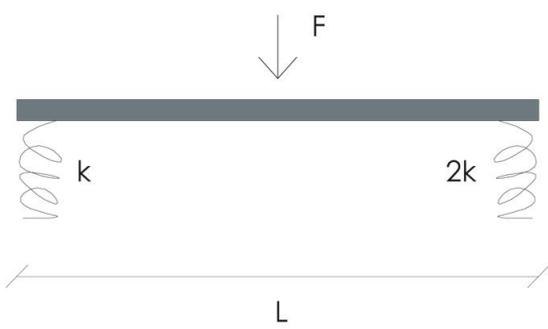
Nel caso più semplice di **controventi con eguale rigidezza** avremo una medesima ripartizione della forza agente e il corpo rigido traslerà.



$$\rightarrow F/2 = k * \delta \quad \longrightarrow \quad \delta = F/2k$$

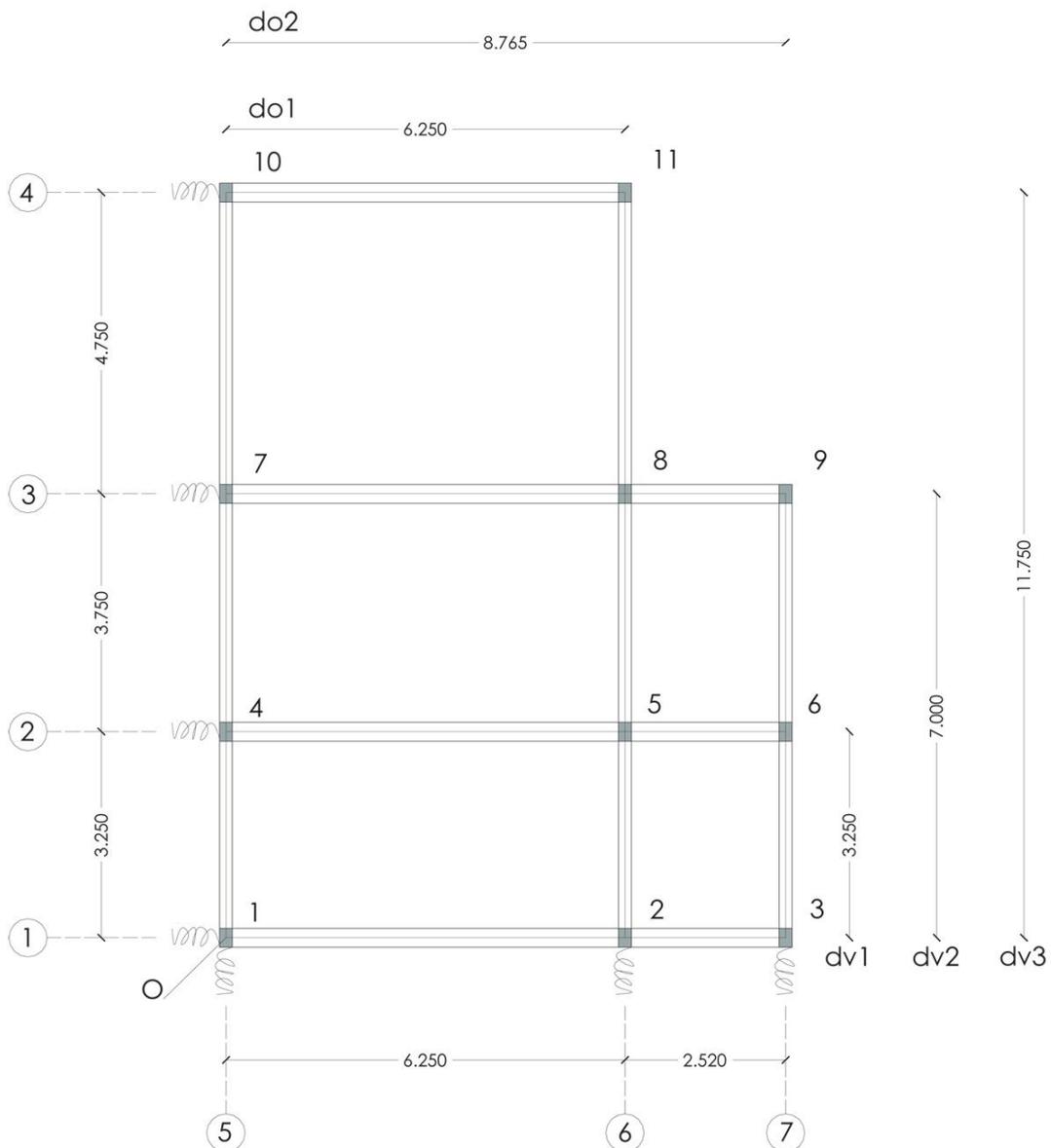
Quando, invece, abbiamo **controventi con rigidezze tra loro differenti** sappiamo che la forza agente verrà ripartita in proporzione alle rigidezze appunto, quindi anche gli spostamenti δ diversi per ogni molla. Di conseguenza, il corpo rigido non si limiterà a traslare, ma ruoterà. Questo avviene nei casi in cui l'asse della forza agente F non corrisponde all'**asse dei centri delle rigidezze**, ossia l'asse della forza reagente risultante equivalente alle 2 reazioni singole.

Gli spostamenti finali, quindi, risentono della **traslazione δ** lungo al direzione di F e di una **rotazione φ** attorno al **centro delle rigidezze**. In sostanza le due grandezze fondamentali sono la **rigidezza traslante K_δ** e la **rigidezza rotazionale K_φ** .



Lo scopo dell'esercitazione seguente è quello di analizzare un impalcato strutturale, calcolando la rigidezza traslante, il centro di massa, il centro delle rigidezze, la rigidezza rotazionale e quantificando la ripartizione delle azioni orizzontali (sismiche) sui diversi controventi.

Pianta strutturale e sistema di controventi



STEP 1

Dopo aver individuato i pilastri che compongono i 7 telai dell'impalcato assegno ad ognuno di loro un materiale (in questo caso ca) e una sezione (b=10 cm; h=15 cm). L'obiettivo è calcolare la **rigidezza traslante K_{δ}** di ogni telaio, ovvero la somma delle rigidezze dei singoli pilastri che lo compongono, la quale come sappiamo dipende dal modulo di Young E, dal Momento d'Inerzia I e dalla luce L (nello specifico l'altezza h).

$$\rightarrow K_{\delta} = \sum k_i \quad k = 12EI/h^3$$

Step 1: calcolo delle rigidezze traslanti dei controventi dell'edificio

Telaio 1	1-2-3	pilastri che individuano il telaio
E (N/mm ²)	21000,00	modulo di Young
H (m)	3,00	altezza dei pilastri
I_1 (cm ⁴)	2812,50	momento d'inerzia pilastro 1
I_2	2812,50	momento d'inerzia pilastro 2
I_3	2812,50	momento d'inerzia pilastro 3
I_4	0,00	momento d'inerzia pilastro 4
K_T (KN/m)	787,50	rigidezza traslante telaio 1

Telaio 2	4-5-6	pilastri che individuano il telaio
E	21000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
I_1	2812,50	momento d'inerzia pilastro 1
I_2	2812,50	momento d'inerzia pilastro 2
I_3	2812,50	momento d'inerzia pilastro 3
I_4	0,00	momento d'inerzia pilastro 4
K_T	787,50	rigidezza traslante telaio 2

Telaio 3	7-8-9	pilastri che individuano il telaio
E	21000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
I_1	2812,50	momento d'inerzia pilastro 1
I_2	2812,50	momento d'inerzia pilastro 2
I_3	2812,50	momento d'inerzia pilastro 3
I_4	0,00	momento d'inerzia pilastro 4
K_T	787,50	rigidezza traslante telaio 3

b	h
10	15

Telaio 4	10-11	pilastri che individuano il telaio
E	21000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
I_1	2812,50	momento d'inerzia pilastro 1
I_2	2812,50	momento d'inerzia pilastro 2
I_3	0,00	momento d'inerzia pilastro 3
I_4	0,00	momento d'inerzia pilastro 4
K_T	525,00	rigidezza traslante telaio 4

Telaio 5	1-4-7-10	pilastri che individuano il telaio
E	21000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
I_1	1250,00	momento d'inerzia pilastro 1
I_2	1250,00	momento d'inerzia pilastro 2
I_3	1250,00	momento d'inerzia pilastro 3
I_4	1250,00	momento d'inerzia pilastro 4
K_T	466,67	rigidezza traslante telaio 5

Telaio 6	2-5-8-11	pilastri che individuano il telaio
E	21000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
I_1	1250,00	momento d'inerzia pilastro 1
I_2	1250,00	momento d'inerzia pilastro 2
I_3	1250,00	momento d'inerzia pilastro 3
I_4	1250,00	momento d'inerzia pilastro 4
K_T	466,67	rigidezza traslante telaio 6

Telaio 7	3-6-9	pilastri che individuano il telaio
E	21000,00	modulo di Young
H	3,00	altezza dei pilastri
I_1	1250,00	momento d'inerzia pilastro 1
I_2	1250,00	momento d'inerzia pilastro 2
I_3	1250,00	momento d'inerzia pilastro 3
I_4	0,00	momento d'inerzia pilastro 4
K_T	350,00	rigidezza traslante telaio 7

STEP 2

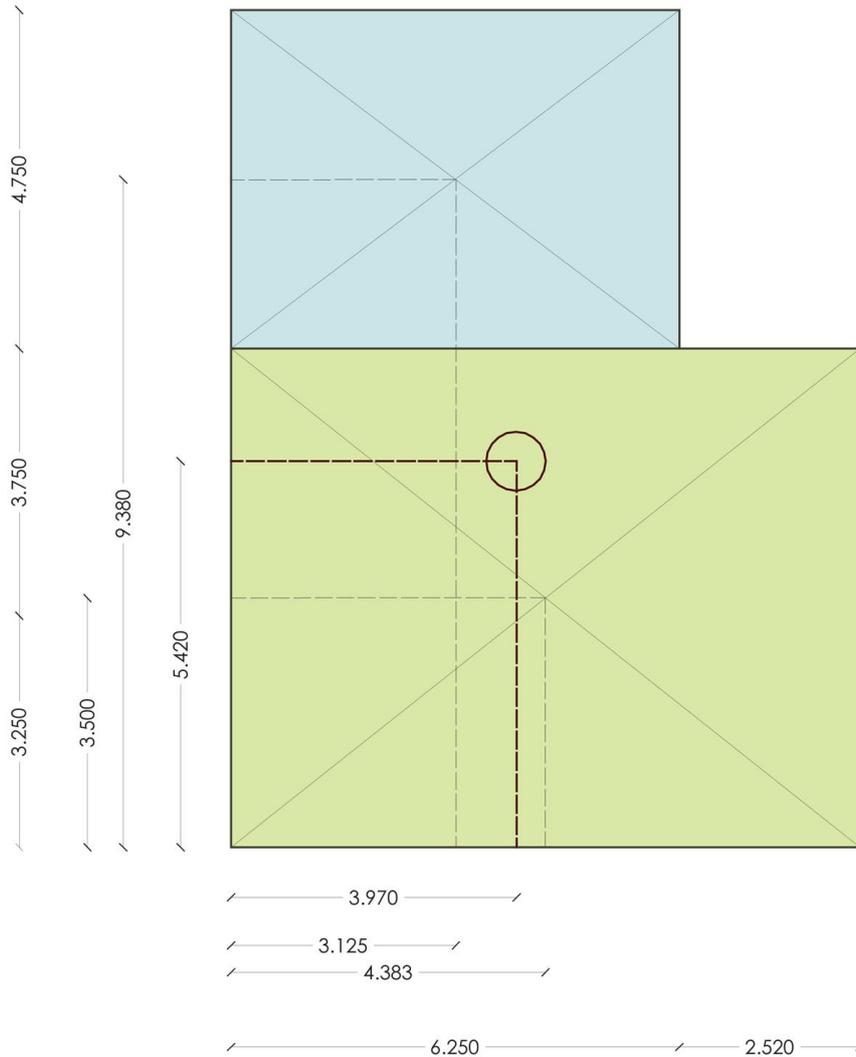
Raccogliamo in una tabella i valori delle rigidezze traslanti dei telai e le distanze degli stessi da un punto O ritenuto origine del sistema di riferimento. Come vedremo queste distanze relative ci serviranno nel calcolo del centro delle rigidezze.

Step 2: tabella sinottica controventi e distanze

Kv1(KN/m)	466,67	rigidezza traslante contr.vert.1
Kv2	466,67	rigidezza traslante contr.vert.2
Kv3	350,00	rigidezza traslante contr.vert.3
dv1 (m)	3,25	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv2	7,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv3	11,75	distanza orizzontale controvento dal punto O
Ko1(KN/m)	787,50	rigidezza traslante contr.orizz.1
Ko2	787,50	rigidezza traslante contr.orizz.2
Ko3	787,50	rigidezza traslante contr.orizz.3
Ko4	525,00	rigidezza traslante contr.orizz.4
do1	6,25	distanza verticale controvento punto O
do2	8,765	distanza verticale controvento punto O

STEP 3

A questo punto calcoliamo il **centro di massa** del nostro impalcato: il procedimento è puramente di natura geometrica e consiste nel suddividere la pianta in forme semplici (rettangoli) delle quali calcolo il corrispondente centro di massa. Una volta ottenute le coordinate dei 2 centri di massa dei 2 rettangoli, con una semplice media ponderata abbiamo le coordinate del centro di massa dell'impalcato.



$$\text{X}_G = [(x_1 * A_1) + (x_2 * A_2)] / A_{tot}$$

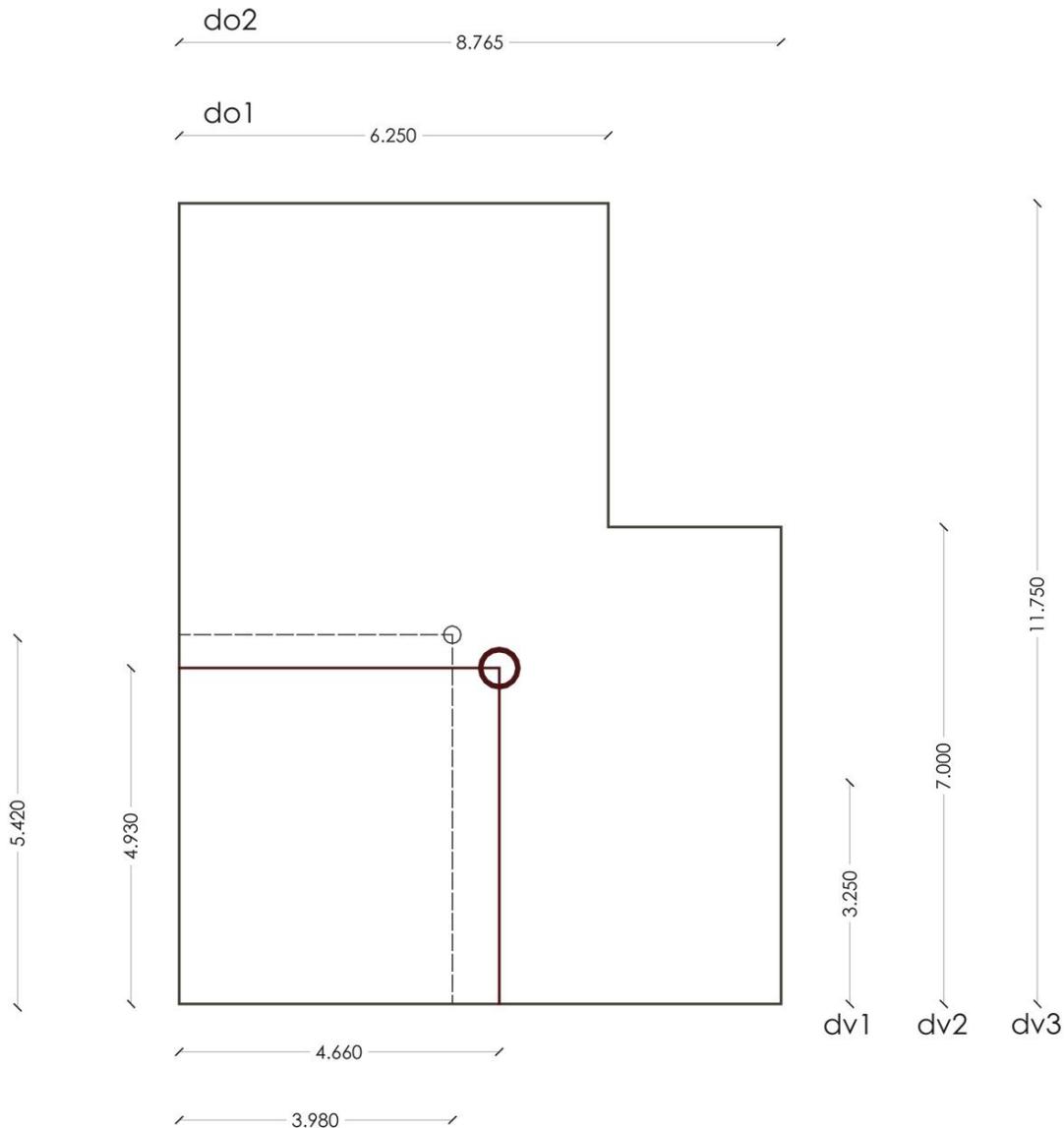
$$\text{Y}_G = [(Y_1 * A_1) + (Y_2 * A_2)] / A_{tot}$$

Step 3: calcolo del centro di massa

area_1 (mq)	61,355	misura dell'area superficie 1 area 1 (misura)
x_G1 (m)	4,383	coordinata X centro area 1
y_G1	3,500	coordinata Y centro area 1
area_2	29,688	misura dell'area superficie 2
x_G2	3,125	coordinata X centro area 2
y_G2	9,38	coordinata Y centro area 2
Area tot (mq)	91,04	Area totale impalcato
X_G	3,97	coordinata X centro d'area impalcato
Y_G	5,42	coordinata Y centro d'area impalcato

STEP 4

Il quarto step prevede il calcolo del **centro delle rigidzze**, per il quale necessitiamo delle distanze dall'origine O prima annotate. Infatti, anche in questo caso si tratta di una media ponderata: moltiplichiamo il valore della rigidzza traslante di ogni telaio per la relativa distanza dal punto O e dividiamo la somma ottenuta per la rigidzza traslante totale, sia in orizzontale che in verticale (ossia lungo gli assi x e y del nostro sistema di riferimento perché va ricordato che le forze agenti sono sempre orizzontali e che si sta analizzando il piano dell'impalcato).



Dopo aver individuato il centro delle rigidzze annotiamo le distanze da esso di ogni controvento poiché sono necessarie ai fini del calcolo della **rigidzza rotazionale K_{ϕ}** : essa è data dalla sommatoria dei prodotti delle rigidzze traslanti di ogni telaio per il quadrato della relativa distanza dal centro delle rigidzze.

$$\triangleright \quad K_{\phi} = \sum k_i * d_i^2$$

Step 4: calcolo del centro di rigidezze e delle rigidezze globali

Ko_tot	1283,33	rigidezze totale orizzontale
Kv_tot	2887,50	rigidezze totale verticale
X_C (m)	4,66	coordinata X centro rigidezze
Y_C	4,93	coordinata Y centro rigidezze

dd_v1	-4,932	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v2	-1,682	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v3	2,068	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v4	6,818	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o1	-4,663	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o2	1,587	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o3	4,102	distanze controvento dal centro rigidezze
K_φ (KN*m)	73344,29	rigidezze torsionale totale

STEP 5

Il quinto passo consiste nell'**analisi dei carichi** agenti sull'impalcato e sulla loro combinazione (allo SLE dal momento che i valori non vengono amplificati dai coefficienti γ). La somma del carico permanente totale e di quello accidentale totale, moltiplicata per il coefficiente di contemporaneità, ci dà il valore dei **pesi sismici**, i quali, a loro volta, divisi per il coefficiente di intensità sismica, danno il valore della **forza sismica orizzontale**.

Step 5: analisi dei carichi sismici

q_s (KN/mq)	1,50	carico permanente di natura strutturale
q_p	2,50	sovraccarico permanente
q_a	5,00	sovraccarico accidentale
G (KN)	364,17	carico totale permanente
Q (KN)	455,21	carico totale accidentale
y	0,80	coefficiente di contemporaneità
W (KN)	728,34	Pesi sismici
c	0,10	coefficiente di intensità sismica
F (KN)	72,83	Forza sismica orizzontale

STEP 6-7

Ora non ci resta che quantificare la **ripartizione della forza sismica F** lungo l'asse x e lungo quello y e, nello specifico, per ognuno dei controventi.

Innanzitutto, ricordiamo che nel momento in cui la forza agente abbia un asse differente da quello del centro delle rigidezze (come nel nostro caso), il corpo non si limita a traslare, ma ruota anche. Per poter conoscere il valore di questa rotazione, calcoliamo il **Momento Torcente M** per l'asse x, moltiplicando la forza sismica F per il suo braccio, ovvero la differenza tra l'ordinata del centro delle rigidezze e quella del centro di massa, e per l'asse y, utilizzando come braccio la differenza tra le ascisse dei due centri. Poi, calcoliamo la **traslazione orizzontale**, dividendo F per la rigidezze traslante orizzontale, la **traslazione verticale**, dividendo F stavolta per la rigidezze traslante verticale, e le **rotazioni**, dividendo i rispettivi Momenti Torcenti per la rigidezze rotazionale.

A questo punto siamo in grado di conoscere la ripartizione della forza sismica, sia lungo l'asse x che lungo quello y, e il valore delle **reazioni** dei singoli controventi.

– **Asse x**

- $F_o = k_o (\delta_o + d_v\varphi)$
- $F_v = k_v * d_o * \varphi$
- $R_o = \delta_o * k_o$

– **Asse y**

- $F_o = k_o * d_v * \varphi$
- $F_v = k_v (\delta_v + d_o\varphi)$
- $R_v = \delta_v * k_v$

Step 6: ripartizione forza sismica lungo X

M (KN*m)	-35,25	momento torcente (positivo se antiorario)
u_o (m)	0,057	traslazione orizzontale
φ	-0,00048	rotazione impalcato (positiva se antioraria)
Fo1 (KN)	46,56	Forza sul controvento orizzontale 1
Fo2	45,33	Forza sul controvento orizzontale 2
Fo3	43,91	Forza sul controvento orizzontale 3
Fo4	28,08	Forza sul controvento orizzontale 4
Fv1	1,05	Forza sul controvento verticale 1
Fv2	-0,36	Forza sul controvento verticale 2
Fv3	-0,69	Forza sul controvento verticale 3

Ro1	44,69	reazione contr. orizz.1
Ro2	44,69	reazione contr. orizz.2
Ro3	44,69	reazione contr. orizz.3
Ro4	29,80	reazione contr. orizz.4

Step 7: ripartizione forza sismica lungo Y

M (KN*M)	-50,31	momento torcente
v_o (KN)	0,025	traslazione verticale
φ	-0,00069	rotazione impalcato
Fo1 (KN)	2,66	Forza sul controvento orizzontale 1
Fo2	0,91	Forza sul controvento orizzontale 2
Fo3	-1,12	Forza sul controvento orizzontale 3
Fo4	-2,46	Forza sul controvento orizzontale 4
Fv1	13,26	Forza sul controvento verticale 1
Fv2	11,26	Forza sul controvento verticale 2
Fv3	7,84	Forza sul controvento verticale 3

Rv1	11,77	reazione contr. vert.1
Rv2	11,77	reazione contr. vert.2
Rv3	8,83	reazione contr. vert.3